МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0;0)$. Муравей двигается по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0\left(-1;\sqrt{3}\right)$ и $N_0\left(2\sqrt{3};2\right)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b, при каждой из которых система уравнений
$$\begin{cases} 3(a+b)x+12y=a, \\ 4bx+(a+b)by=1 \end{cases}$$
имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10}=x^2+5x+6$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4+x^2-2x-3x^2|x-1|+1\geqslant 0$.

5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD=90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF=BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

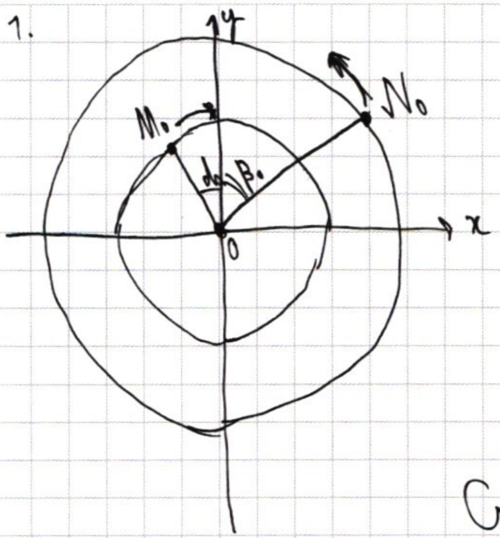
7. [6 баллов] Решите систему
$$\begin{cases} |x-3-y|+|x-3+y|\leqslant 6, \\ (|x|-3)^2+(|y|-4)^2=25. \end{cases}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.



Кратчайшее расстояние будет, если M и N будут лежать на одном луче из точки O.

Из уравнения окружности:

$R_M^2 = (x_M - x_0)^2 + (y_M - y_0)^2 \Rightarrow R_M = \sqrt{1+3} = 2$

$R_N^2 = (x_N - x_0)^2 + (y_N - y_0)^2 \Rightarrow R_N = \sqrt{12+4} = 4$

Скорости равны, а радиусы окружностей муравья и жука относятся как $\frac{R_M}{R_N} = \frac{1}{2}$, $\Rightarrow$ за время t жук пройдёт в 2 раза ~~больший~~ меньший угол, чем муравей. Найдём их изначальные положения на окружности (α_0 и β_0):

$tg\,\alpha_0 = \left|\frac{x_{M_0}}{y_{M_0}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha_0 = 30°$

$tg\,\beta_0 = \left|\frac{x_{N_0}}{y_{M_0}}\right| = \sqrt{3}$ $\quad \beta_0 = 60°$

Из выше сказанного следует, что первая „встреча" будет под углом 30° к OY. $N_1 = (x_{N_1}; y_{N_1}) = (2; 2\sqrt{3})$

Аналогично 2-ая и 3-я „встречи" будут в точках $N_2 = (-4; 0)$ и $N_3 = (2; -2\sqrt{3})$ соответственно. Дальнейшие встречи будут в одной из 3 точек.

Ответ: $(2; 2\sqrt{3})$, $(-4; 0)$, $(2; -2\sqrt{3})$.

2.

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+b)x + 4y = \frac{a}{3} \\ 4x + (a+b)y = \frac{1}{b} \end{cases}$$

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Фраза „бесконечное количество решений" подразумевает $0=0$ (т.е. сокращение x и y). Вычтем из 1-го уравнения 2-е. Тогда:

$$(x-y)(4+a+b) = \frac{a}{3} - \frac{1}{b}$$

$$3b(x-y)(4+a+b) = ab-3$$

$b \neq 0$, т.к. $ab-3$ тогда $\neq 0$. Значит, либо $x=y$, либо $a+b=-4$.

$x=y$:

$$(a+b)x + 4x = \frac{a}{3} = \frac{1}{b}$$

$$\begin{cases} ab=3 \\ a+b=4 \end{cases}$$

$a=1;3$

$b=3;1$

$a+b=-4$:

$$\begin{cases} a+b=-4 \\ ab=3 \end{cases}$$

$a=-1;-3$

$b=-3;-1$

Ответ: 1 и 3 и -1 и -3.

3.

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = (x+3)(x+2)$$

$x \neq -3$, т.к. тогда под корнем отрицательное число.

$$\sqrt{x^3-x+10} = x+2$$

$$x^3-x^2-5x+6=0$$

Заметим, что $x=2$ подходит

$$(x-2)(x^2+x-3)=0$$

$$(x-2)\left(x-\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right)=0$$

$$x=2;\ \frac{-1+\sqrt{13}}{2};\ \frac{-1-\sqrt{13}}{2}.$$

$\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$ не подходит аналогично корню -3.

Ответ: $x=2;\ \frac{\sqrt{13}-1}{2}$.

4.

$$2x^4+x^2-2x-3x^2|x-1|+1 \geq 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x^4-3x^3+4x^2-2x+1 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<1 \\ 2x^4-3x^3-2x^2-2x+1 \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

— заметим, что это выражение всегда ≥ 1, $\Rightarrow x \in [1;+\infty)$

— заметим, что при $x=-1$ и $x=\frac{1}{2}$ выполняется равенство.

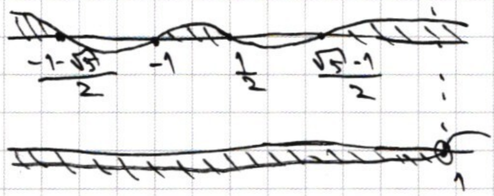
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot 2\left(x^2+x-1\right)\geq 0$

$(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\geq 0$



$x\in\left(-\infty;\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[-1;\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2};1\right)$

Ответ: $x\in\left(-\infty;\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[-1;\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2};+\infty\right)$.

5. Разложим 1400 на простые множители: $1400=7\cdot5^2\cdot2^3$.
Тогда существует лишь 3 возможных наборов чисел:

$7,2,2,2,5,5,1,1$
$7,4,2,5,5,1,1,1$
$7,8,5,5,1,1,1,1$

всего способов: $\frac{8!}{3!\cdot2!\cdot2!}+\frac{8!}{2!\cdot3!}+\frac{8!}{2!\cdot4!}=$
$=7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot2+7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot4+7\cdot6\cdot5\cdot4=7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot(2+4+1)=$
$=49\cdot120=5880$

Ответ: 5880.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

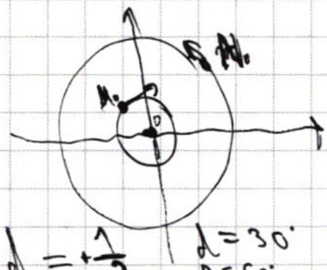
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.



$R^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2$

$R_N = \sqrt{12+4} = 4$

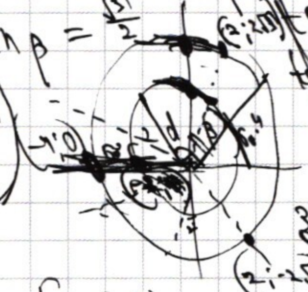
$R_M = \sqrt{1+3} = 2$

$\sin\alpha = \frac{1}{2}$ $\alpha = 30°$

$\sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\beta = 60°$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\operatorname{tg}\beta = \sqrt{3}$



$2; 2\sqrt{3}$
$2; -2\sqrt{3}$
$-4; 0$

$\begin{array}{r} 11{,}5 \\ \times\ 11{,}5 \\ \hline 575 \end{array}$

2.
$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

$4bx + \frac{(ab+b^2)(a-3(a+b)x)}{12} = 1$

$48bx + a^2b - (3ab^2 + 3b^3)x + ab^2 - (3a^2b + 3ab^2)x = 12$

$(48b - 3ab^2 - 3b^3 - 3a^2b - 3ab^2)x = 12 - a^2b - ab^2$

$$\begin{cases} 48b - 3ab^2 - b^3 - 3a^2b - 3ab^2 = 0 \\ 12 - a^2b - ab^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab(a+b) = 12 \\ b^2 + 6ab + 3a^2 = 48 \end{cases} \leftarrow \begin{cases} ab(a+b) = 12 \\ -b^2 - 6ab - 3a^2 + 48 = 0 \end{cases} \quad b \neq 0$$

$2ab + (a+b)(a+3b)$

$\frac{24}{a+b} + (a+b)(a+3b) = 48$

3. $(x+3)\sqrt{x^3 - x + 10} = (x+3)(x+2)$ $x \neq -3$

$$\begin{cases} x^3 - x + 10 = x^2 + 4x + 4 \\ x^3 - x + 10 \geq 0 \end{cases}$$

$x^3 - x^2 - 5x + 6 = 0$

$x = 2$ $x^2 + x - 3 = 0$ $D = 13$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$

$x^3 - x^2 - 5x + 6 \,|\, x-2$
$x^3 - 2x^2 \quad | \; x^2 + x - 3$
$x^2 - 5x$
$x^2 - 2x$
$-3x + 6$

$\sqrt{13} \approx 3{,}6$

$x = \dots$

$\Downarrow$

3. $\boxed{x = 2;\ \frac{\sqrt{13} - 1}{2}}$

4.
$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$x \in [1; \infty)$

$$\begin{cases} x < 1 \\ 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$(x+1)(2x^3 + x^2 - 3x + 1) \geq 0$

$-\,2x^3 + x^2 - 3x + 1 \,|\, x - \frac{1}{2}$
$2x^3 - x^2 \quad | \; 2x^2 + 2x - 2$
$2x^2 - 3x$
$-2x + 1$

$-\,2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \,|\, x+1$
$2x^4 + 2x^3 \quad | \; 2x^3 + x^2 - 3x + 1$
$x^3 - 2x^2$
$-3x^2 - 2x$
$-3x^2 - 3x$

$\begin{array}{r} 49 \\ \times\ 12 \\ \hline 98 \\ 49 \\ \hline 588 \end{array}$

5. $1400 = 10^2 \cdot 2 \cdot 7 = 7 \cdot 2^3 \cdot 5^2$

$7, 2, 2, 2, 5, 5, 1, 1$

$7, 4, 2, 5, 5, 1, 1, 1$

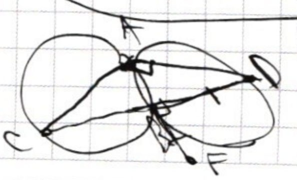
$7, 8, 5, 5, 1, 1, 1, 1$

$\frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{7!}{3!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 =$

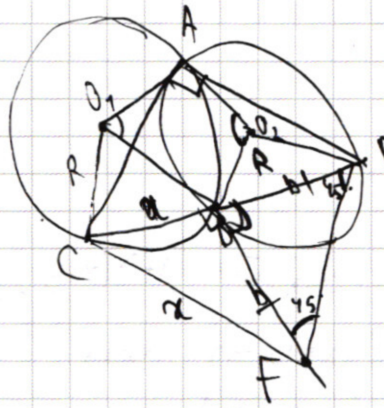
$\frac{8!}{2! \cdot 3!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2 =$

$\frac{8!}{2! \cdot 4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \quad + \quad = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4(2 + 4 + 1) = 49 \cdot 120 = \boxed{5880}$ 5.

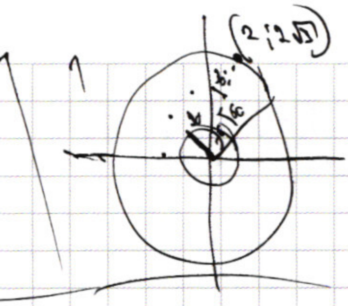
6.



6.

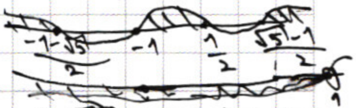


$$\begin{cases} AC^2 + AD^2 = (a+b)^2 \\ a^2 + b^2 = x^2 \end{cases}$$



4. … $(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot 2\left(x^2+x-1\right) \geq 0$

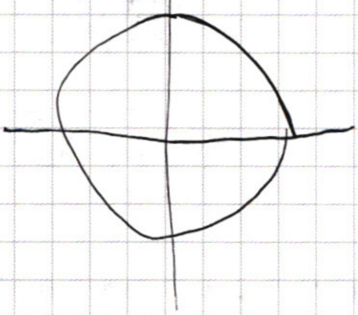
$(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \geq 0$

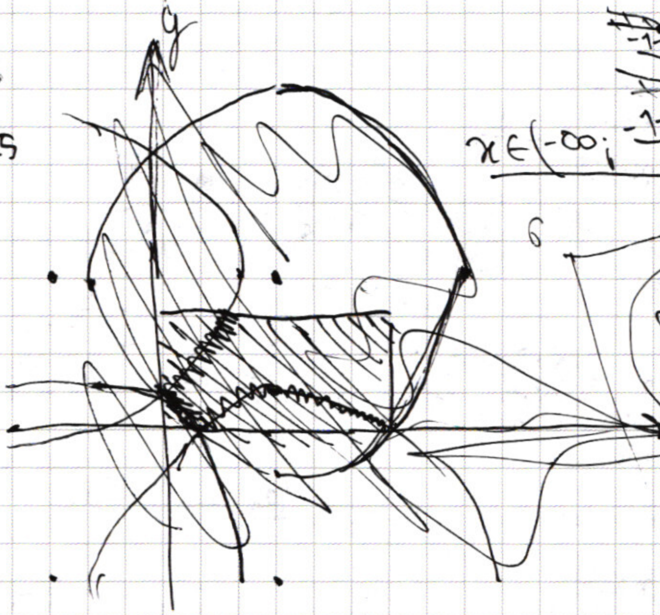


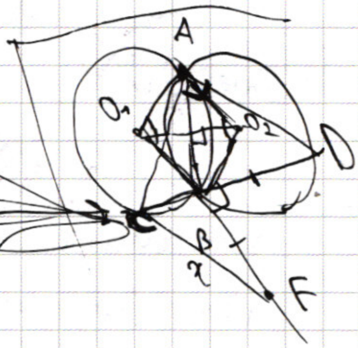
$x \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[-1; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \infty\right)$

7. $\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6 \\ \left((|x|-3)\right)^2 + \left((|y|-4)\right)^2 = 25 \end{cases}$

$(|x|)^2 + (|y|)^2 = 25$







при $y = 0$

$0 \leq x \leq 6$

при $y = 1$

$0 \leq x \leq 6$

$|x-2| + |x-4| \leq 6$

$x \geq 4$

$2x \leq 12$

$0 < x \leq 6$

$2 \leq x < 4$

$x < 2$

$-2x + 6 \leq 6$

$|x-(3+y)| + |x-(3-y)| \leq 6$

$x \geq 3+y$

$2x \leq \underbrace{6+6}_{12} + \cancel{y} \quad x \leq 6$

$3-y \leq x < 3+y$

$3+y-x+x-3+y \leq 6$

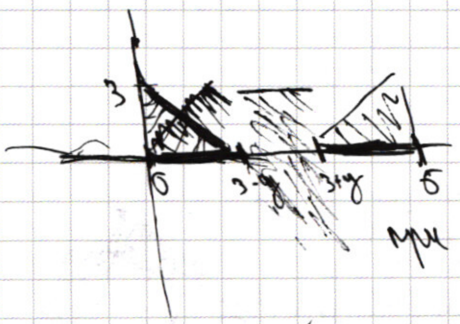
$2y \leq 6 \quad y \leq 3$

$x < 3-y$

$3+y-x+3-y-x \leq 6$

$-2x \leq 0$

$x \geq 0$



при $x \geq 3+y$ $x < 3-y$:

$x \leq 6 \quad x \geq 0 \quad$ y любой $\quad x \geq 0$

иначе $\quad$ x любой $\quad$ $y \leq 3$

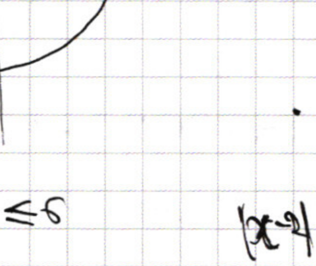
$3-y \leq x < 3+y$

$3 \leq x < 3$

$0 \leq x < 6$

$y = 0$

$y = 3$



2. $\begin{cases} 3(a+b)x + 12\cdot y = a \\ 4b\cdot x + (a+b)\cdot by = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} (a+b)x + 4y = \frac{a}{3} \\ 4x + (a+b)y = \frac{1}{b} \end{cases}$

$\begin{cases} a = 1; 3 \\ b = 3; 1 \end{cases}$

1-2: $(x-y)(y+a+b) = \frac{ab-3}{3b}$

$3b(x-y)(y+a+b) = ab-3$

$= 0$

$\begin{cases} ab = 3 \\ -4 = a+b \end{cases}$

$a^2 + 4a + 3 = 0$

$\begin{cases} a = -1; -3 \\ b = -3; -1 \end{cases}$

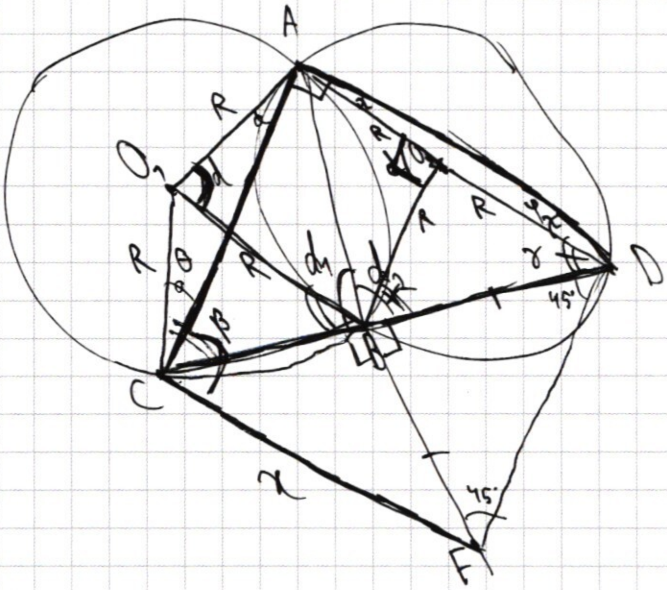
☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

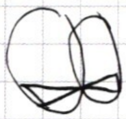
Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$$\begin{cases} AC^2 + AD^2 = (a+b)^2 \\ a^2 + b^2 = x^2 \end{cases}$$

$AB = R\sqrt{2}$

$$\begin{cases} AC^2 = 2R^2 + a^2 \\ 2AC^2 = (a+b)^2 \\ a^2 + b^2 = x^2 \end{cases}$$

$AC = AD$

$4R^2 + 2a^2 = x^2 + 2ab$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)