

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Муравей движется по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0(-1; \sqrt{3})$ и $N_0(2\sqrt{3}; 2)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a, \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$.

5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6, \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N2

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(a+b)y = \frac{a - 3(a+b)x}{12} \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

$$4bx + (a+b)by = 1$$

$$y = \frac{a - 3(a+b)x}{12}$$

$$\begin{cases} y = \frac{a - 3(a+b)x}{12} \\ b \cdot (4x + \frac{(a+b) \cdot (a - 3(a+b)x)}{12}) = 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$(1): b \cdot (4x + \frac{(a+b) \cdot ab}{12} - \frac{3(a+b)^2 x b}{12}) = 1 \cdot 12$$

$$48bx - 3(a+b)^2 x b = 12 - ab(a+b)$$

$3bx(16 - (a+b)^2) = 12 - ab(a+b)$ — линейное уравнение относительно x .
~~Заметим что если~~ имеют бесконечно много

решений при $3b(16 - (a+b)^2) = 12 - ab(a+b) = 0$

$$\begin{cases} 3b(4-a-b)(4+a+b) = 0 \\ 12 - ab(a+b) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 0 \\ 12 - ab(a+b) = 0 \\ a+b = 4 \\ 12 - ab(a+b) = 0 \\ a+b = -4 \\ 12 - ab(a+b) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 0 \\ 12 - 0 = 0 \quad \emptyset \\ a+b = 4 \\ 12 - ab \cdot 4 = 0 \\ a+b = -4 \\ 12 + ab \cdot 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b = 4 \\ ab = 3 \\ a+b = -4 \\ ab = -3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ a = 3 \\ b = 1 \\ a = -2 \\ b = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 4-b \\ (4-b) \cdot b - 3 = 0 \\ a = -b-4 \\ (-4-b) \cdot b + 3 = 0 \\ b^2 - 4b + 3 = 0 \\ (b-3) \cdot (b-1) = 0 \\ b = 1 \Rightarrow a = 3 \\ b = 3 \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 4-b \\ b^2 - 4b + 3 = 0 \\ a = -b-4 \\ b^2 + 4b - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 4-b \\ b = -1 \\ b = -3 \\ a = -b-4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b^2 + 4b - 3 &= 0 \\ D &= 16 + 3 \cdot 4 = 28 \\ b &= \frac{-4 \pm \sqrt{28}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= -2 \pm \sqrt{7} \Rightarrow a = -2 \mp \sqrt{7} \\ b &= -2 + \sqrt{7} \Rightarrow a = -2 - \sqrt{7} \\ b &= -2 - \sqrt{7} \Rightarrow a = -2 + \sqrt{7} \end{aligned}$$

Ответ: $(3; 1), (1; 3), (-2 - \sqrt{7}; -2 + \sqrt{7}), (-2 + \sqrt{7}; -2 - \sqrt{7})$

N3

$$(x+3)\sqrt{x^2-x+10} = x^2+5x+6$$

$$(x+3)\sqrt{x^2-x+10} = (x+3)(x+2) \quad | : (x+3)$$

~~х~~ $(x = -3 - \text{не корень})$

$$\sqrt{x^2-x+10} = x+2$$

$$\begin{cases} x^2-x+10 = (x+2)^2 & (1) \\ x^2-x+10 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(1): x^2-x+10 = (x+2)^2$$

$$x^2-x^2-4x-x+10-4=0$$

$$x^2-2x^2+x^2-2x-3x+6=0$$

$$(x-2)(x-2)(x^2+x-3)=0$$

$$\begin{cases} x-2=0 \\ x^2+x-3=0 \end{cases}$$

$$x^2+x-3=0$$

$$x^2+x-3=0$$

$$x^2+x-3=0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 3 = 13$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2} \\ x^2-x+10 \geq 0 \\ x \geq -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x = \frac{\sqrt{13}-1}{2} \end{cases}$$

ответ: $2; \frac{\sqrt{13}-1}{2}$

N5

$$1400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \Rightarrow \text{это число состоит из одного из}$$

этих наборов цифр: ~~1112~~ "1" "2" "5" "7"

"1" "2" это число ~~является~~ получено перестанов-

ками цифр из одного из ~~этих~~ чисел: 11118557;

11124557; 11222557;

Посчитаем сколько способов переставить ^{цифры в} ~~числа~~ ^{перем.}

у нас восемь цифр которые мы ^(8! вариантов) расставим

на 8 позиций $\Rightarrow 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ вариантов.

если поменять "1" и "1" ~~местами~~ ^{на} ~~местами~~ ^{то} ничего

не изменится $\Rightarrow$ убрали все эти перестановки

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

сделаем на 4! т.к. "единицу" 4). Аналогично с "5".

Получаем $\frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = \frac{40 \cdot 42}{2} = 840$

Аналогично для двух других чисел:

Получим $\frac{8!}{3! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2} = 840 \cdot 4$ для 11124557 и

$\frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 2} = 840 \cdot 2$ для 11222557

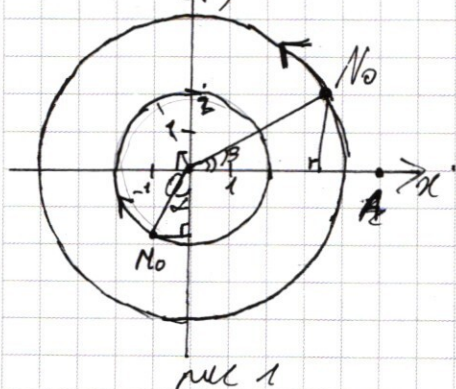
Итого: $840 + 840 \cdot 4 + 840 \cdot 2 = 840 \cdot 7 = 5880$ вариантов

Ответ: 5880 вариантов

- 1) R_M - радиус окр-ти по ^{НТ}которой идёт муравей
 R_N - радиус окр-ти по которой идёт жук

$R_M = OM_0 = \sqrt{(0-1)^2 + (0-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$

$R_N = ON_0 = \sqrt{(0-2\sqrt{3})^2 + (0-2)^2} = \sqrt{12+4} = 4$



~~$R_M = \frac{1}{2} R_N$~~

- 2) $R_M = \frac{1}{2} R_N \Rightarrow$ пока жук сделает "поверт" на 2° , муравей "повернёт" на 2° (т.к. у них одинаковые скорости)

- 3) Заметим что они накоротятся на минимальном расст. когда ^{точка O}на жук летит на прямой на которой они накоротятся. Тогда представим что расст. минимально когда ~~у~~ ^{линия} ~~у~~ ^{линия} образованы

M_0 и Ox и N_0 и Ox совпадают (M -муравей, N -жук)

~~Угол образует между M_0O и Ox равен~~

4) Угол $\alpha = 30^\circ$ т.к. $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ (ка см. на рис. 1, $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ т.к. $R_M = 2$ и $M_{0x} = -1$). Аналогично $\beta = 30^\circ$ (с.в. см. на рис. 1)

Т.к. муравей идёт по часовой а жук против по окружности или ~~надо~~ повернуть на 210° (следует из рисунка ¹ и п. ⁴) $\Rightarrow$ жук повернёт

на 70° (из п. 2). Дальше он будет поворачи-
вать на 120° до этих положений т.к. см. в сумме
надо повернуть на $360^\circ \Rightarrow$ спустя 3 таких

поворота он вернётся туда же
т.е. больше таких поло-
жений нет.

Значит эти положения это

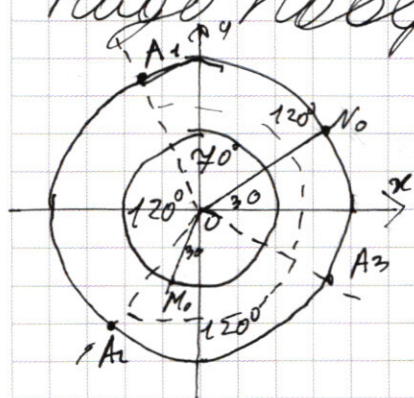
$$A_1 (R_r \cdot \cos 80^\circ; R_r \cdot \sin 80^\circ); A_2 (R_r \cdot \cos 40^\circ; -R_r \cdot \sin 40^\circ);$$

$$A_3 (R_r \cdot \cos 20^\circ; R_r \cdot \sin 20^\circ)$$

$$O_2 \text{ или } A_1 (-4 \cos 80^\circ; 4 \sin 80^\circ); A_2 (-4 \cos 40^\circ; -4 \sin 40^\circ);$$

$$A_3 (4 \cos 20^\circ; 4 \sin 20^\circ)$$

ответ: $(-4 \cos 80^\circ; 4 \sin 80^\circ); (-4 \cos 40^\circ; -4 \sin 40^\circ);$
 $(4 \cos 20^\circ; 4 \sin 20^\circ)$





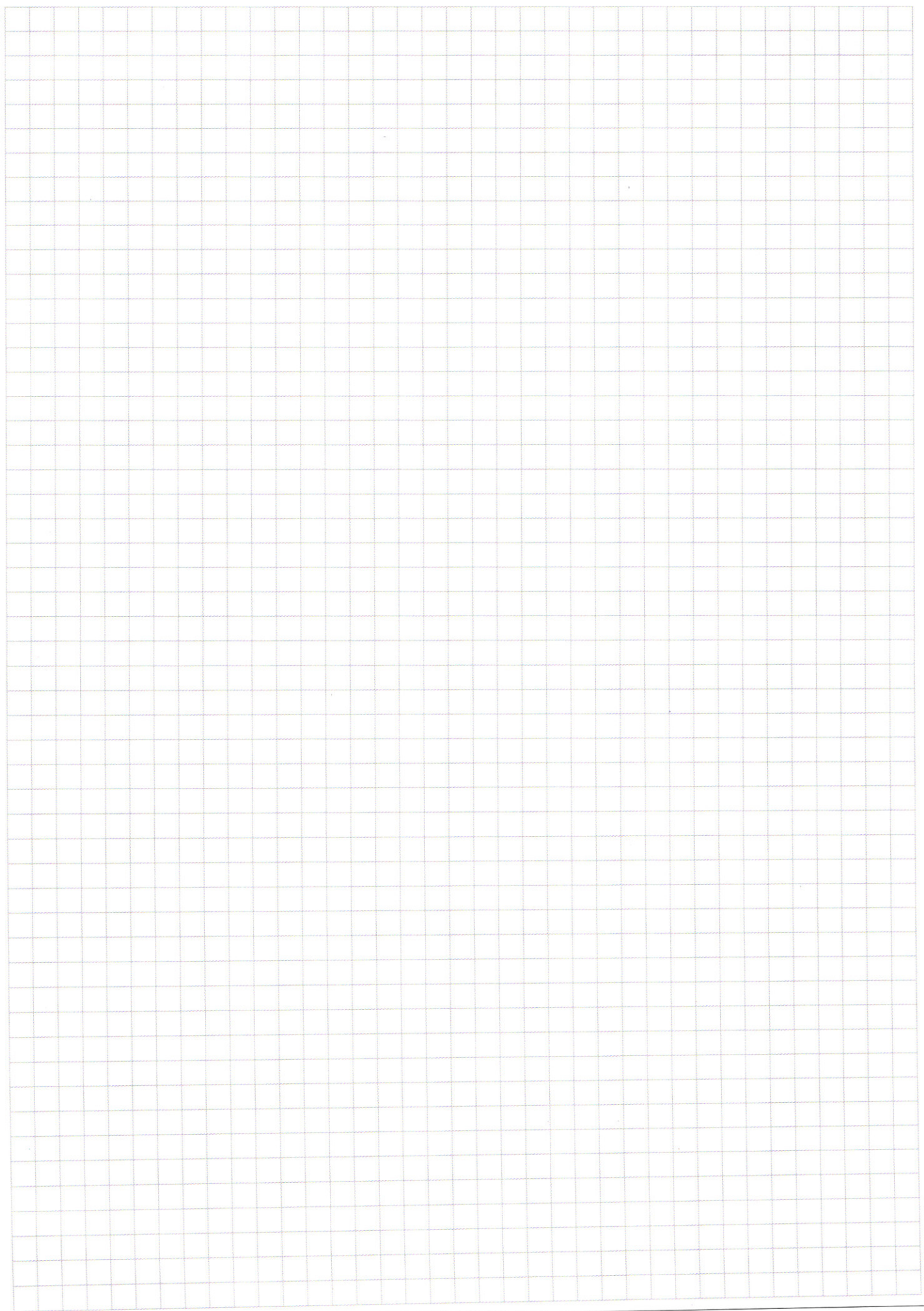
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № ____
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{array}{rcl} x-3 & > & 3+y \\ 3+y & > & 3-y \\ y & > & 0 \end{array}$$

$$t_w \quad y > 0$$

$$d) |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6$$

d) $3-x \leq x \leq 3+4$

$$3+y-x+x-3+y \leq 6$$

$$2y \leq 6$$

$$y \leq 3$$

$$2x^4 + x^7 - 2x + 3x^3 - 3x^2 + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1$$

$$2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1$$

৫)

$$x < 3 - y$$

$$-x+3+y - x+3-y \leq 6$$

$$-x \leq 0$$

$x \geq 0$

$$2x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0 \quad x \geq 0$$

b) $3 + 4 < 7$

$$x-3-y+x-3+y \leq 0$$

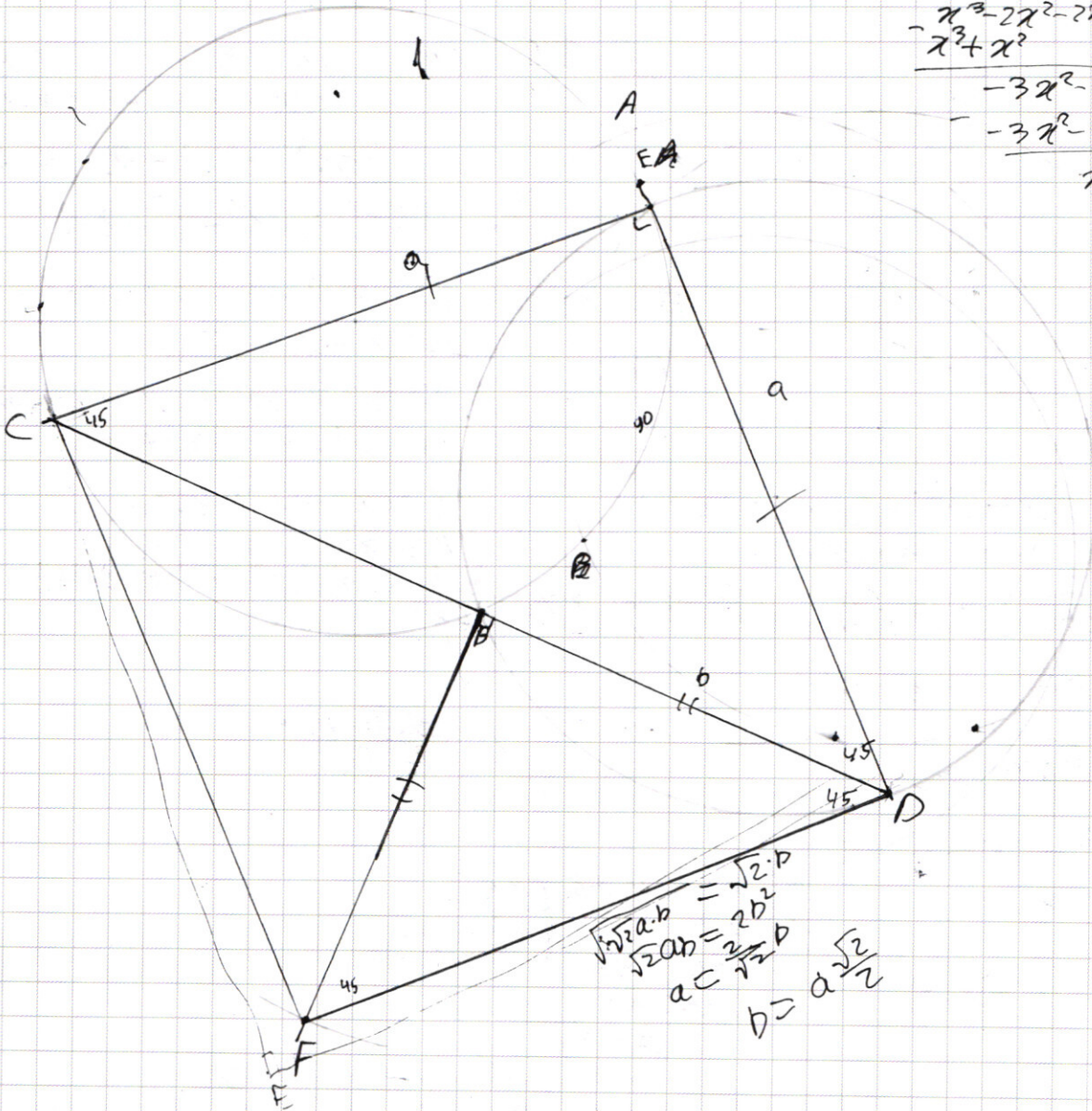
$$n \leq 6$$

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \overline{) 2x^4 + 2x^3} \\ \underline{2x^4 + 2x^3} \\ x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \\ \underline{x^3 + x^2} \\ -x^2 - 2x + 1 \\ \underline{-x^2 - 2x} \\ 1 \end{array}$$

$$-3x^2 - 2x + 1$$

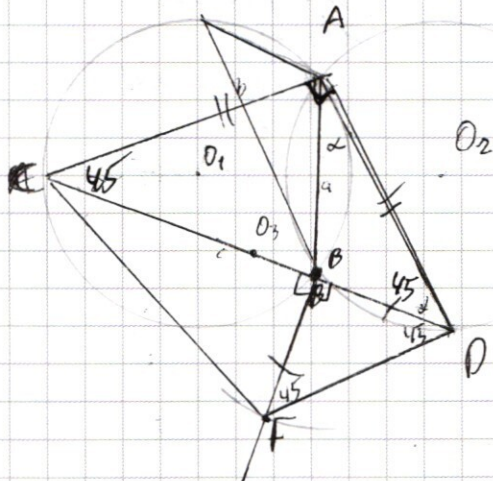
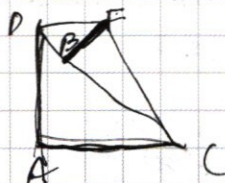
$$-3x^2 - 3x$$

$x+1$



$$\begin{aligned}\sqrt{2a \cdot b} &= \sqrt{2} \cdot b \\ \sqrt{2ab} &= 2b^2 \\ a &= \frac{2}{\sqrt{2}} b \\ b &= a \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$(x+3)\sqrt{x^2-x+10} = (x+3) \cdot (x+2)$$

$x = -3$ — не корень

$$\sqrt{x^2-x+10} = (x+2), \quad x \geq -2$$

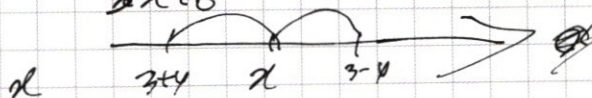
$$\begin{cases} x^3-x+10 = x^2+4x+4 \\ x \geq -2 \\ x^2-x+10 \geq 0 \end{cases}$$

$$x^3-x^2-5x+6=0$$

$$8-4-10+6$$

$$(x-2) \cdot (x^2+x-3)$$

$$\begin{array}{r} x^3-x^2-5x+6 \\ + x^3+2x^2 \\ \hline 4x^2-5x+6 \\ - 4x^2+8x-6 \\ \hline 3x^2-2x \\ - 3x^2+6x-6 \\ \hline -8x+6 \end{array}$$



$x \geq -4$

$$2a = 2R$$

$$\sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{2R}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = 2x^4 + (x-1)^2 - 3x^2(x-1) \geq 0$$

$$2x^4+x^2-2x-3x^2(x-1)+1 \geq 0$$

$$2x \cdot (x^2-1) + x$$

$$2x^4 + (x-1)^2 - 3x^2(x-1) \geq 0$$

$$1) x > -1$$

$$BD = 18 \sin \alpha \quad \frac{2 \cdot x^3 \cdot (x-1) - x^2 \cdot (x-1) + x^2 + (x-1)}{(x-1) \cdot (2x^3 - x^2 + x - 1)}$$

$$FB = 18 \sin \alpha \quad 2x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x^2 - 2x + 1 =$$

$$FD =$$

$$= (x^2 + x - 1) \cdot (x^2 - 1)$$

$$2x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x^2 - 2x + 1 =$$

$$= 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 =$$

$$4x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 4x + 2$$

$$4x^4 + 6x^3 - (2x+1)^2 + 3$$

$$(2x^2-2x-1)(2x^2+2x+1) + 3(2x^2+1)$$

$$\frac{2x^2-2x-1}{4x^2-2x-1}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ (x+3)^2 \cdot (x^3 - x + 10) = (x^2 + 5x + 6)^2 \quad (*) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x^3 - x + 10 \geq 0 \\ x^3 \geq -13 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} 2 \\ 5.25 \\ 13.5 \end{matrix}$$

$$(x^2 + 6x + 9) \cdot (x^3 - x + 10) = x^4 + 25x^2 + 36 + 10x^3 + 60x + 12x^2$$

$$x^5 + 6x^4 + 9x^3 - x^3 - 6x^2 - 9x + 10x^2 + 80x + 90 = x^4 + 37x^2 + 10x^3 + 60x + 36$$

$$x^5 + 6x^4 + 8x^3 + 4x^2 - 9x + 90 - x^4 - 37x^2 - 10x^3 - 36 = 0$$

$$x^5 + 5x^4 - 2x^3 - 33x^2 - 9x + 54 = 0$$

$$1 \cdot 5 - 2 - 33 - 9 + 54$$

$$1 \cdot 5 + 2 - 33 + 9 + 54$$

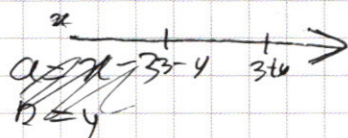
$$-32 + 80$$

$$x^3 - x + 10 > 0$$

$$x^3 + 8 - x + 2 > 0$$

$$(x+2) \cdot (x^2 - 2x + 4)$$

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6 \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25 \end{cases}$$

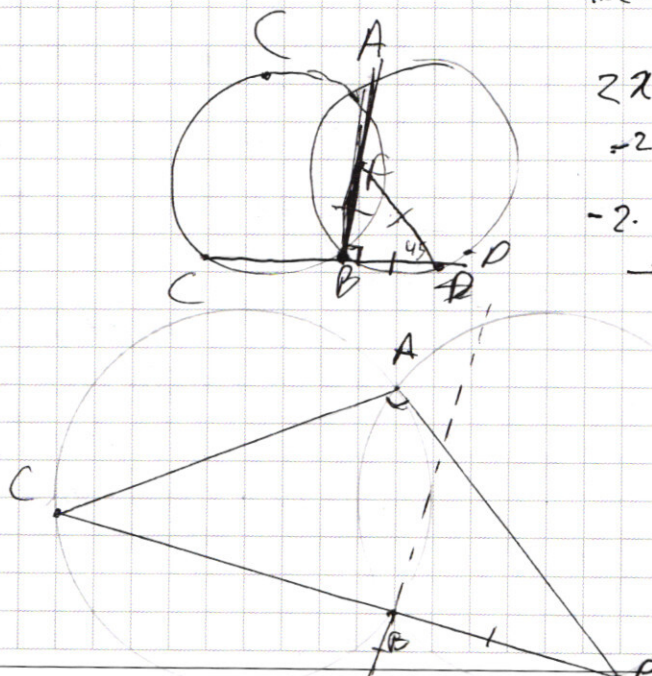
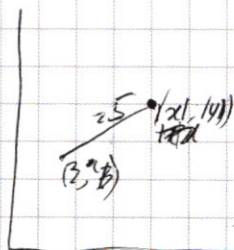


$$\begin{cases} |a-b| + |a+b| \leq 6 \end{cases}$$

$$x^2 - 6|x| + 9 + y^2 - 8|y| + 16 = (x+1) \cdot (2x^3 + x^2 - 3x + 1) \geq 0$$

$$x^2 - 6|x| + y^2 - 8|y| = 0$$

$$(|x|+|y|)^2 - 6(|x|+|y|)$$



abcde

$$2x^3 + x^2 - 3x + 1 \leq 0$$

$$-2 + 1 + 3 + 1$$

$$-2 \cdot 2.25 \cdot 1.5 + 3 \cdot 2.25 + 3 \cdot 1.5 + 1$$

$$-3 \cdot 2.25$$

$$-2 \cdot 2.5 - 4.5$$

☒ черновик

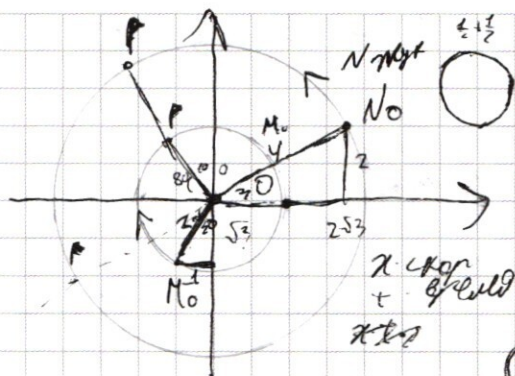
☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \quad \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 = 4$$

$$R_A = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$2) R_* = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 2^2} = 4$$

$$(x+3) \cdot \sqrt{x^2-x+10} = x^2+5x+6$$

a

$$\begin{cases} b=0 \\ 12-(a+b) \cdot ab=0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} (a+b)^2=16 \\ 12-(a+b) \cdot ab=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = 0 \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3ax + 3bx + 72y = a \\ 4bx + aby + b^2y = 1 \end{cases}$$

~~1a) $b \neq 0$~~

$$53ax + 12y = a$$

$$20 = 1$$

$$\angle \alpha \neq 0$$

$$\begin{cases} 3x + 4y = a \\ 4x + 5y = \frac{1}{p} \end{cases}$$

$$y = \frac{a}{12} - \frac{(a+b)x}{y}$$

$$4bx + (a+b) \cdot \frac{a-3(a+b)x}{2} = 1/17$$

$$48bx + (a+b) \cdot b(a-3(a+b)x) = 12$$

$$48b\pi + (a+b) \cdot ab - 3(a+b)^2 \cancel{b\pi} = 12$$

$$x \cdot (48b - 3a^3 + 2ab - 3(a+b)^2b) = 12 - (a+b)ab$$

$$x \cdot z \cdot b \cdot (16 - (a+b)^2) = 12 - (a+b) \cdot ab$$

$$\underline{(30+7t) \cdot 360 = C = 3b \cdot (16 - (a+b)^2)}$$

$$d = 12 - (a+b) \cdot a \cdot b$$

$$= (240 + xt) \cdot \frac{\%360}{1}$$

$\pi(x) = d$ - инерциальный элемент

бесконечно корней при $c=d=0$

$$\int 3b \cdot (16 - (a+b)^2) = 0$$

$$\{ 12 - (a+b) \cdot a = 0$$

