

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

- ✓1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Муравей движется по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0(-1; \sqrt{3})$ и $N_0(2\sqrt{3}; 2)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

- ✓2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a, \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

- ✓3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$.

- ✓5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

- ✓6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

- ✓7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6, \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Найдем R_1 (радиус ок-и, по которой намотан муфта)

$$R_1 = \sqrt{(-1-0)^2 + (\sqrt{3}-0)^2} = \sqrt{4} = 2$$

Найдем R_2 (радиус ок-и, по которой намотан шкив)

$$R_2 = \sqrt{(2\sqrt{3}-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{16} = 4$$

Построим систему координат:

ω - угловая скорость

v - линейная скорость

R - радиус ок-и.

$$\omega = \frac{v}{R}$$

$$R_2 = 2R_1$$

$$\omega_1 = \frac{v}{R_1}$$

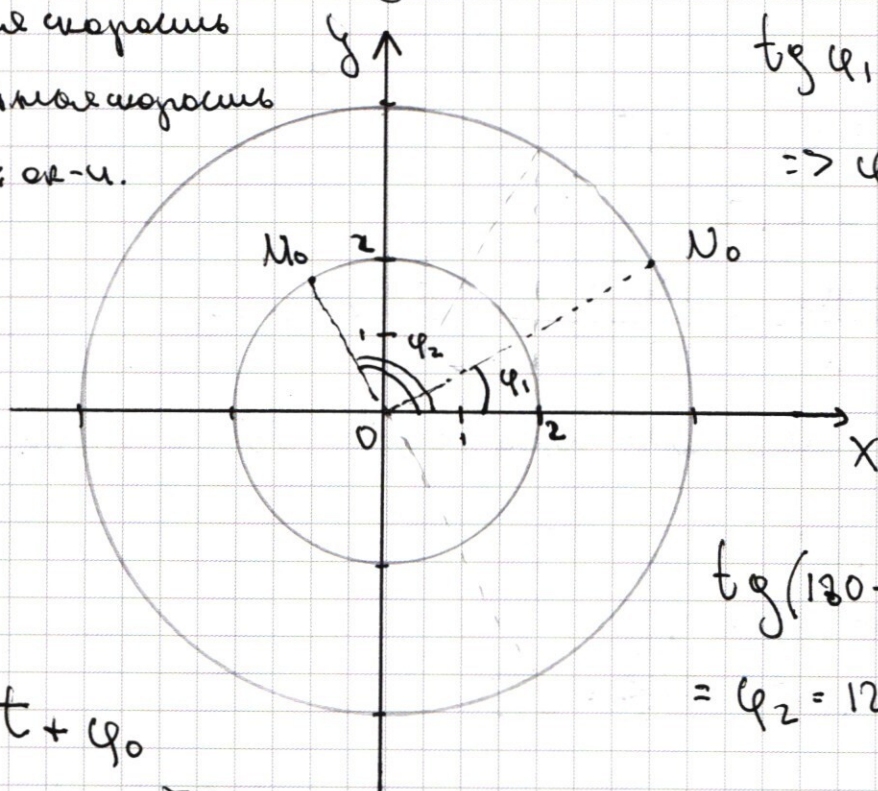
$$\omega_2 = \frac{v}{2R_1}$$

$$\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$$

φ_0 - начальный угол между радиусом, проведенным в точку старта цепи и положительным напр. Ох.

$$\tan \varphi_1 = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_1 = 30^\circ$$



$$\tan(180 - \varphi_2) = \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$= \varphi_2 = 120^\circ$$

Я перехожу в систему отсчёта, связанную с углом поворота тела.

За III-к. имеем предположим только координаты тела, в моменты когда расстояние между ними минимально, то пусть $\omega = \frac{1^\circ}{c} = \omega_1$

Очевидно, что расстояние будет минимальным, когда $\varphi_M = \varphi_N$, где φ_M - угол муравья, а φ_N - угол жука, а также углы между радиусами проведенными в точку на периметре и положительным направлением Ох.

$$\begin{cases} \varphi_M = \varphi_2 - \omega_1 t \\ \varphi_N = \varphi_1 + \omega_2 t = \varphi_1 + 2\omega_1 t \end{cases} \quad \omega_1 = 2\omega_2$$

$$\varphi_M = \varphi_N \quad t - \text{время}$$

$$\varphi_2 - \omega_1 t = \varphi_1 + 2\omega_1 t$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 3\omega_1 t$$

$$t = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{3\omega_1} = \frac{120^\circ - 30^\circ}{3 \cdot 1^\circ} = \frac{90}{3} = 30 \text{ (с)}$$

За 30 с муравей пройдет 60° , а жук $30^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varphi_N = 60^\circ$$

$$x_1 = 4 \cdot \cos 60^\circ = 2$$

$$y_1 = 4 \cdot \sin 60^\circ = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Период между ними 360° . $360^\circ = 3\omega_1 t \Rightarrow t = 120 \text{ (с)}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

За это время мы пройдем $120^\circ \Rightarrow$

$$x_2 = -4$$

$$y_2 = 0$$

После повторения анимации, когда между нами $360^\circ \Rightarrow$ надо опять пройти 120°

$$x_3 = 2$$

$$y_3 = -2\sqrt{3}$$

Эта анимация с расстоянием в 360° будет тем же повторением бесконечно и мы сможем лишь по-прежнему задать координаты точек.

$$\begin{aligned} x_4 = 2 = x_1 \\ y_4 = 2\sqrt{3} = y_1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \text{новые координаты не нужны.}$$

Ответ: $(2; 2\sqrt{3}), (-4; 0), (2; -2\sqrt{3})$

№2

Если система ур-ий имеет ∞ решений, то $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ эти решения не зависят от переменных,
в данном случае x и y . А раз не зависят, то
они и не нужны, подставим вместо них единицы.

$$\begin{cases} 3(a+b) + 12 = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4b + (a+b)b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a + 3b + 12 = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4b + ab + b^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a = -3b - 12 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}b - 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2 + (4+a)b - 1 = 0 \end{cases}$$

$$b^2 + \left(4 - 6 - \frac{3}{2}b\right)b - 1 = 0$$

$$b^2 - 2b - \frac{3}{2}b^2 - 1 = 0$$

$$-\frac{1}{2}b^2 - 2b - 1 = 0$$

$$b^2 + 4b + 2 = 0$$

$$D = 16 - 8 = 8$$

$$b_1 = \frac{-4 + \sqrt{8}}{2}$$

$$b_2 = \frac{-4 - \sqrt{8}}{2}$$

$$b_1 = -2 + \sqrt{2}$$

$$b_2 = -2 - \sqrt{2}$$

$$a_1 = \frac{(2 - \sqrt{2})3}{2} - 6 \quad a_2 = \frac{3(2 + \sqrt{2})}{2} - 6$$

Ответ:

$$a_1 = \frac{3(2 - \sqrt{2})}{2} - 6 \quad a_2 = \frac{3(2 + \sqrt{2})}{2} - 6$$

$$b_1 = \sqrt{2} - 2$$

$$b_2 = -2 - \sqrt{2}$$

№3

$$(x+3) \sqrt{x^3 - x + 10} = x^2 + 5x + 6$$

$$(x+3) \sqrt{x^3 - x + 10} = (x+3)(x+2)$$

$$x_1 = -3$$

$$\sqrt{x^3 - x + 10} = (x+2)^2$$

$$x^3 - x + 10 = x^2 + 4x + 4$$

$$x^3 - x^2 - 5x + 6 = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Проверим 2:

$$2^3 - 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 8 - 4 - 10 + 6 = 14 - 14 = 0 \Rightarrow x_2 = 2$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - 5x + 6 & x - 2 \\ -x^3 + 2x^2 & \\ \hline x^2 - 5x & \\ -x^2 + 2x & \\ \hline -3x + 6 & \\ -(-3x + 6) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$(x^2 + x - 3)(x - 2) = x^3 - x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x^2 + x - 3 = 0$$

$$D = 1 + 12 = 13$$

$$x_3 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$x_4 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$$

Ответ: $x_1 = -3$ $x_2 = 2$ $x_3 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$ $x_4 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$

Разделим 1400 на простые множители

$$\begin{array}{r|l} 1400 & 2 \\ 700 & 2 \\ 350 & 2 \\ 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

8 5 5 4 1 1 1

$$22255711 : h_1 = \frac{8!}{3!2!2!}$$

42552111: $n_2 = \frac{8!}{2!3!}$

$$85571111: n_3 = \frac{8!}{2!4!}$$

$$h = n_1 + n_2 + n_3 = \frac{8!}{3!2!2!} + \frac{8!}{3!2!} + \frac{8!}{2!4!} = 1680 + 3360 + 840 =$$

$$= 5880$$

Dublin: 5880

N 6

CF-?

$$R = 9$$

$$2 \angle CAD = 90^\circ$$

И-мочка

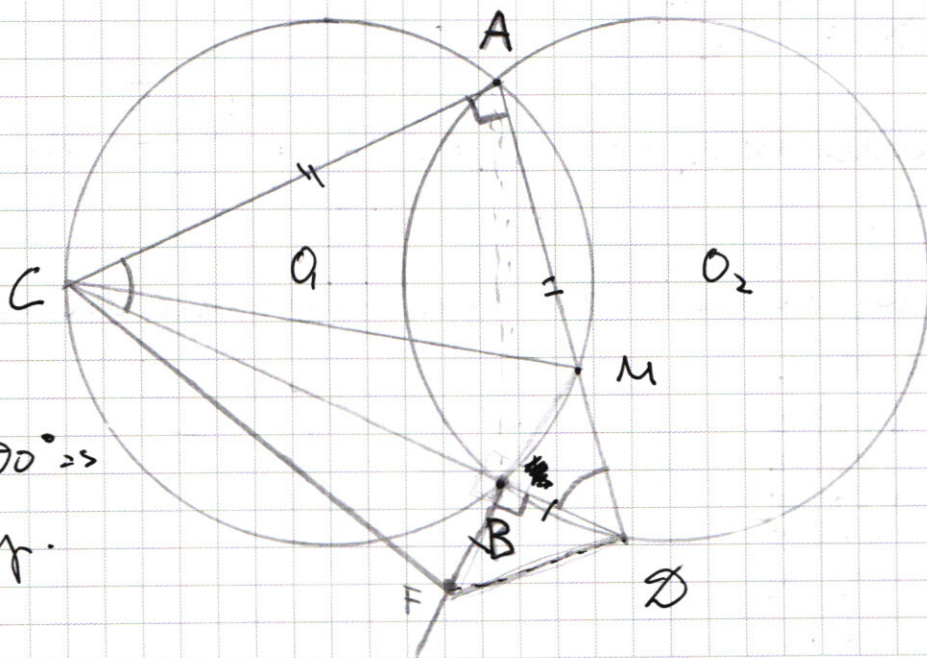
перелечивание

AD u ok-mu 0,.

$$\angle CAM = \angle CAD = 90^\circ \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ CH-quantum.

р-и з СВМ:



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\angle CBM$ опирается на диаметр и является
впис. углом $\Rightarrow \angle CBM = 90^\circ$

$\angle DCA$ опир. на хорду AB , как и $\angle ADC$, а т.к.
хорда AB стягивает равные дуги, то $\angle ADC =$
 $= \angle DCA$.

$\triangle CAD$ - н/у и $r/\delta \Rightarrow \angle DCA = \angle ADC = 45^\circ$
 $\triangle FBD$ - н/у и $r/\delta \Rightarrow \angle BDF = 45^\circ$

$\Rightarrow \angle FDM = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$

Т.к. $\triangle FBD$ и $\triangle DMB$:

$\angle MBD = 90^\circ$

$\angle FBD = 90^\circ$

BD - общ.

$\angle MDB = \angle FDB = 45^\circ$

$\Rightarrow \triangle FBD = \triangle DMB \Rightarrow MB = BF$

Т.к. $\triangle CMF$:

CB - вых. и медиана $\Rightarrow \triangle CMF$ - $r/\delta \Rightarrow CM = CF$

$CM = 2R = CF$

$CF = 2 \cdot 9 = 18$

Ответ: $CF = 18$

№ 2

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6 \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25 \end{cases}$$

Начиная с ур-ва:

$$(|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25$$

1) $x \geq 0 \quad y \geq 0$

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$$

3) $x < 0 \quad y \geq 0$

$$(x+3)^2 + (y-4)^2 = 25$$

2) $x \geq 0 \quad y < 0$

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$$

4) $x < 0 \quad y < 0$

$$(x+3)^2 + (y+4)^2 = 25$$

Теперь неравенство:

$$|x-y-3| + |x+y-3| \leq 6$$

1) $x-y \geq 3 \quad x+y \geq 3$

$$x-y-3 + x+y-3 \leq 6$$

$$2x - 6 \leq 6$$

$$2x \leq 12$$

$$x \leq 6$$

2) $x-y \geq 3 \quad x+y < 3$

$$x-y-3 - (x+y-3) \leq 6$$

$$-2y \leq 6$$

$$y \geq -3$$

$$y \geq -6$$

3) $x-y < 3 \quad x+y \geq 3$

$$-x+y+3 + x+y-3 \leq 6$$

$$2y \leq 6$$

$$y \leq 3$$

4) $x-y < 3 \quad x+y < 3$

$$y-x+3 - (x+y-3) \leq 6$$

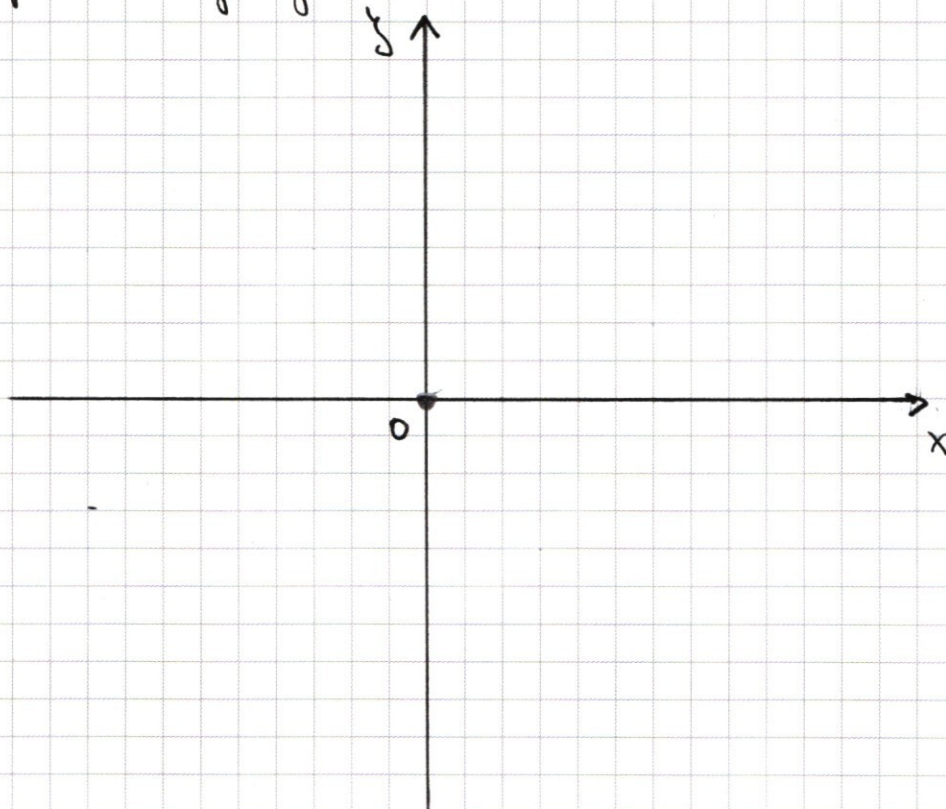
$$-2x + 6 \leq 6$$

$$-2x \leq 0$$

$$x \geq 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Проверить график:



Из графика ур-ия, которому принадлежит
лишь точка $(0; 0)$ видно, что принадле
лишь одна точка. Проверим её в неравенстве

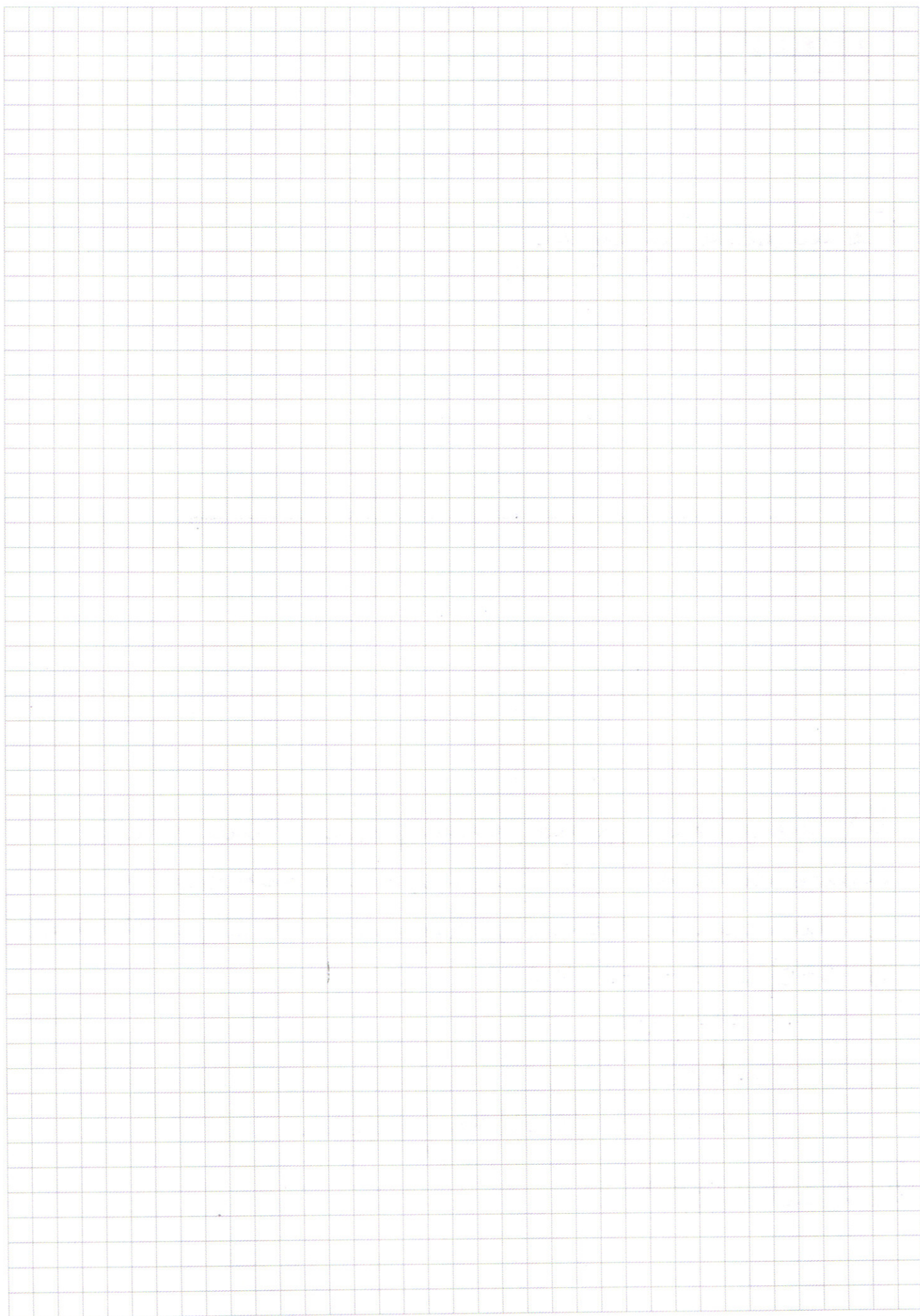
$$|0 - 3 - 0| + |0 - 3 + 0| \leq 6$$

$$|-3| + |-3| \leq 6$$

$$3 + 3 \leq 6$$

$$6 = 6 \Rightarrow (0; 0) \text{ принадлежит}$$

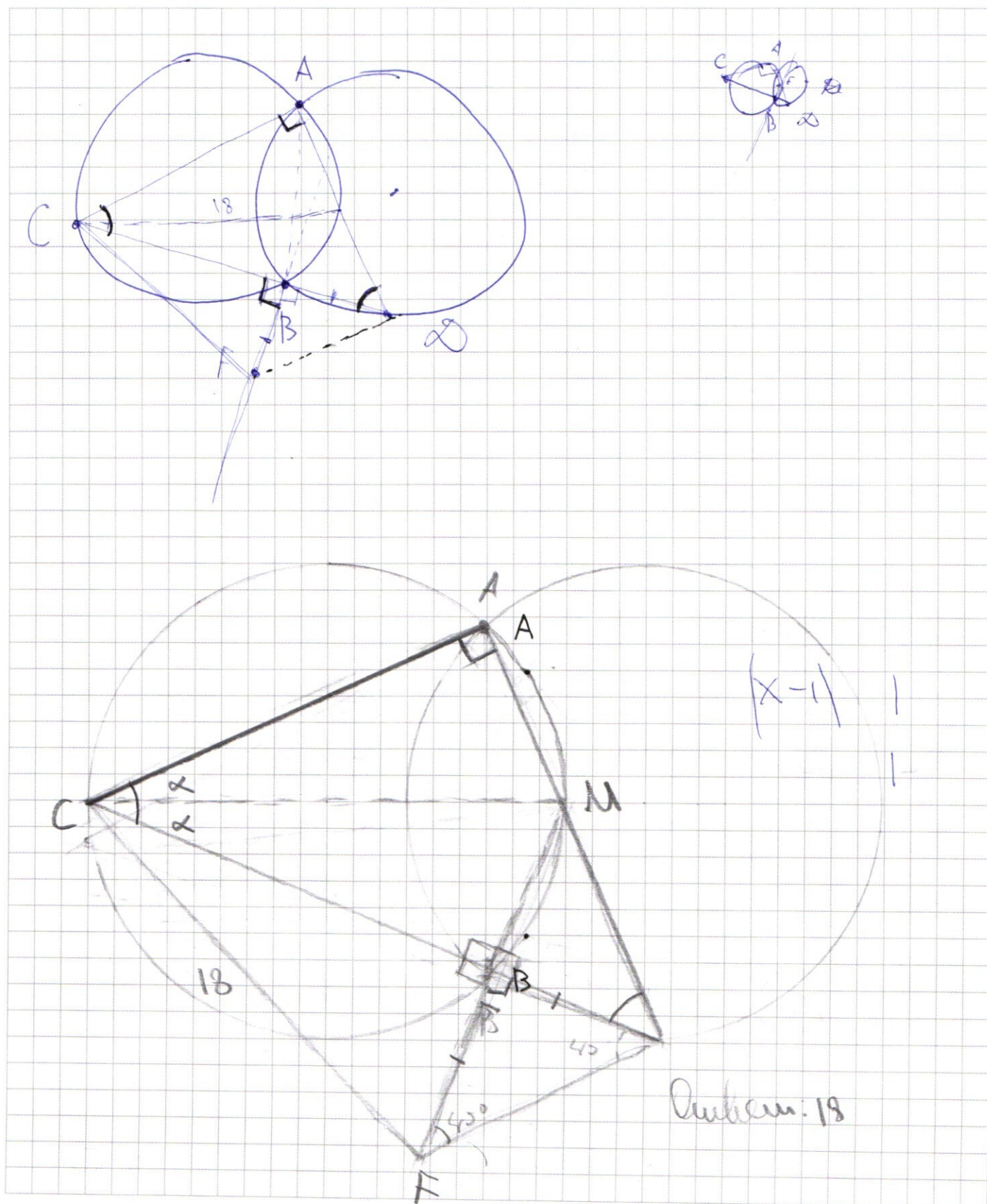
Ответ: $(0; 0)$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



1400	2
200	2
350	2
175	5
35	5
7	7
1	

2 2 2 5 5 7 11 11

2 2 2 5 5 7

2 2 2 5 5 7

$$\frac{8!}{3! 2! 2! 2!}$$

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}$$

$$5 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 4 = 20 \cdot 42 = 840.$$

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a \\ (4b + (a+b)b)y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(a+b) + 12y = a \\ 4b + (a+b)b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a + 3b + 12 = a \\ 4b + ab + b^2 = 1 \end{cases} \quad 2a = -12 - 3b \quad a = -6 - \frac{3}{2}b$$

$$4b + (6 + \frac{3}{2}b)b + b^2 = 1$$

$$4b - 6b - \frac{3}{2}b^2 + b^2 = 1$$

$$-2b - \frac{1}{2}b^2 = 1$$

$$\frac{1}{2}b^2 + 2b + 1 = 0$$

$$b^2 + 4b + 2 = 0$$

$$D = 16 - 8 = 8$$

$$b_1 = \frac{-4 + \sqrt{8}}{2}$$

$$b_2 = \frac{-4 - \sqrt{8}}{2}$$

$$b_1 = \sqrt{2} - 2$$

$$b_2 = -\sqrt{2} - 2$$

$$b_1 = \sqrt{2}(1 - \sqrt{2}) \quad b_2 = -\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})$$

$$a_1 = -6 - \frac{3\sqrt{2}(1 - \sqrt{2})}{2}$$

$$a_2 = -6 + \frac{3\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(|x| - 3)^2 + (|y| - 4)^2 = 25$$

$$x \geq 0 \quad y \geq 0$$

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$$

$$x \geq 0 \quad y < 0$$

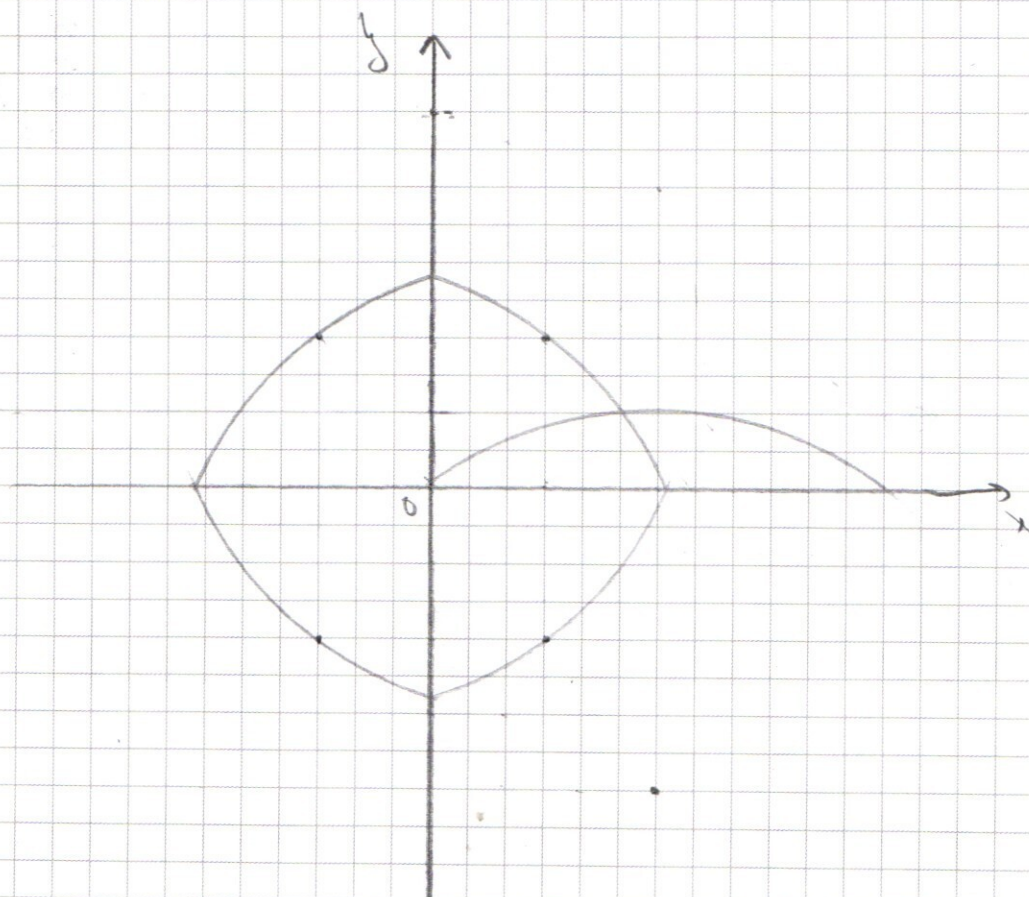
$$(x - 3)^2 + (-y - 4)^2 = 25$$

$$x < 0 \quad y \geq 0$$

$$(-x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$$

$$x < 0 \quad y < 0$$

$$(-x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$$



$$|x-3-y| + |x-3+y| \leq 6$$

$$|x-y-3| + |x+y-3| \leq 6$$

$$4 + 4$$

$$(0; 0)$$

$$x-y \geq 3 \quad x+y \geq 3$$

$$x-y-3+x+y-3 \leq 6$$

$$2x-6 \leq 6$$

$$2x \leq 12$$

$$x \leq 6$$

$$x-y \geq 3 \quad x+y \geq 3$$

$$x-y-3-x-y-3 \leq 6$$

$$-2y-6 \leq 6$$

$$y \geq -6$$

$$\begin{cases} x+y \geq 3 \\ x-y \geq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3-y \\ x \geq 3+y \end{cases}$$

$$x-y \leq 3 \quad x+y \leq 3$$

$$y-x-3+x-y-3 \leq 6$$

$$-2x-6 \leq 6$$

$$-2x \leq 12$$

$$-x \leq 6$$

$$x \geq -6$$

$$\begin{array}{r} 3360 \\ -680 \\ \hline 2680 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28456782 \\ \times 7.7.7 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28456782 \\ \times 2223 \\ \hline \end{array}$$

$$20.42$$

$$2845678$$

$$4.5-6.4.2$$

$$5.6.4.9.5$$

$$20.42.2 = 2078$$

$$30.06$$

$$0891 = 815051$$

$$15018 = 1680$$

$$\varphi(t) = \omega t$$

$$\frac{v}{R} =$$

$$\varphi_1 + \frac{v}{R}t = \varphi_2 = \frac{v}{2R}t$$

$$\omega = 1 \frac{\text{rad}}{c}$$

$$\omega = 1 \frac{0}{c}$$

$$\omega_m = \frac{v}{R} \quad \omega_m = \frac{v}{2R}$$

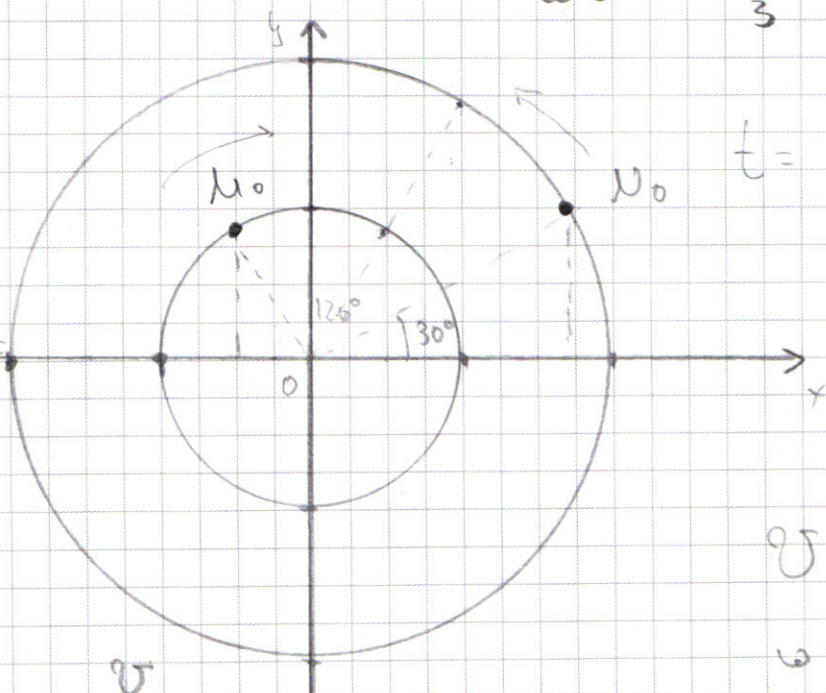
$$\varphi_1 - \varphi_2 = 3\omega t$$

$$\varphi_1 + \omega t = \varphi_2$$

$$\varphi_1 - 2\omega t = \varphi_2 + \omega t$$

$$\omega t = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{3} \sqrt{3} \quad 120$$

$$t = \omega \omega_{\text{ang}} = 30^\circ$$



$$v = \omega R$$

$$\omega = \frac{v}{R}$$

$$\frac{v}{R}$$

$$\begin{array}{r} 3360 \\ -1680 \\ \hline 1680 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2 | x-1 | + 1 \geq 0$$

$$x \geq 1$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2(x-1) + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^3 + 3x^2 + 1 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$2x(x^3 - 1) - 3x^2(x-1) + x^2 + 1 \geq 0$$

$$2x(x-1)(x^2+x+1) - 3x^2(x-1) + x^2 + 1 \geq 0$$

$$(x-1)(2x(x^2+x+1) - 3x^2) + x^2 + 1 \geq 0$$

$$(x-1)(2x^3 + 2x^2 + 2x - 3x^2) + x^2 + 1 \geq 0$$

$$(x-1)(2x^3 - x^2 + 2x) + x^2 + 1 \geq 0$$

$$x(x-1)(2x^2 - x + 2) + x^2 + 1 \geq 0$$

$$2x^2 - x + 2 \geq 0$$

$$D = 1 - 16 = -15$$

$$x_0 = \frac{1}{4}$$

$$y_0 = 2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} + 2 = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + 2 = 1\frac{3}{4} \quad \text{при } x \geq 1 \text{ подходит.}$$

$$x < 1$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2(1-x) + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2 + 3x^3 + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + 2x^3 + x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$2x^2(x^2-1) + 2x(x^2-1) + x^3 + 1 \geq 0$$

$$2(x^2-1)(x^2+x) + x^3 + 1 \geq 0$$

$$2x(x^2-1)(x+1) + x^3 + 1 \geq 0$$

$$x(2(x^2-1)(x+1) + x^2) + 1 \geq 0$$

$$x(2(x+1)(x-1)(x+1) + x^2) + 1 \geq 0$$

$$x(2(x+1)^2(x-1) + x^2) + 1 \geq 0$$

$$x(2(x^2+2x+1)(x-1)+x^2)+1 \geq 0$$

$$x(2(x^3-x^2+2x^2-2x+x-1+x^2))+1 \geq 0$$

$$x(2(x^3+2x^2-2x+x-1))+1 \geq 0$$

$$2x(x^3+2x^2-2x+x-1)+1 \geq 0$$

$$2x^4+4x^3+4x^2+2x^2-2x+1 \geq 0$$

$$2x(x(x^2+2x-2)-1)+1 \geq 0$$

$$2x(x^3+2x^2-x-1)+1 \geq 0$$

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$$

$$\sqrt{x^3-x+10} = \frac{x^2+5x+6}{x+3}$$

$$\sqrt{x^3-x+10} = \frac{(x+3)(x+2)}{(x+3)}$$

$$\sqrt{x^3-x+10} = x+2$$

$$x^3-x+10 = x^2+4x+4$$

$$x^3-x^2-5x+6=0$$

$$x^2-x-5+\frac{6}{x}=0$$

$$\cancel{x^3-x^2-3x+2x+6=0}$$

$$x^3-x(x+2)-3(x-2)$$

$$1-\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{6}{x^3}=0$$

$$\frac{x+6}{x^3} - \frac{x+5}{x^2} = 0$$

$$x^5+6x^2 = x^4+5x^3$$

$$x^5-x^4-5x^3+6x^2=0$$

(-3) - корень

$$D=1$$

$$x_1 = \frac{-5+1}{2} = -2$$

$$x_2 = -3$$

$$\frac{x^3+6}{x} = x+5$$

$$8-4-10+6=0$$

$$\begin{array}{r|l} x^3-x^2-3x+6 & x-2 \\ -(x^3-2x^2) & \\ \hline & x^2-x-3 \end{array}$$

$$x^2-5x$$

$$-x^2-2x$$

$$-3x+6$$

$$-(-3x+6)$$

$$0$$

$$(x-2)(x^2+x-3)=0$$

$$D=1+12=13$$

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$$

$$x_3=2, x_4=-3$$