

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Муравей движется по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0(-1; \sqrt{3})$ и $N_0(2\sqrt{3}; 2)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

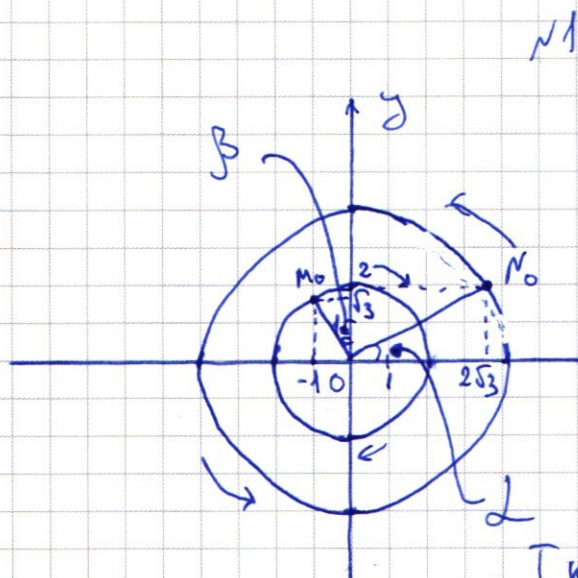
$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a, \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6, \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

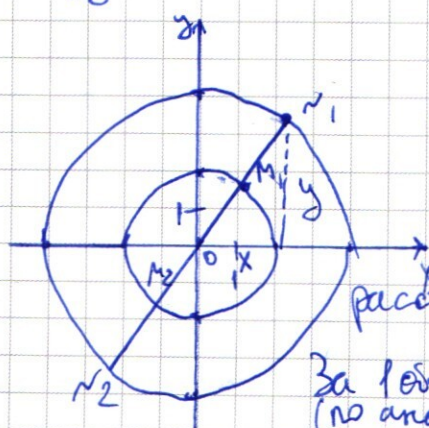


По Теореме Пифагора, тук пази́т
по окружности радиусом 4, муравей
по окружности радиусом 2.

Замечу, что $\tan \alpha = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \alpha = 30^\circ$. $\tan \beta = \frac{1-1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \beta = 30^\circ$.

Т.к. скорости муравья и тучи одинаковы,

но радиусы отличаются в 2 раза, то угловая скорость муравья
больше в 2 раза. Чтобы расстояние между тучей и муравьем
было кратчайшим, надо, чтобы туча, муравей и кусочек сахара
лежали на одной прямой (в одной четверти). Угол, образованный
касательными полог. тучи и муравья и кусочком сахара равен
 90° . (кусоч сахара - вершина). Т.к. угловые скорости отличаются в 2
раза, то туча пройдет до вершины 30° , а муравей 60° . Тогда, угол
между N_1 и $Ox = 60^\circ$. $\tan 60^\circ = \sqrt{3} = \frac{y}{x}$. По Т. Пифагора: $x^2 + y^2 = 16$



$$\begin{cases} \frac{y}{x} = \sqrt{3} \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x\sqrt{3} \\ x^2 + 3x^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \\ y = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Тогда: $x = 2$; $y = 2\sqrt{3}$. Далее, кратчайшим
расстоянием между ними будет отрезок M_2N_2 (

За 1 оборот муравья, туча совершит 1/2 оборота) $N_2(-2; -2\sqrt{3})$
(по аналогичн. рассужд.)
Ответ: $(2; 2\sqrt{3}); (-2; -2\sqrt{3})$

№2

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a \\ 4bx + (a+b)y = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечное кол-во решений. аиb-?
Оба уравнения - уравнения прямых. Чтобы

система имела бесконечно много решений, надо, чтобы эти
прямые совпали. $\Rightarrow$ Все коэффициенты при x и y должны
быть равны.

$$\begin{cases} 3(a+b) = 4b \\ 12 = (a+b)b \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(b+1) = 4b \\ 12 = (b+1)b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3b+3=4b \\ b^2+b-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow b=3$$

Тогда $a=1; b=3$

Ответ: $a=1; b=3$.

№3

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6 \quad \begin{cases} x=-3 \\ \sqrt{x^3-x+10} = x+2 \end{cases}$$

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = (x+2)(x+3) \Leftrightarrow \sqrt{x^3-x+10} = x+2$$

$$x^3-x+10 = (x+2)^2$$

$$x^3-x+10 = x^2+4x+4$$

$$x^3-x^2-5x+6=0$$

$x^3 = (x+6)(x-1)$. Попробем найти $x=2$. Тогда по Т. Безу:

$$\begin{array}{r|l} x^3-x^2-5x+6 & x-2 \\ \hline -x^3+2x^2 & x^2-x-3 \\ \hline x^2-5x & x^2-x-3 \\ -x^2+2x & -3x+6 \\ \hline -3x+6 & -3x+6 \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$x^3-x^2-5x+6 = (x-2)(x^2+x-3)$$

$$x^2+x-3=0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Итак: $x=-3; x=2; x=\frac{-1+\sqrt{13}}{2};$

$$x = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$$

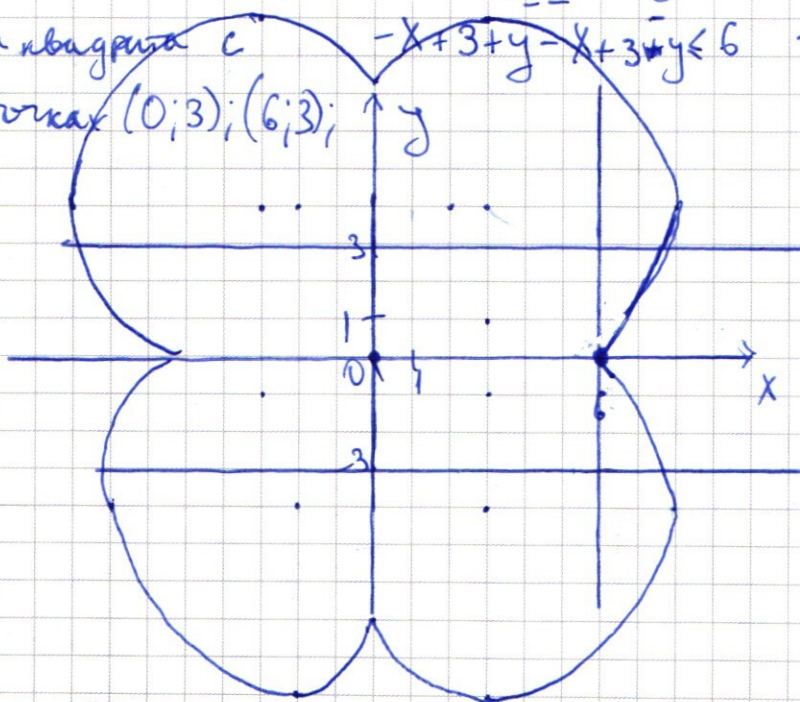
Проверка: $x=-3$ не подходит.

Ответ: $2; \frac{-1+\sqrt{13}}{2}; \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6 \\ ((x-3)^2 + (y-0)^2 = 25 \end{cases}$$

Область внутри квадрата с
вершинами в точках $(0;3); (6;3);$
 $(6;-3); (0;-3)$



№7

$$\begin{matrix} + & + \\ x-3-y & + & x-3+y \leq 6 & 2x \leq 12 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} + & - \\ x-3-y & - & x-3+y \leq 6 & -2y \leq 6 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} - & + \\ -x+3-y & + & x-3+y \leq 6 & 2y \leq 6 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} - & - \\ -x+3-y & - & x-3+y \leq 6 & -2x \leq 0 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6 \\ ((x-3)^2 + (y-0)^2 = 25 \end{cases}$$

4 окр-ти с выкалывыми точками (все проходит

через $T(0;0)$) Тогда, только 2 точки окр-ти попали во внутрь обл. квадрата. Это точки $(0;0)$ и $(6;0)$

Ответ: $(0;0); (6;0)$

№5

$1400 = 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$. Произведение цифр = 1400, если число состоит либо из: 2, 2, 2, 5, 5, 7, 1, 1 I (3 цифры, 2 цифры, 2 цифры)
либо из: 2, 4, 5, 5, 7, 1, 1, 1 II (2 цифры, 3 цифры)
либо из: 8, 5, 5, 7, 1, 1, 1, 1. III (2 цифры, 4 цифры)

Если бы все 8 цифр были бы разными, то было бы 6! способов записать эти числа. Но, т.к. в наших наборах цифр, цифры повторяются, то: I: кол-во 6-ных чисел = $\frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 2} = 30 \cdot 56 = 1680$. II: $\frac{6!}{2! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2} = 60 \cdot 56 = 3360$; III: $\frac{8!}{2! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2} = 30 \cdot 28 = 840$. Кол-во всех способов равно сумме всех 3 случаев: $1680 + 840 + 3360 = 5880$

Ответ: 5880

№4

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2 | x-1 | + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + (x-1)^2 - 3x^2 | x-1 | \geq 0$$

$$2x^4 + (x-1)^2 - 3x^2 | x-1 | = 0$$

$$|x-1| = t$$

$$t^2 - 3x^2 t + 2x^4 = 0 \text{ по формуле Виета}$$

$$t_1, t_2 = 2x^4$$

$$t_1 + t_2 = 3x^2 \Rightarrow$$

$$t_1 = x^2; t_2 = 2x^2$$

$$|x-1| = x^2 \text{ или } |x-1| = 2x^2$$

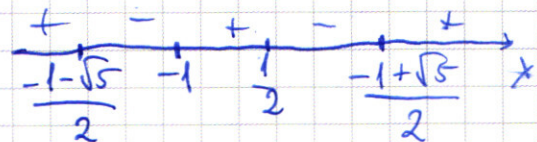
$$x^2 - x + 1 = 0$$

$$D < 0$$

$$x < 1$$

$$x + x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$



(4 корня $\Rightarrow$ выражение разбивается на 4 случая. Действительно, так.)

степень многочлена 4)

$$2x^2 - x + 1 = 0$$

$$x \geq 1$$

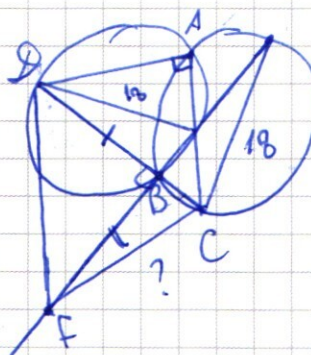
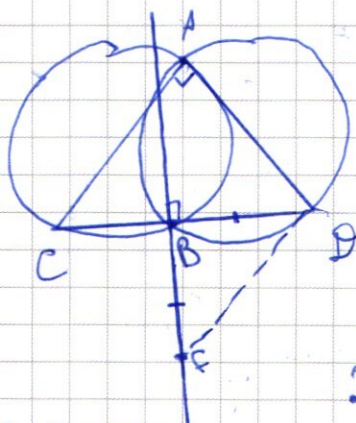
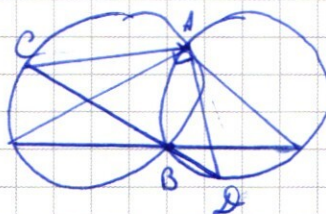
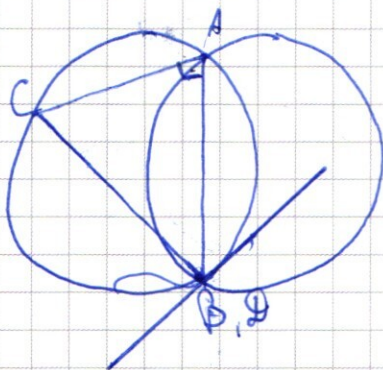
$$2x^2 + x - 1 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{4}; x_1 = -1; x_2 = \frac{1}{2}$$

Ответ: $x \in (-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}] \cup [-1; \frac{1}{2}] \cup [\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; +\infty)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2 |x-1| + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + (x-1)^2 - 3x^2 |x-1| \geq 0$$

$$2 \cdot 1 + 1 + 2 - 3 \cdot 2 + 1 \geq 0$$

$$x-1=t$$

$$t^2 - 3x^2 t + 2x^4 = 0$$

$$t_1 \cdot t_2 = 2x^4; t_1 + t_2 = 3x^2$$

$$t_1 = x^2; t_2 = 2x^2$$

$$x^2 = x-1$$

$$\begin{array}{c} + \quad - \quad + \quad - \quad + \\ \hline -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad -1 \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}$$

$$3a + 3b = 4b$$

$$3a = b$$

$$a = -1; b = -3$$

$$12 = ab + b^2$$

$$12 = 3a^2 + 9a^2$$

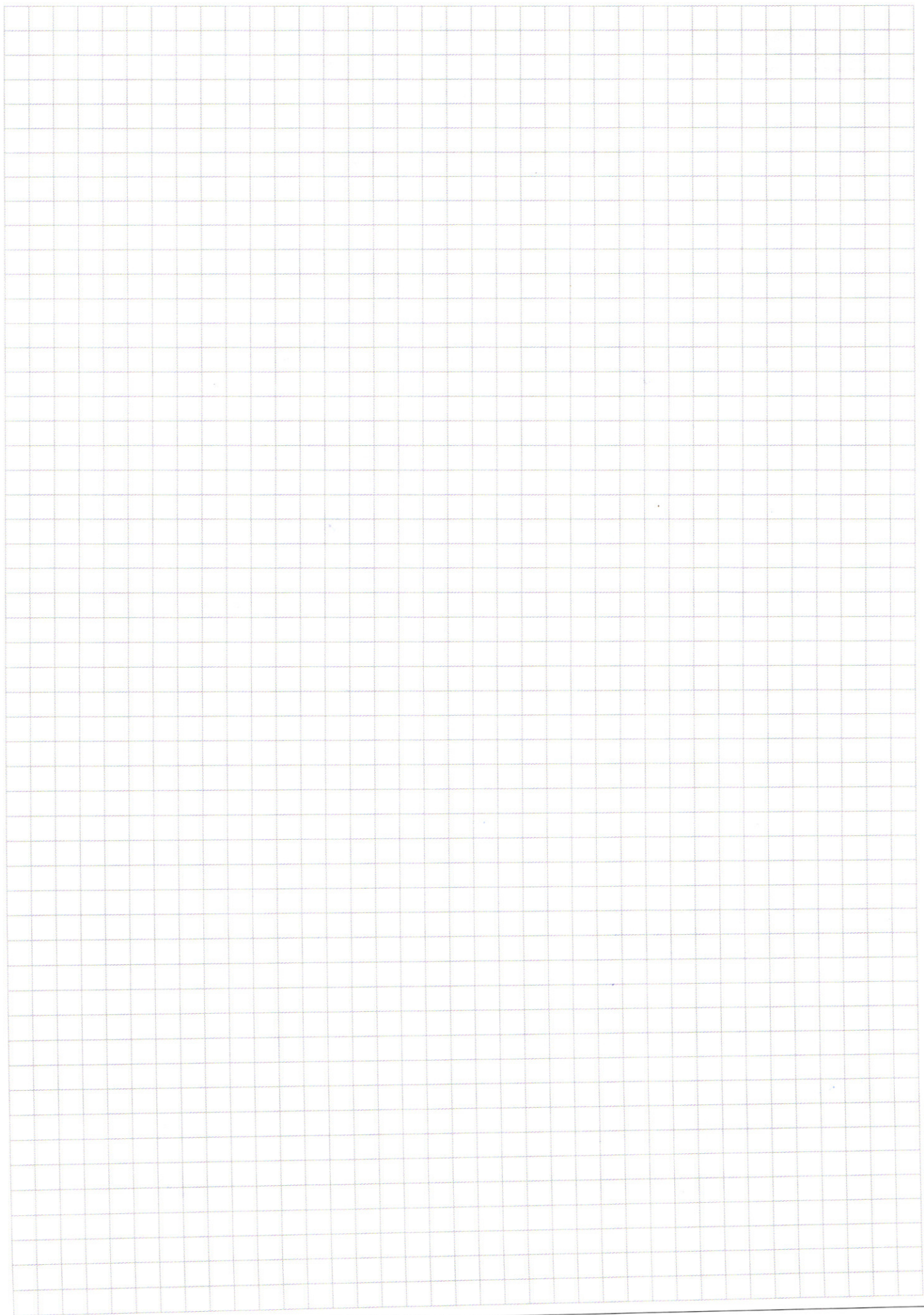
$$3(-4)x + 12y = 1$$

$$a^2 = 1$$

$$12y = 12x + 1$$

$$4 \cdot -3x + -4 \cdot -3y = 1$$

$$12y = 12x + 1$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \quad 1400 = 10 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 7 =$$

$$= 5^2 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot 7 =$$

$$= 4 \cdot 9 \cdot 4 + 4 \cdot 9 \cdot 6 + 4 \cdot 9 \cdot 8 + \dots + 4 \cdot 9 \cdot 12 = 432 + 288 + 144 =$$

$$= 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1$$

$$16 \cdot 9 = 144$$

288

432

$$= 864$$

$$2 \cdot 13 \cdot 2 = 52$$

7. Вспомогательные: Да

$3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$

$$3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$

$36 +$

72

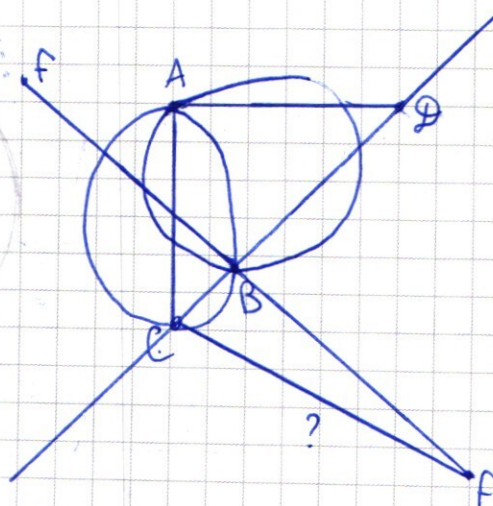
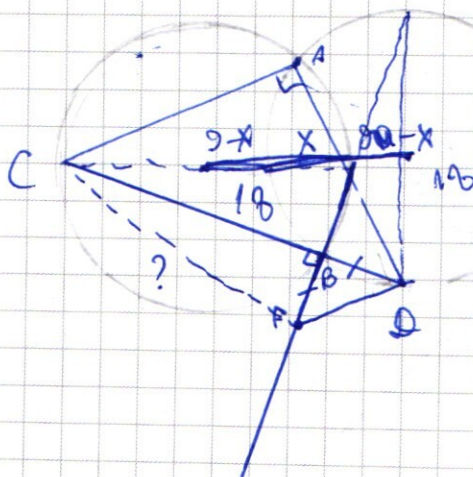
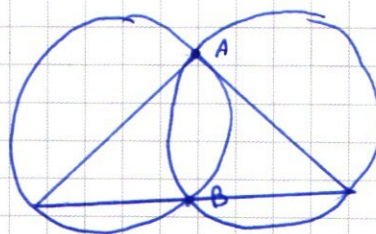
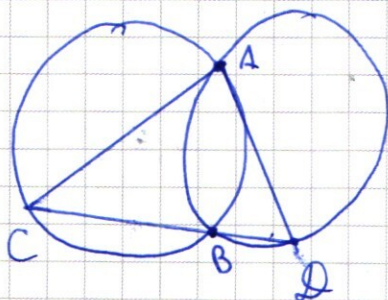
$$36 + 72 + 108 = 216$$

$$\underline{1} \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1$$

$$\underline{I}5.5.4.2.7.1.1.1$$

TI 5.5. 8.7. 1.1.1.1

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$



$$|x-3-y| + |x-3+y| \leq 6$$

$$(|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25$$

1680

$$30 \cdot 7 \cdot 8 =$$

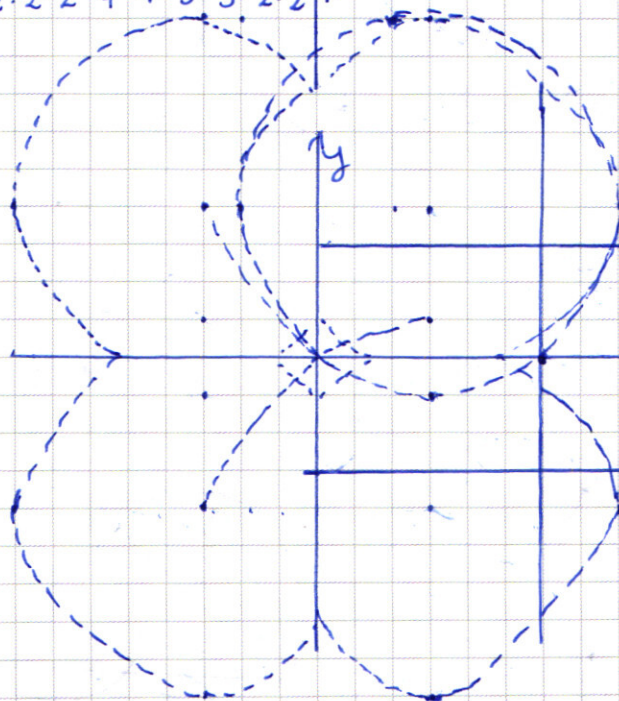
$$= 56 \cdot 30$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 2}$$

$$4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 +$$

$$+ 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 +$$

$$\begin{array}{r} 3360 \\ + 840 \\ + 4200 \\ \hline 1680 \\ \hline 5880 \end{array}$$



$$\begin{aligned} x-3-y &\geq 0 & y &\leq x-3 \\ x-3+y &\geq 0 & y &\geq 3-x \\ y & & & \end{aligned}$$

++

$$x-3-y + x-3+y \leq 6 \quad = 2x-6 \leq 6$$

$$x-3-y - x+3-y \leq 6 \quad -2y \leq 6$$

$$-x+3+y + x-3+y \leq 6 \quad 2y \leq 6$$

$$-x+3+y - x+3-y \leq 6 \quad -2x+6 \leq 6$$

$$|x-3-y| + |x-3+y| \leq 6$$

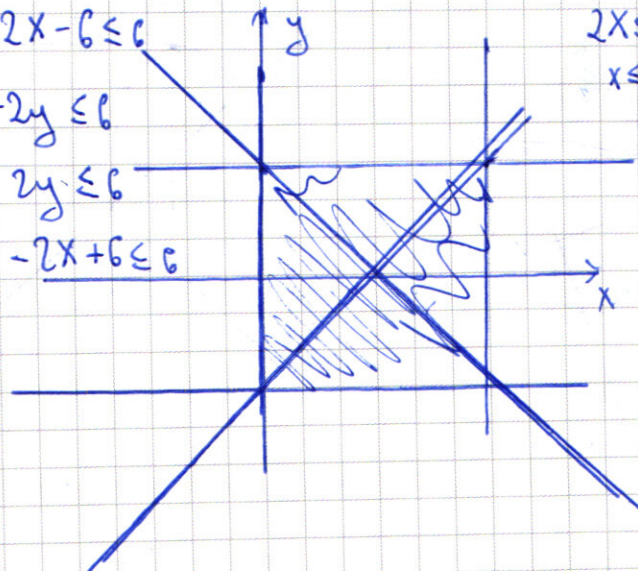
$$2x \leq 12$$

$$x \leq 6$$

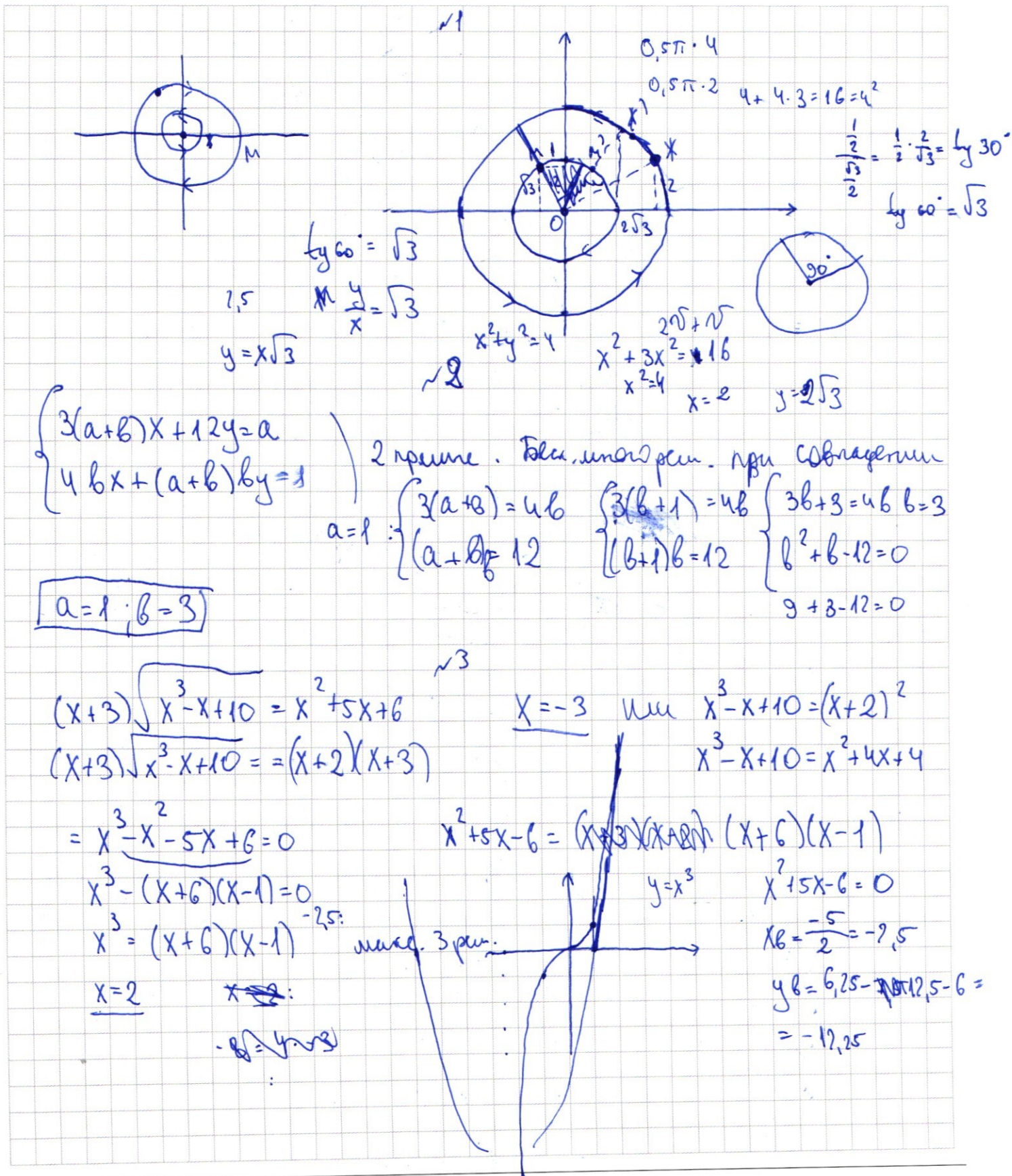
$$y \geq -3$$

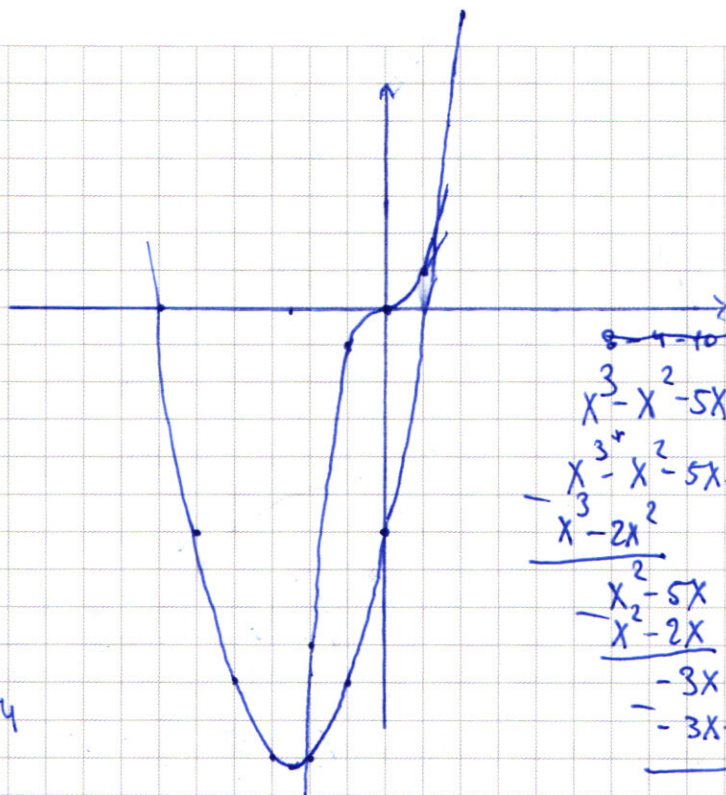
$$-2x \leq 0$$

$$x \geq 0$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$$3 < \sqrt{13} < 4$$

$$\sqrt{13} \approx 3,5$$

$$\frac{-1+3,5}{2} = 1,25 \quad \checkmark$$

~4

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^3 \mid x-1 + 1 \geq 0$$

$$\begin{cases} 2x^4 + x^2 - 2x - 3x^3 + 3x^2 + 1 \geq 0, & x-1 \geq 0 \\ 2x^4 + x^2 - 2x + 3x^3 - 3x^2 + 1 \geq 0, & x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \geq 0 \\ 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x=1: & 2+3+4-2+1=8 \\ x=-1: & 2-3+2+2+1=4 \end{aligned}$$

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \mid x^2 + 2x + 1$$

$$= 8x^3 - 9x^2 + 8x - 2$$

$$64 - 9 \cdot 4 + 16 - 2 =$$

$$2x^4 + x^2 + 1 \geq 3x^2 \mid x-1 + 2x$$

$$x \cdot 6,25$$

$$2,5$$

$$\begin{aligned} + 12,5 \\ 3,125 \\ \hline 15,625 \end{aligned}$$

$$x^3 - x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - 5x + 6 & x-2 \\ \hline x^3 - 2x^2 & x^2 + x - 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 5x \\ - x^2 + 2x \\ \hline -3x + 6 \end{array}$$

$$-3x + 6$$

$$-3x + 6$$

$$0$$

100 T. 6/88

$$x = -3; x = 2; x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$(x-2)(x^2+x-3) = 0$$

$$\begin{aligned} D &= 1 + 4 \cdot 3 = 13 \\ x_{1,2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{-1-3,5}{2} = -2,25$$

$$\frac{-1-3}{2} = -2$$

$$-2,5$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 & x^2 - 4x + 4 \\ \hline 2x^4 - 8x^3 + 6x^2 & 2x^2 + 5x \end{array}$$

$$= 8x^3 - 9x^2 + 8x - 2$$