

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Вокруг птичьей кормушки в одной плоскости с ней по двум окружностям с одинаковой скоростью летают синица и снегирь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой кормушка (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Синица движется по часовой стрелке, а снегирь – против. В начальный момент времени синица и снегирь находятся в точках $M_0(\sqrt{3}; 3)$ и $N_0(6; -2\sqrt{3})$ соответственно. Определите координаты всех положений снегиря, в которых расстояние между птицами будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a, \\ 3bx + (a-b)y = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2|x+1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 7000. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 7 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10, \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

Преобразуем уравнения в системе:

$$\begin{cases} 6y = a - 2(a-b)x \\ (a-b)y = 1 - 3bx \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{b-a}{3}x + \frac{a}{6} \\ y = \frac{3}{b-a}x + \frac{1}{(a-b)b} \end{cases} \quad (O\&Z: a \neq b, b \neq 0)$$

Заметим, что $y = kx + b$ — линейная функция, а значит функции $y = a_1x + b_1$ и $y = a_2x + b_2$ имеют бесконечно много решений тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$. Т.е.

$$\textcircled{1} \frac{b-a}{3} = \frac{3}{b-a} \quad \text{и} \quad \frac{a}{6} = \frac{1}{(a-b)b} \quad \textcircled{2}$$

Из уравнения $\textcircled{1}$ мы видим, что $b-a=3$, или $b=a+3$.

Подставим во второе уравнение $\textcircled{2}$:

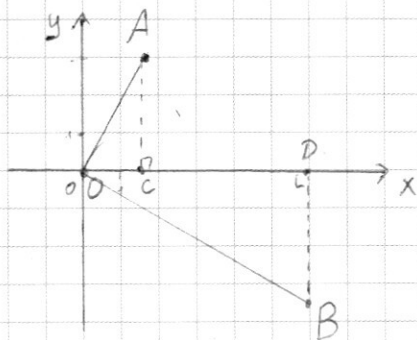
$$\begin{aligned} \frac{a}{6} &= \frac{1}{(a-(a+3))(a+3)} & \frac{a}{6} &= \frac{1}{-3a-9} & -a^2-3a &= 2 \\ & & & & a^2+3a+2 &= 0 \\ & & & & (a+1)(a+2) &= 0 \end{aligned}$$

Получаем, что система имеет бесконечно много решений при паре чисел a и b $(-1; 2)$ и $(-2; 1)$

Ответ: $(-2; 1); (-1; 2)$

N 1.

Рассмотрим треугольники, образованные расстояниями птиц от кормушки и координатных осей.



A - синица, B - скворец, O - кормушка.

Известно что $AC = 3$, $OC = \sqrt{3}$

$$BD = 2\sqrt{3} \quad OD = 6.$$

Найдем углы $\angle AOC$ и $\angle BOD$:

$$\operatorname{tg} \angle AOC = \frac{AC}{OC} = \sqrt{3} \quad \angle AOC = 60^\circ$$

$$\operatorname{tg} \angle BOD = \frac{BD}{OD} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \angle BOD = 30^\circ$$

Получаем, что $\angle AOB = 90^\circ$.

Из курса физики известно, что угловая скорость (мера изменения угла, на которое точка обернулась вокруг оси с течением времени) равна отношению ~~линейной скорости~~ линейной скорости ~~к~~ радиусу окружности, по которой движется тело.

Пусть ω_1 и ω_2 - угловые скорости синицы и скворца, v - их скорость. Тогда

$$\omega_1 = \frac{v}{OB}$$

$$\omega_2 = \frac{v}{OA}$$

П. к. $\triangle AOC \sim \triangle BOD$ (по углам), то $\frac{AO}{BO} = \frac{AC}{OD} = \frac{1}{2}$.

Тогда $\omega_2 = 2\omega_1$.

Расстояние между точками A и B будет наименьшим тогда и только тогда, когда точки O, A, B лежат на одной прямой.

В первый раз тела попадут на одну прямую тогда, когда углы поворота в углы дадут 90° (зная

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 (продолжение)

направление их движения). Т.к. угол, на который повернется В в 2 раза больше угла, на который повернется А, то В повернется на 30° . Тогда ОВ будет лежать на оси Ox . Найдём ОВ:

$$OB = \sqrt{6^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4\sqrt{3}. \text{ Тогда координаты точки } B: (4\sqrt{3} \cdot \cos 0^\circ; 4\sqrt{3} \cdot \sin 0^\circ) \text{ или } (4\sqrt{3}; 0).$$

В след. раз они "встретятся", когда, когда В суммарно пройдёт 360° , или В пройдёт 120° . Угол между ОВ и ОХ равен 120° . Тогда

$$B(4\sqrt{3} \cdot \cos 120^\circ; 4\sqrt{3} \cdot \sin 120^\circ)$$

$$B(-2\sqrt{3}; 6)$$

В след. раз они также "встретятся", когда В пройдёт 120° . Угол между ОВ и ОХ - 240° . Тогда

$$B(4\sqrt{3} \cdot \cos 240^\circ; 4\sqrt{3} \cdot \sin 240^\circ) \quad B(-2\sqrt{3}; -6)$$

А когда В ещё повернется на 120° , они опять "встретятся", но уже в первой точке. Тогда точек "встреч" (т.е. расстояния между ними наименьшее) будет три.

Ответ: $(4\sqrt{3}; 0), (-2\sqrt{3}; 6), (-2\sqrt{3}; -6)$

$$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = (x+5)(x-2) \quad N3$$

Если $x = -5$, то $\sqrt{x^3-16x+25} = \sqrt{-125+80+25} = \sqrt{-20}$,
ОДЗ не выполняется. Сократим на $(x+5)$:

$$\frac{1}{2}\sqrt{x^3-16x+25} = x-2 \quad (1)$$

$$\frac{1}{4}x^3 - 4x + 6,25 = x^2 - 4x + 4.$$

$$\frac{1}{4}x^3 - x^2 + 2,25 = 0.$$

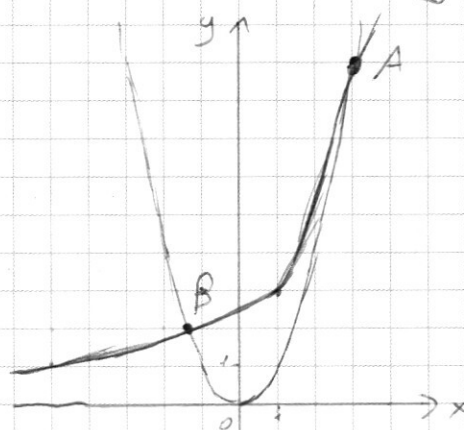
$$x^3 - 4x^2 + 9 = 0. \quad \cancel{x^2-4x+9} \quad \frac{-9}{x-4} = x^2$$

Построим графики функций ~~$y = 4x^2 - 4$ и $y = x^3 - 9$~~

$$y = x^2 \text{ и } y = \frac{-9}{x-4}.$$

В точке пересечения
графиков. А $x = 3$.

ОДЗ удовлетворяет.



В точке В x лежит
между -1 и -2 . Но при
подстановке в ур-ие (1) получаем, что
корень меньше 0, не выполняется ОДЗ.

Ответ: 3.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4.

Если $x \leq -1$, то кер-во примет вид

$$6x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 2x + 1 \geq 0.$$

$$(6x^4 + 5x^3 + 5x^2) + (x^2 + 2x + 1) \geq 0.$$

$$x^2 + 2x + 1 \geq 0 \quad (D=0)$$

$$x^2(6x^2 + 5x + 5) \geq 0 \quad (D>0; x^2 \geq 0; 6x^2 + 5x + 5 > 0)$$

Соответственно, кер-во верно для всех $x \leq -1$.

Если $x > -1$, то кер-во примет вид

$$6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1 \geq 0.$$

$$(x-1)(6x^3 + x^2 - 3x - 1) \geq 0. \quad (1)$$

Если $x \geq 1$, то $x-1 \geq 0$ ~~было~~.

~~Функция~~ Пусть $x' > x$. Тогда ~~было~~

$$x' = x + k.$$

$$6x'^3 = 6(x+k)^3 = 6x^3 + 18x^2k + 18xk^2 + 6k^3.$$

$$18x^2k > 3k = 3x' - 3x.$$

~~Функция~~ $y = 6x^3$ растёт быстрее функции

$y = 3x$. Поэтому $f(x)$ возрастает ($f(x) = 6x^3 + x^2 - 3x - 1$).

Т.е. кер-во выполняется для всех $x \geq 1$.

ker-во (1) минимален вид

$$(x-1)(2x+1)(3x^2 - x - 1) \geq 0. \quad \text{Выводимое для всех}$$

~~ker-во~~

Рассмотрим выражение ^{N 4 (продолжение.)} $3x^2 - x - 1$:

$$D = 13$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{6}$$

$$\text{Получаем } (x-1)(2x+1)\left(x - \frac{1+\sqrt{13}}{6}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{13}}{6}\right) \geq 0.$$

Выполнено для всех $x \in (-1; -0,5] \cup \left[\frac{1-\sqrt{13}}{6}; \frac{1+\sqrt{13}}{6}\right] \cup [1; \infty)$

$$\text{Ответ: } (-\infty; -0,5] \cup \left[\frac{1-\sqrt{13}}{6}; \frac{1+\sqrt{13}}{6}\right] \cup [1; \infty)$$

N 5.

Разложим 4000 на множители (простые):

$$4000 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 4$$

Мы можем представить 4000 в виде 8 однозначных множителей в трёх случаях:

$$4000 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4$$

$$4000 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4$$

$$4000 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4$$

Пусть Восьмизначное число из первого набора чисел. Поставим число 1. Двойки можно поставить в двух позициях — справа и слева от 1. Тогда поставить 1 и 2 (тут двойки) можно 8 способами. Следующие пятёрки можно поставить в 5 позиций — между цифрами (цифр 4, 3 позиции) и по краям. Поставить 1, 2 и 5 можно 1000 способами. А 4 можно поставить 8 способами. Сосчитать



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 (продолжение)

число первых наборов - 6000.

Аналогично вторым наборам мы поставим

1 - 1 способом

1 и 2 - 3 способами.

1, 2 и 4. - 12 способами.

1, 2, 4 и 5 - 4500 способами.

1, 2, 4, 5 и 7 - 12000 способами

Всего чисел для 2-х наборов - 20000.

Аналогично третьим наборам:

1 - 1 способом

1 и 8 - 4 способами

1, 8 и 5. - 500 способами.

1, 8, 5 и 7 - 4000 способами.

Всего чисел - 24000.

Ответ: 24000

14.

x не может превышать 5. Иначе

$$|x+y+5| \quad x+y+5 > 10+y$$

$$x-y+5 > 10-y$$

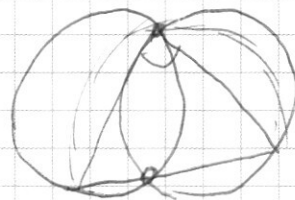
$|10+y+k|$ или $|10-y+k|$ $|10+y+k|$ или $|10-y+k|$ превышают 10 при любом y .

Аналогично y не может быть -15 , иначе

$$x+y+5 < -10+y$$

$$x-y+5 < -10+y$$

$|(-10-k)+y|$ или $|(-10-k)-y|$ превышают 10 при любом y .



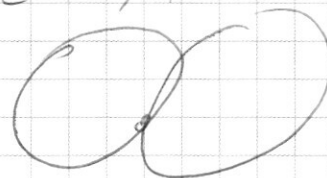
Тогда $x \in [-15; 5]$ ~~$(x-5)^2 \in [0; 1]$~~

Тогда $y \leq \frac{10-2x}{2} = 5-x$.

$$y > x-5.$$

$$(|y|-12)^2 \leq 49 + 14x + x^2 = (x+7)^2$$

$$(|x|-5)^2 = x^2 + 25 - 10|x|$$



$$y < x \quad -15 \leq x+y \leq 5 \quad 5 > x > 0.$$

$$-45 \leq x-y \leq 5 \quad -5 \leq y \leq 5.$$

$$0 \leq x-y \leq 5$$

$$(|x|-5)^2 \leq 25.$$

$$x = |x|$$

$$(|y|-12)^2 \leq 144.$$

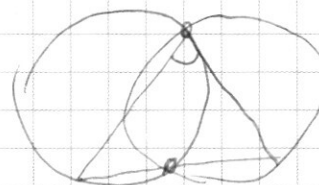
$$x = -10$$

$$y = 5.$$

$$(|x|-5)^2 \in [0; 10].$$

$$169.$$

$$25.$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.

$(|x|-5)^2$, т.е. Пусть $x \in [-10; 10]$

Тогда $(|x|-5)^2$ достигает наибольшего значения (25) при $x = -10$, $x = 0$ и $x = 10$. Пусть $x = 10$.

Тогда один из модулей $|x+y+5|$ или $|x-y+5|$ превысит 10, т.е. их сумма превысит 10, не подходит.

$|y|$ не превышает 5, иначе модульные выражения различались бы ^{более} на ~~на~~ ^{модулей} 10. Но ~~их~~ сумма ^{модулей} тоже была бы больше 10.

$$(|a| + |a+k+10|) = \begin{cases} k+10, & a \leq 0 \text{ и } a+k+10 \geq 0 \\ k+10+2|a|, & \text{оба слагаемых одного знака} \end{cases}$$

Тогда $(|y|-12)^2$ наибольшая при $y = 0$.

Получаем 144. Тогда

$$(|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 \leq 144 + 25 = 169.$$

Достигается при x и y $(-10; 0)$ $(0; 0)$.

Подходят по ОДЗ к первому ур-ию.

$x < -10$, было сказано выше

$x \geq -15$, иначе сумма модулей $|-10-k+y|$ и $|-10-k-y|$ была бы больше 10.

Пусть $x \in [-15; -10)$. ~~$|y|$ не может превышать~~

~~$-10 \rightarrow x$. Тогда $(|y|-12)^2 \leq (3+x)^2$~~

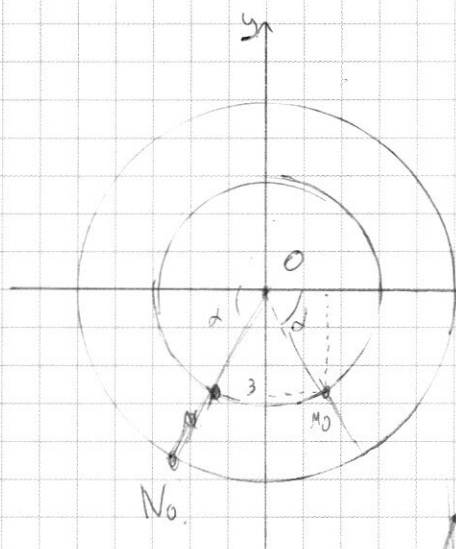
Тогда модуль имеет вид: $|-5-k+y|$ $|-5-k-y|$.

Раскрыв их, мы получим $5+k+y$ и $5+k-y$,
а их сумма - $10+2k$, противоречие.

Единственные значения x и y - $(-10; 0)$ $(0; 0)$

Ответ: $(-10; 0)$ $(0; 0)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$2a - a^2 - 2b$$

a b c d e f g h.

1 222 555 7

11245557

11185557

$$2a - a^2 + ab - 2b - 3ab - 6 = 0$$

$$a^2 - 2a + 2b + 2ab - 6 = 0$$

$$(2-a)(a-b) - (3ab+6) = 0$$

$$\text{fakt } a(a-2) +$$

$$x^3 = (2x+3)(2x-3)$$

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a \\ 3bx + (a-b)y = 1 \end{cases}$$

$$\frac{2a-2b}{3b} = \frac{6}{a-b} = a$$

$$2a - 2b = 3ab$$

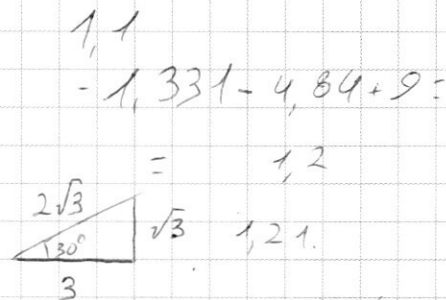
$$2a - 2b - 3a = 0$$

$$2(a-b) - 3ab = 0$$

$$a^2 - ab = 6$$

$$a(a-b)-6=0$$

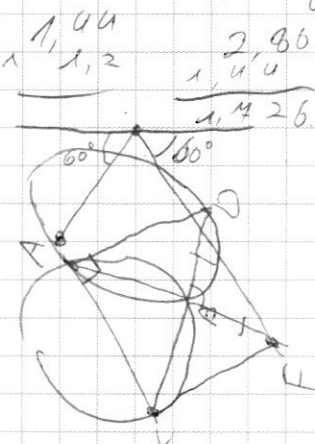
$$a(a-b)-6=0$$



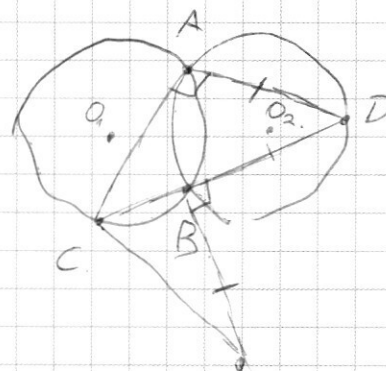
4, 44

5, 46

$$u = \sqrt{r}$$



$$y = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 7$$



2^3
 2^2
 2^1
 2^0

$$\begin{cases} y = \frac{b-a}{3}x + \frac{a}{6} \\ y = \frac{3}{b-a}x + \frac{1}{(a-b)b} \end{cases}$$

$$\frac{(b-a)^2}{9} = \frac{ab(a-b)}{6}$$

$$\begin{cases} 6y = a - 2(a-b)x \\ (a-b)by = 1 - 3bx \end{cases}$$

$$6(a^2 - 2ab + b^2) = (a^2b - b^2a) \cdot 2$$

$$2a^2 - 4ab + 2b^2 = 3a^2b - 3b^2a$$

$$\begin{cases} y = \frac{a}{6} - \frac{a-b}{3}x \\ y = \frac{1}{(a-b)b} - \frac{3}{a-b}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{b-a}{3}x + \frac{a}{6} \\ y = \frac{3}{b-a}x + \frac{1}{(a-b)b} \end{cases}$$

$$b = a + 3 \cdot 9$$

$$\frac{a}{6} = \frac{1}{-3a-9}$$

$$3a^2 + 9a = -6$$

$$a^2 + 3a + 2 = 0$$

$$a^2 + 3a + 2 = 0$$

$$(a+1)(a+2) = 0$$

$$a = -1 \quad 300$$

$$x^3 = (2x-3)/(3x+3)$$

$$4x^2 - x^3 - 9 = 0$$

$$x^3 - 4x^2 + 9 = 0$$

$$-6x + 6y = -1$$

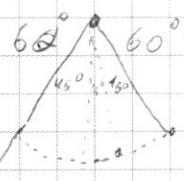
$$6x - 6y = 1$$

$$\left(\frac{3}{x}\right)^2 = 1-x$$

$$\frac{1}{4}x^2(x-1) + 2,25 = 0$$

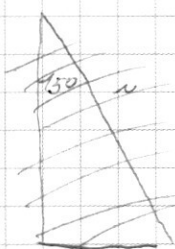
$$x - 1 + \frac{9}{x^2} = 0$$

$$(x-1) + \left(\frac{3}{x}\right)^2 = 0$$

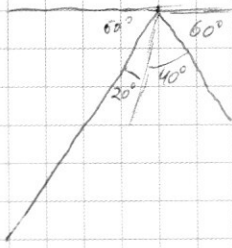


$$\frac{1}{4}x^3 - 4x + \frac{25}{4} = x^2 - 4x + 4$$

$$\frac{1}{4}x^3 - x^2 + 2,25 = 0$$



$$\frac{1}{4}x^3 - x^2 + 2,25 = 0$$

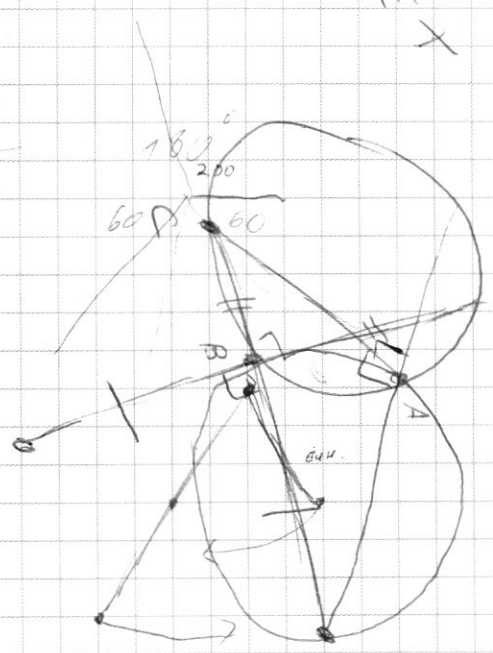


$$\frac{1}{2}\sqrt{x^3 - 16x + 25} = x - 2$$

$$\frac{1}{4}x^3 - 4x + \frac{25}{4} = x^2 - 4x + 4$$

$$x = -5$$

$$x^2 + 3x - 10 = (x+5)(x-2)$$



$$s = h + x$$

$$s = h + x$$

$$s = h + x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^2 = \frac{-9}{x-4}$
 $x^2(x-4) + 9 = 0$
 $x-4 = \frac{9}{x^2}$

$x^3 = (2x-3)/(2x+3)$
 $x \quad x^2$
 $-x^2 \quad -x$
 $(3-2x)/(3+2x)$
 $x^2 \quad -x$
 $2x+3 = -x$
 $x = -1$

$3-4$
 -9
 $3\sqrt[3]{3}$
 $6x^4 + x^2 + 2x$
 $6x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 2x + 1 \geq 0$
 $6x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 2x + 1 > 0$
 $3x^2(2x^2 - 1) + 2.5x(2x^2 - 1) - 0.5x + 1$

$x^3 + 9 =$
 $= (x + \sqrt[3]{9})(x^2 + \sqrt[3]{9}x + 3\sqrt[3]{9}) =$
 $= x^2$
 $x-5 > 6$
 $(3x^2 - 2.5x)(2x^2 - 1)$
 $5 > 6+x$
 $0 \quad 0$
 $5 \quad 12$

1.69×1.69
 0.5×0.4
 1.69
 2.194
 $25 \quad 5 \quad 0.8 = 6$
 $0.8 = |5+6-x|$
 $1.250 = |5+6-x|$
 1.25
 225
 125
 $2+2.5$
 625
 250
 125
 $0 = (1.25 - \sqrt[3]{9})\sqrt[3]{9} + 5(0.4 + x)|x|$
 $0 = |5+6-x| - |x|0.4 - 6 + x$
 $6x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 2x + 1$
 $3x^2(2x^2 - 1) + 2.5x(2x^2 - 1) - 0.5x + 1$

$$6x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 2x + 1$$

$$6x^4 + 5x^3 + 5x^2 =$$

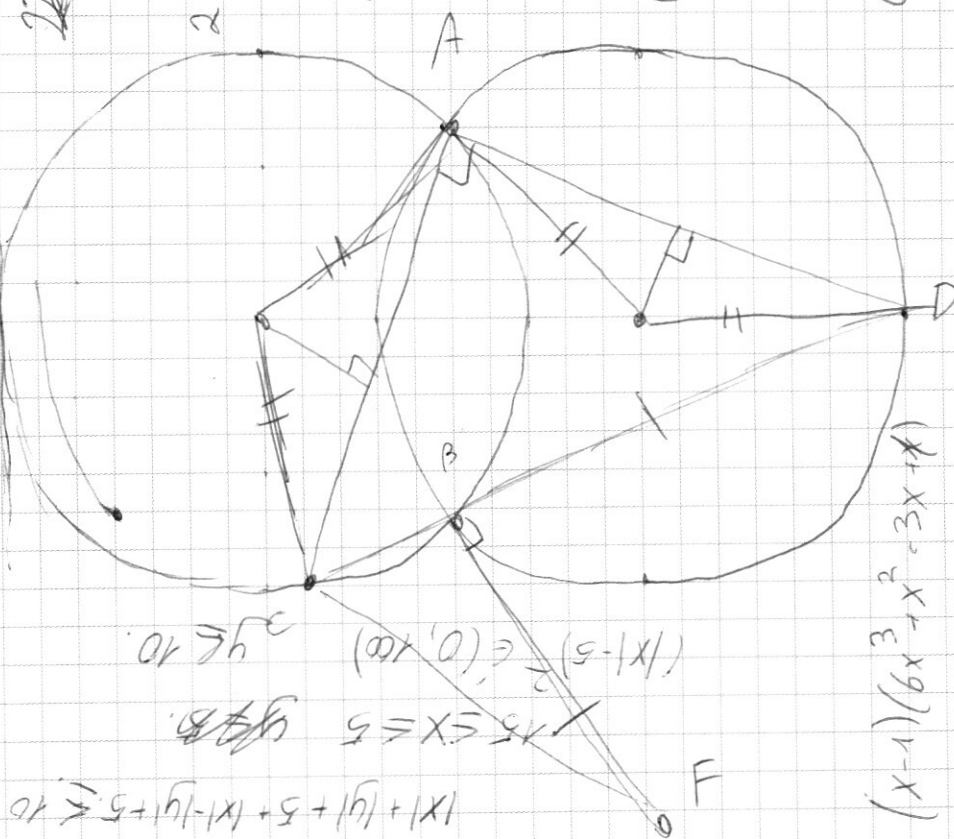
$$= x^2(6x^2 + 5x + 5)$$

2222

22

0,125

0,45 + 0,25



1,5 ≤ x ≤ 5

$$|x| + |y| + 5 + |x-1| + 5 \leq 10$$

$$(|x-5|)^2 \in (0, 100)$$

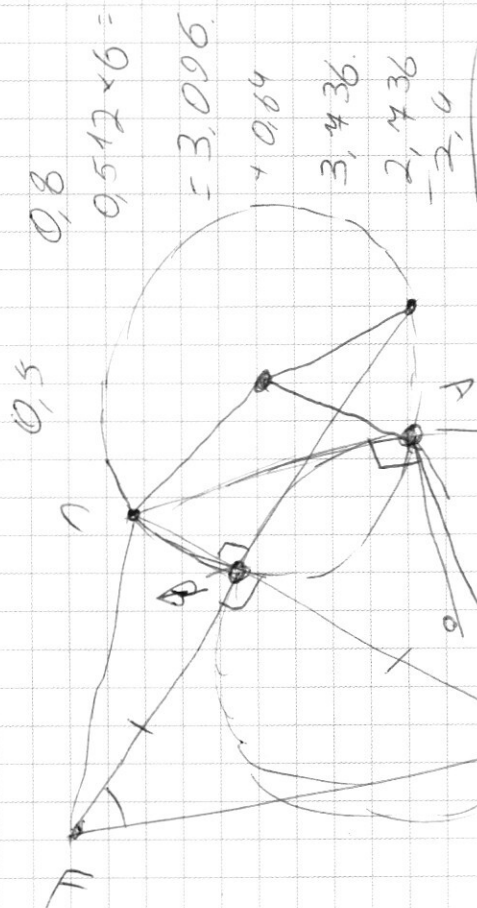
$$3y \leq 10$$

$$(x-1)(6x^3 + x^2 - 3x + 1)$$

$$6 + y - 3y = y^3$$

$$-2 \cdot \frac{1}{2}$$

2122555



0,5

0,8

$$0,512 \times 6 =$$

$$= 3,006$$

$$+ 0,64$$

$$3,436$$

$$2,436$$

$$- 2,4$$

$$27 - 36 + 9 = 0$$

$$x^2(x-4) + 9 = 0$$

$$x - 4$$

$$4 = x = \frac{9}{x+4}$$

$$CF = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$x^2 = \frac{9}{x-4}$$

2222555

