МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Вокруг цветка в одной плоскости с ним по двум окружностям летают шмель и пчела. Скорость пчелы в полтора раза больше скорости шмеля. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой цветок (общий центр окружностей) находится в точке $O(0;0)$. Пчела двигается по часовой стрелке, а шмель – против. В начальный момент времени пчела и шмель находятся в точках $M_0\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ и $N_0(2;0)$ соответственно. Определите координаты всех положений шмеля, в которых расстояние между ним и пчелой будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все тройки целочисленных параметров a, b и c, при каждой из которых система уравнений
$$\begin{cases} ax+2y+cz=c, \\ 3x+by+4z=4b \end{cases}$$
не имеет решений.

3. [4 балла] Решите неравенство $\left(\sqrt{x^3-10x+7}+1\right)\cdot\left|x^3-18x+28\right| \leqslant 0$.

4. [5 баллов] Решите уравнение $2x^4+x^2-6x-3x^2|x-3|+9=0$.

5. [5 баллов] Бросили 70 игральных костей (кубиков с цифрами от 1 до 6 на гранях; вероятность выпадения каждой из граней одна и та же) и посчитали сумму выпавших чисел. Какая из вероятностей больше: того, что сумма больше 350, или того, что сумма не больше 140?

6. [4 балла] Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D, пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E, а также вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно $\frac{5}{4}$. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1.

7. [7 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений
$$\begin{cases} a^2-2ax-6y+x^2+y^2=0, \\ (|x|-4)^2+(|y|-3)^2=25 \end{cases}$$
имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №3 (начало)

Для начала найдём ОДЗ данного неравенства (т.е. нер-ва $(\sqrt{x^3-10x+7}+1)\cdot$
$\cdot|x^3-18x+28|\leq 0$

Выражение $x^3-10x+7$ должно быть неотрицательным, а значит:
$x^3-10x+7\geq 0$

Решать это неравенство не будем, а потом проверим, подходят ли все найденные нами решения под это условие (т.е. условие $x^3-10x+7\geq 0$)

Заметим, что при всех допустимых значениях x ~~значениях~~ выражение $\sqrt{x^3-10x+7}$ принимает только неотрицательные значения, а значит выражение $(\sqrt{x^3-10x+7}+1)$ при всех допустимых значениях x принимает значения не меньше 1, а значит на $(\sqrt{x^3-10x+7}+1)$ можно поделить обе части неравенства

Задача №3 (продолжение 1)

$(\sqrt{x^3-10x+7}+1)\cdot|x^3-18x+28|\le 0$

И получить неравенство:

$|x^3-18x+28|\le 0$

которое нам и нужно решить (а потом проверить корни под ОДЗ, т.е. под условие $x^3-10x+7\ge 0$).

Заметим, что модуль любого числа есть число неотрицательное, а значит выражение $|x^3-18x+28|$ принимает только неотрицательные значения при любом x. Это означает, что неравенство $|x^3-18x+28|\le 0$ выполняется тогда и только тогда, когда

$|x^3-18x+28|=0$

Откуда:

$x^3-18x+28=0$

$x^3-2x^2+2x^2-4x-14x+28=0$

$x^2(x-2)+2x(x-2)-14(x-2)=0$

(т.к. модуль числа равен 0 тогда и только тогда, когда само число равно 0)

$(x^2+2x-14)(x-2)=0$

Это уравнение равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ x^2+2x-14=0 \end{array}\right.$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

МФТИ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №3 (продолжение)

Решим уравнение:

$x^2+2x-14=0$

$D=2^2-4\cdot 1\cdot(-14)=4+56=60$

$\left[\begin{array}{l} x=\frac{-2+\sqrt{60}}{2\cdot 1} \\ x=\frac{-2-\sqrt{60}}{2\cdot 1} \end{array}\right.$, откуда $\left[\begin{array}{l} x=-1+\frac{2\sqrt{15}}{2} \\ x=-1-\frac{2\sqrt{15}}{2} \end{array}\right.$, откуда

$\left[\begin{array}{l} x=-1+\sqrt{15} \\ x=-1-\sqrt{15} \end{array}\right.$

Тогда совокупность:

$\left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ x^2+2x-14=0 \end{array}\right.$

равносильна совокупности

$\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1+\sqrt{15} \\ x=-1-\sqrt{15} \end{array}\right.$

Осталось проверить эти 3 значения x под ОДЗ.

При $x=2$

Задача № 3 (продолжение 3)

$x^3-10x+7=2^3-10\cdot2+7=8-20+7=-5<0$,

значит $x=2$ не подходит

При $x=-1+\sqrt{15}$

$x^3-10x+7=(-1+\sqrt{15})^3-10\cdot(-1+\sqrt{15})+7=$

$=(\sqrt{15}-1)^3+10-10\sqrt{15}+7=(\sqrt{15})^3-3\cdot(\sqrt{15})^2\cdot1+3\cdot(\sqrt{15})\cdot1^2-$

$-1+17-10\sqrt{15}=(\sqrt{15})^2\cdot\sqrt{15}-3\cdot15\cdot1+3\sqrt{15}-1+$

$+17-10\sqrt{15}=15\sqrt{15}-45+3\sqrt{15}-1+17-10\sqrt{15}=$

$=8\sqrt{15}-29$

Сравним $8\sqrt{15}$ и 29

$8\sqrt{15} \vee 29$ возведём обе части в квадрат

$(8\sqrt{15})^2 \vee 29^2$ (имеем право, т.к $8\sqrt{15}>0$ и $29>0$)

$8^2\cdot(\sqrt{15})^2 \vee 841$

$64\cdot15 \vee 841$

$960>841$, а поэтому $8\sqrt{15}-29>0$ т.е.

при $x=-1+\sqrt{15}$ выражение $x^3-10x+7$

принимает неотрицательное значение, а

значит $x=-1+\sqrt{15}$ подходит

При $x=-1-\sqrt{15}$

$x^3-10x+7=(-1-\sqrt{15})^3-10\cdot(-1-\sqrt{15})+7=$

$=((-1)\cdot(1+\sqrt{15}))^3+10+10\sqrt{15}+7=(-1)^3\cdot(1+\sqrt{15})^3+17+$

$+10\sqrt{15}=-1(1^3+3\cdot1^2\sqrt{15}+3\cdot1\cdot(\sqrt{15})^2+(\sqrt{15})^3)+17+$

$+10\sqrt{15}=-1-3\sqrt{15}-3\cdot15-(\sqrt{15})^2\cdot\sqrt{15}+17+10\sqrt{15}=$

$=-1-3\sqrt{15}-45-15\sqrt{15}+17+10\sqrt{15}=$

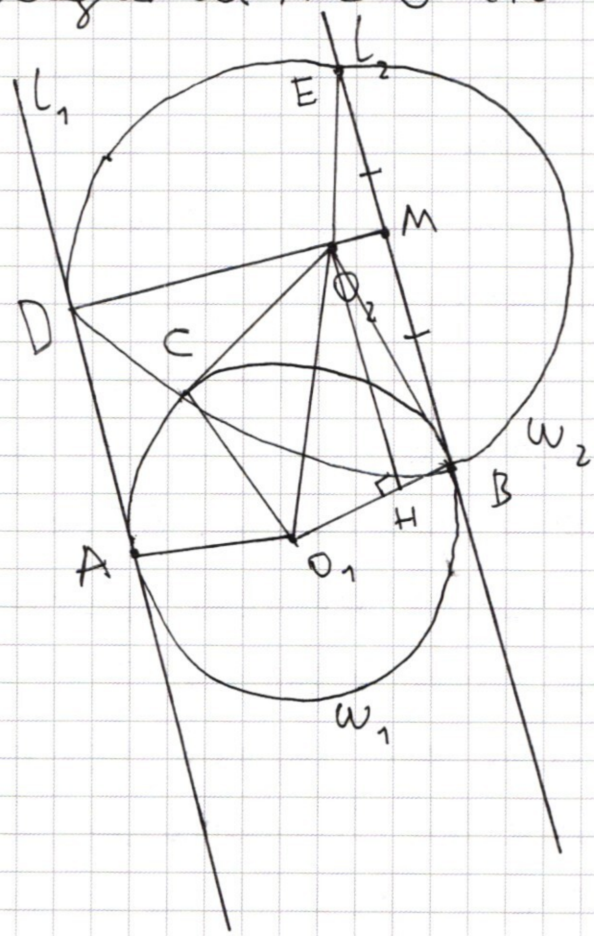
$=-29-8\sqrt{15}<0+0<0 \Rightarrow x=-1-\sqrt{15}$ не подходит.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №3 (окончание)

Ответ: $x=-1+\sqrt{15}$

Задача № 6 (начало)



Дано:

$l_1 \parallel l_2$

O_1 - центр w_1

O_2 - центр w_2

w_1 касается прямых l_1 и l_2 в точках A и B соответственно

w_2 касается l_1 в точке D

$$\frac{S_{BO_1CO_2}}{S_{\Delta O_2BE}}=\frac{5}{4}$$

Найти:

Отношение радиусов окружностей w_1 и w_2. (Обозначим радиусы w_1 и w_2 за r и R соответственно. Тогда необходимо найти $\frac{r}{R}$)

Решение: Проведём в ΔO_1O_2B высоту O_2H

Проведём в ΔEO_2B медиану O_2M. Т.к. $EO_2=BO_2$ (как радиусы w_2), то ΔEO_2B - равнобедренный, а значит медиана к основанию в нём, т.е. O_2M,

Задача №6 (продолжение 1)
также является высотой, а значит $O_2M \perp EB$.
Заметим, что:
$S_{\Delta O_2ME} = \frac{1}{2} EM \cdot MO_2 = \frac{1}{2} MB \cdot MO_2 = S_{\Delta BMO_2}$
Заметим, что $\Delta O_2CO_1 = \Delta O_2BO_1$ по 3 сторонам (O_2O_1 - общая, $O_2C = O_2B$ как радиусы ω_2, $O_1C = O_1B$ как радиусы ω_1), а значит $S_{\Delta O_2CO_1} = S_{\Delta O_2BO_1}$
Т.к. O_1B и O_1A - радиусы, к касательным l_2 и l_1 соответственно, то $O_1B \perp l_2$ и $O_1A \perp l_1$. А т.к. $l_1 \parallel l_2$, то прямые O_1B и O_1A перпендикулярны l_1, а значит прямые O_1B и O_1A параллельны. А т.к. прямые O_1B и O_1A имеют общую точку O_1, то эти прямые совпадают, т.е. точки O_1, B, A лежат на одной прямой
~~так~~ Т.к. O_2D - радиус ω_2 к касательной l_1, то $O_2D \perp l_1$. Т.к. $O_2M \perp l_2$ и $l_1 \parallel l_2$, то прямая O_2M перпендикулярна l_1. А т.к. $O_2D \perp l_1$, то $O_2D \parallel O_2E$. Но т.к. прямые O_2D и O_2E ~~[illegible]~~ имеют общую точку O_2 то они совпадают, т.е. точки O_2, D, E лежат на одной прямой.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача № 6 (продолжение 2)

Т.к. $O_2M \perp l_2$ и $O_1B \perp l_2$, то $O_2M \parallel O_1B$

Т.к. $O_1B \perp l_2$ и $O_2H \perp O_1B$, то $l_2 \parallel O_2H$.

Т.к. $l_2 \parallel O_2H$ и $O_2M \parallel HB$, то O_2MBH — параллелограмм (т.к. $MB \parallel HO_2$ и $O_2M \parallel BH$). А т.к. $\angle MBH = 90^\circ$, то O_2MBH — прямоугольник. Значит $MB = O_2H$.

Имеем:

$$\frac{5}{4} = \frac{S_{BO_1CO_2}}{S_{\triangle BO_2E}} = \frac{S_{\triangle O_1CO_2} + S_{\triangle O_1BO_2}}{S_{\triangle BO_2M} + S_{\triangle EO_2M}} = \frac{2S_{\triangle O_2BO_1}}{2S_{\triangle BO_2M}} = \frac{S_{\triangle O_2BO_1}}{S_{\triangle BO_2M}} =$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{2}\cdot O_2H\cdot O_1B}{\frac{1}{2}O_2M\cdot MB}\right) = \frac{O_2H\cdot O_1B}{O_2M\cdot O_2H} = \frac{O_1B}{O_2M} \Rightarrow O_2M = \frac{4}{5}O_1B = \frac{4}{5}r$$

Т.к. ~~[illegible]~~

Т.к. $AB \perp MB$ и $DM \perp MB$, то $AB \parallel DM$. А т.к. $DA \parallel MB$, то $ADMB$ — параллелограмм $\Rightarrow DM = AB$. А т.к.

Задача №6 (окончание)

$AB = O_1A + O_1B = r + r = 2r$, то $DM = 2r$

Имеем:

$R = O_2D = DM - MO_2 = 2r - \frac{4}{5}r = \frac{10r}{5} - \frac{4r}{5} =$

$= \frac{10r - 4r}{5} = \frac{6r}{5}.$

$R = \frac{6r}{5}$

$\frac{R}{r} = \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{5}{6}$

Ответ: $\frac{r}{R} = \frac{5}{6}$ (т.е. отношение радиуса ω_1 к радиусу ω_2 есть $\frac{5}{6}$)

Задача №5 (начало)

Занумеруем все кубики числами 1, 2, 3, …, 70

Рассмотрим все возможные варианты того, что могло выпасть при бросании 70 кубиков. Каждый из вариантов будем обозначать следующим образом: $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{70})$, где a_1 - число, выпавшее на 1 кубике, a_2 - число, выпавшее на 2 кубике, a_3 - число, выпавшее на 3 кубике, …, a_{70} - число выпавшее на 70 кубике. Заметим также, что каждый из этих вариантов того, что выпало при бросании 70 кубиков равновероятен, т.к. у каждого из кубиков вероят-

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №5 (Продолжение)
ность выпадания каждой из граней одна и та же.

Теперь рассмотрим ~~...~~ множество всех ~~...~~ вариантов, которые могут получиться при бросании всех 70 кубиков, причём таких, что сумма всех выпавших чисел в этих вариантах больше 350. Обозначим это множество за A.

Рассмотрим множество всех вариантов, которые могут получиться при бросании всех 70 кубиков, причём таких, что сумма ~~...~~ всех выпавших чисел в этих вариантах меньше 140. Обозначим это множество за B.

Докажем, что множества A и B равномощны (т.е. что в них одинаковое число элементов). Для этого докажем, что между множествами A и B су-

Задача №5 (продолжение 2)

шествует взаимно однозначное соответствие

Возьмём произвольный элемент $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{70})$ из множества A. Докажем, что вариант $((7-x_1), (7-x_2), (7-x_3), \ldots, (7-x_{70}))$ существует и он лежит в множестве B. Действительно, т.к. числа $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{70}$ – это числа выпавшие на гранях кубиков, то $1 \leq x_1 \leq 6$, $1 \leq x_2 \leq 6$, $1 \leq x_3 \leq 6, \ldots$, $1 \leq x_{70} \leq 6$, а значит $-1 \geqslant -x_1 \geqslant -6$, $-1 \geqslant -x_2 \geqslant -6$, $-1 \geqslant -x_3 \geqslant -6$, $\ldots$, $-1 \geqslant -x_{70} \geqslant -6$, а значит $6 \geqslant 7-x_1 \geqslant 1$, $6 \geqslant 7-x_2 \geqslant 1$, $6 \geqslant 7-x_3 \geqslant 1$, $\ldots$, $6 \geqslant 7-x_{70} \geqslant 1$, откуда следует, что вариант $((7-x_1), (7-x_2), (7-x_3), \ldots, (7-x_{70}))$ существует. Теперь докажем, что он лежит в B. Т.к. вариант $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{70})$ лежит в A, то $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{70} > 350$, а значит $-(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{70}) < -350$. Тогда $(7-x_1) + (7-x_2) + (7-x_3) + \cdots + (7-x_{70}) =$
$= 7 - x_1 + 7 - x_2 + 7 - x_3 + \cdots + 7 - x_{70} = 7 \cdot 70 -$
$-(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{70}) = 490 + (-(x_1 + x_2 + x_3 +$
$+ \cdots + x_{70})) < 490 + (-350) = 140$, а значит вариант $((7-x_1), (7-x_2), (7-x_3), \ldots, (7-x_{70}))$ лежит в B. Тогда, строгое искомое взаимно

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №5 (продолжение 3)

однозначное соответствие, варианту $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{70})$ из множества A мы поставили в соответствие варианту ~~[illegible]~~ $((7-x_1), (7-x_2), (7-x_3), \ldots, (7-x_{70}))$ из множества B.

Возьмём произвольный элемент $(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{70})$ из множества B и докажем, что вариант $((7-y_1), (7-y_2), (7-y_3), \ldots, (7-y_{70}))$ существует и лежит в A. Действительно, т.к. числа $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{70}$ — это числа, выпавшие на гранях кубиков, то $1 \leq y_1 \leq 6$, $1 \leq y_2 \leq 6$, $1 \leq y_3 \leq 6, \ldots, 1 \leq y_{70} \leq 6$, а значит $-1 \geq -y_1 \geq -6$, $-1 \geq -y_2 \geq -6$, $-1 \geq -y_3 \geq -6, \ldots$, $-1 \geq -y_{70} \geq -6$, а значит $6 \geq 7-y_1 \geq 1$, $6 \geq 7-y_2 \geq 1$, $6 \geq 7-y_3 \geq 1, \ldots, 6 \geq 7-y_{70} \geq 1$, откуда следует, что вариант $((7-y_1), (7-y_2), (7-y_3), \ldots, (7-y_{70}))$ существует. Теперь докажем, что он лежит в A. Т.к. вариант $(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{70})$

Задача №5 (продолжение)

лежит в B, то $y_1+y_2+y_3+\dots+y_{70}<140$, а значит $-(y_1+y_2+y_3+\dots+y_{70})>-140$

Тогда: $(7-y_1)+(7-y_2)+(7-y_3)+\dots+(7-y_{70})=$
$=7-y_1+7-y_2+7-y_3+\dots+7-y_{70}=7\cdot 70-(y_1+y_2+$
$+y_3+\dots+y_{70})=490+(-(y_1+y_2+y_3+\dots+y_{70}))>$
$>490+(-140)=350$, а значит ~~…~~ вариант ~~…~~ $((7-y_1),(7-y_2),(7-y_3),\dots,(7-y_{70}))$ лежит в A.

Значит строя наше взаимно однознач-ное соответствие, мы варианту $(y_1,y_2,y_3,\dots,y_{70})$ из B ставим в соответ-ствие вариант $((7-y_1),(7-y_2),(7-y_3),\dots,(7-y_{70}))$ из A.

Итак, мы построили между мно-жествами A и B взаимно однозначное соответствие, т.к каждому элементу A ~~…~~ поставили в соответ-ствие ~~…~~ элемент из B, а каждому элементу из B поставили в соответ-ствие элемент A. значит множества A и B равномощны.

Т.к. в A хранятся все варианты, в которых сумма всех выпавших чисел ~~…~~ больше 350, в B хранят-ся все варианты, в которых

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача № 5 (окончание)

сумма всех выпавших чисел меньше 140, все варианты могут случиться с одинаковой вероятностью и множества A и B равномощны, то на самом деле вероятность того, что при бросании 70 кубиков сумма всех выпавших чисел больше 350 равна вероятности того, что при бросании 70 кубиков сумма всех выпавших чисел меньше 140.

Ответ: Вероятность того, что при бросании 70 кубиков сумма всех выпавших чисел больше 350 равна вероятности того, что при бросании 70 кубиков сумма всех выпавших чисел меньше 140

Задача № 4. (начало)

$2x^4+x^2-6x-3x^2|x-3|+9=0$

Задача №4 (продолжение 1)

$$2x^4-3x^2|x-3|+(x^2-6x+9)=0$$

$$2x^4-3x^2|x-3|+(x-3)^2=0$$

Заметим, что $|x-3|^2=(x-3)^2$, а потому уравнение $2x^4-3x^2|x-3|+(x-3)^2$ равносильно $2x^4-3x^2|x-3|+|x-3|^2=0$

$$2x^4-3x^2|x-3|+|x-3|^2=0$$

$$2x^4-2x^2|x-3|-x^2|x-3|+|x-3|^2=0$$

$$2x^2(x^2-|x-3|)-|x-3|(x^2-|x-3|)=0$$

$$(2x^2-|x-3|)(x^2-|x-3|)=0$$

Данное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} 2x^2-|x-3|=0 \\ x^2-|x-3|=0 \end{array}\right.$$

Решим каждое из уравнений этой совокупности отдельно.

$$2x^2-|x-3|=0$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geqslant 3 \\ 2x^2-(x-3)=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<3 \\ 2x^2+(x-3)=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geqslant 3 \\ 2x^2-x+3=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<3 \\ 2x^2+x-3=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача № 4 (продолжение 2)

Решим ур-е $2x^2-x+3=0$.

$D=(-1)^2-4\cdot3\cdot2 = 1-24=-23<0 \Rightarrow$ нет корней

Решим ур-е. $2x^2+x-3=0$

$D=1^2-4\cdot2\cdot(-3)=1+24=25$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{-1+\sqrt{25}}{2\cdot2} \\ x=\frac{-1-\sqrt{25}}{2\cdot2} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1,5 \end{array}\right.$$

~~Продолжение~~

Тогда совокупность:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geq3 \\ 2x^2-x+3 \end{cases} \\ \begin{cases} x<3 \\ 2x^2+x-3=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

равносильна системе:

$$\begin{cases} x<3 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1,5 \end{array}\right. \end{cases}$$

Т.е. $x=1$ и $x=-1,5$ корни, т.к они меньше 3

Задача № 4. (Продолжение 3)

Теперь решим уравнение:

$x^2 - |x-3| = 0$

$\Updownarrow$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - (x-3) = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 3 \\ x^2 + (x-3) = 0 \end{cases} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - x + 3 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 3 \\ x^2 + x - 3 = 0 \end{cases} \end{array}\right.$

Решим ур-е:

$x^2 - x + 3 = 0$

$D = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 1 - 12 = -11 < 0 \Rightarrow$ нет корней

Решим ур-е.

$x^2 + x - 3 = 0$

$D = 1^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 1 = 1 + 12 = 13$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$

Значит совокупность:

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - x + 3 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 3 \\ x^2 + x - 3 = 0 \end{cases} \end{array}\right.$

равносильна системе:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача № 4 (продолжение 4)

$$\begin{cases} x<3 \\ \left[\begin{array}{l} x=\frac{-1+\sqrt{13}}{2} \\ x=\frac{-1-\sqrt{13}}{2} \end{array}\right. \end{cases}$$

~~Проверим~~

Сравним числа $\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ и 3

$\frac{-1+\sqrt{13}}{2} \vee 3$

$-1+\sqrt{13} \vee 6$

$\sqrt{13} \vee 7$ возведём обе части в квадрат

$13 \vee 7^2$ (имеем право, т. к. $\sqrt{13}>0$ и $7>0$)

$13<49$

$\Downarrow$

$x=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ - корень.

Заметим, что $\frac{-1-\sqrt{13}}{2}<\frac{0+0}{2}<0<3$, а значит $x=\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$ - корень.

Итак, совокупность

$$\left[\begin{array}{l} 2x^2-|x-3|=0 \\ x^2-|x-3|=0 \end{array}\right.$$

Задача №4 (окончание)

равносильна совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1{,}5\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x=\left(\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}\right)\\ x=\left(\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)\end{array}\right.\end{array}\right.$$

которая равносильна:

$$\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1{,}5\\ x=\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}\\ x=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}\end{array}\right.$$

Ответ: $x\in\left\{\left(\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}\right);\ (-1{,}5);\ 1;\ \left(\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)\right\}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x \geq 3$

$2x^4 + x^2 - 6x - 3x^3 + 9x^2 + 9 = 0$

$2x^4 - 3x^3 + 10x^2 - 6x + 9 = 0$

2 | −13 | 4 10 | 4 6 | 29

2 | 3 | +10 | 46

2

3 | 18 | −24 + 40 − 12

$(-1+\sqrt{15})^3 = (-1)^3 + 3$

$(\sqrt{15}-1)^3 = (\sqrt{15})^3 - 3(\sqrt{15})^2 \cdot 1 + 3\sqrt{15} - 1$

$x^4 - \frac{3}{2}x^3 + 5x^2 - 3x + \frac{9}{2} = 0$

$\left(x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{16}x^2\right)$

$\left(x^2 - \frac{3}{4}x\right)^2$

$4\frac{7}{16}$

$46 - 17 = 29$

$2x^4$

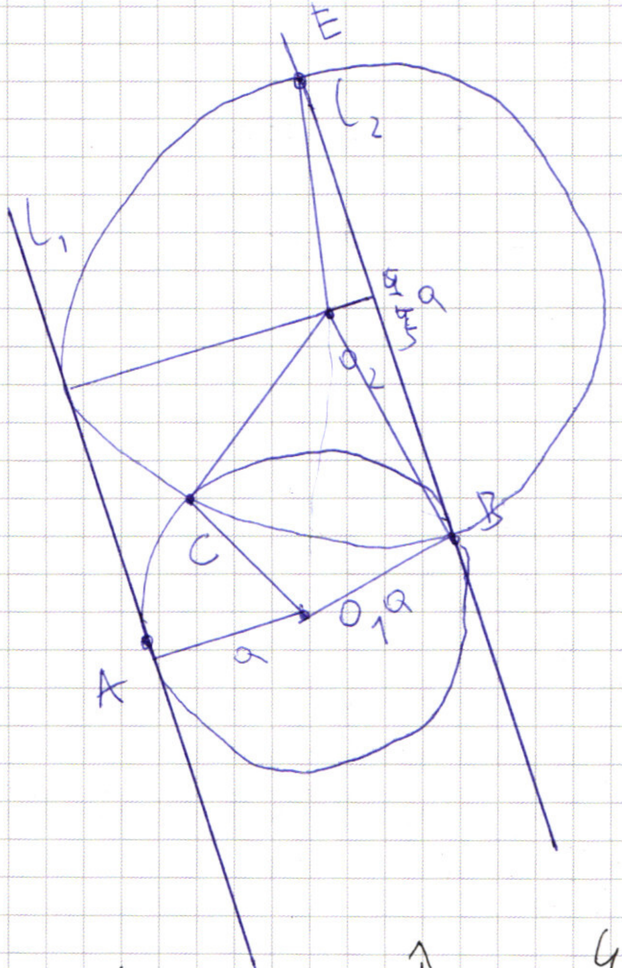
29×29: 261, 58, 841

$64 \cdot 15 \quad 29^2$

64×15: 320, 64, 960

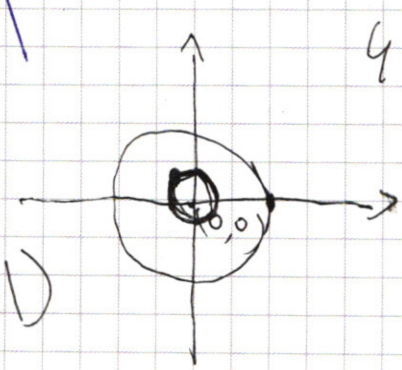
☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)



$x=0$

$2x^4$



$42(\ ) - 140 = 350!$

$2x^4 + x^2(1-3|x-3|)$

$x\ y\ z$

$a_1\ a_2 \dots a_{70}$

$6-a_1\ \ 6-a_2 \dots 6-a_{70}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

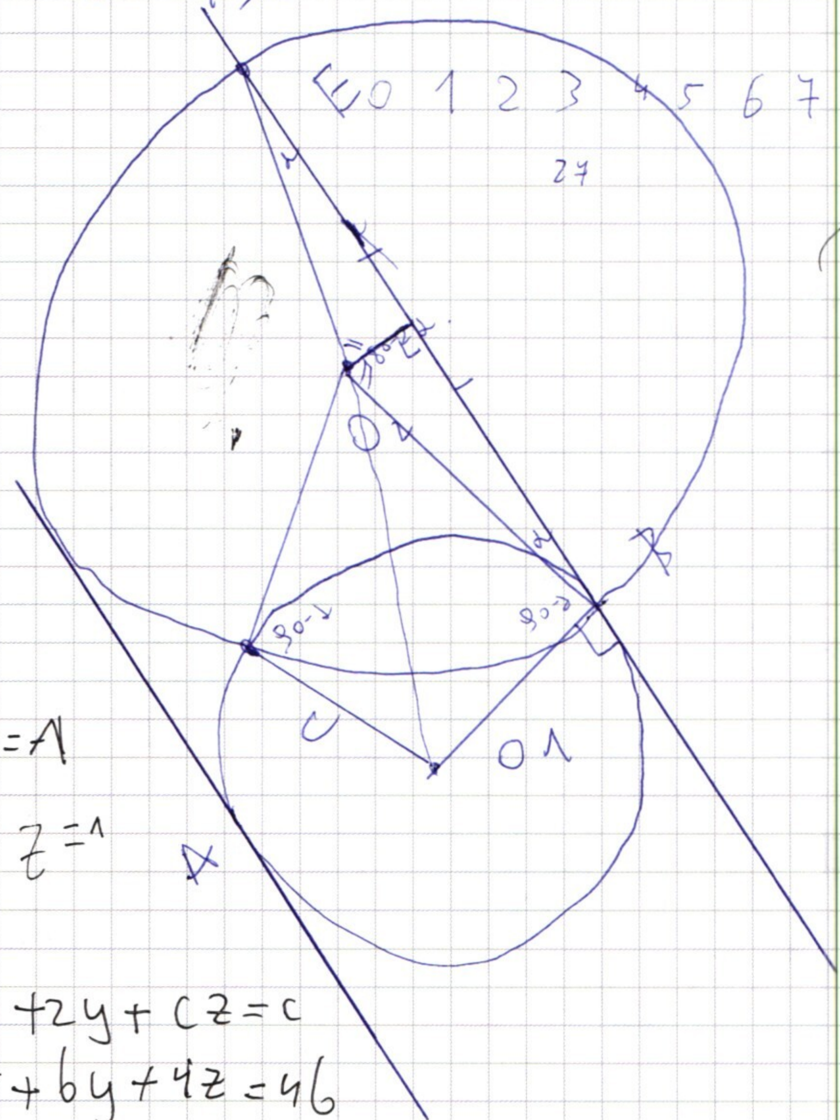
$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma$

$\sin 2\alpha = 2\cos\alpha \sin\alpha$

$x^3 - 10x + 7 \geq 0$

[0 1 2 3 4 5 6 7

27



x^2

$2x^4 - 3x^3$

$z = 1$

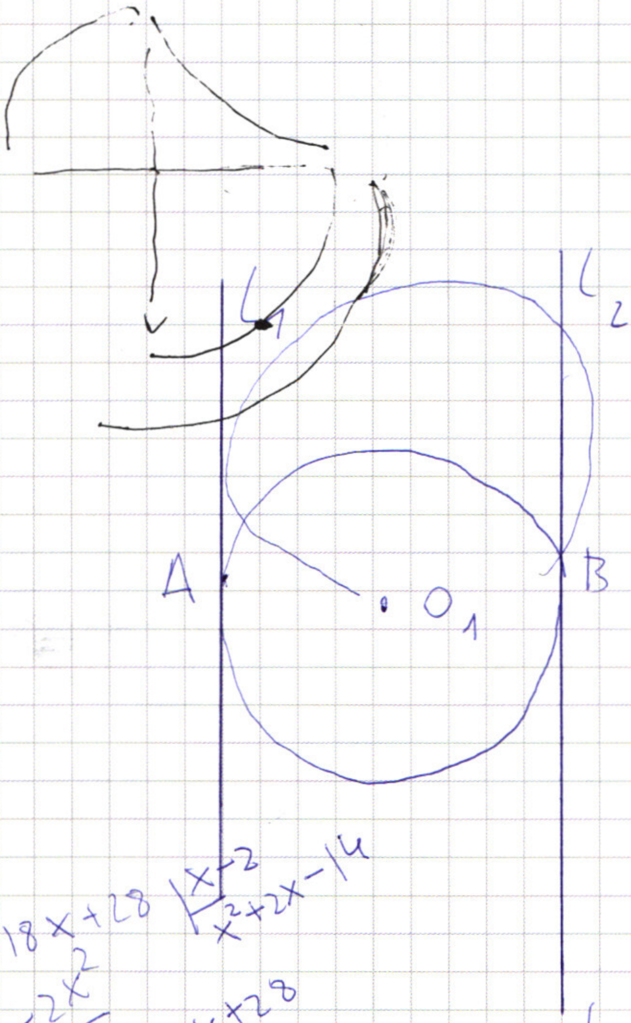
$z = 1$

$ax + 2y + cz = c$

$3x + 6y + 4z = 46$

$3x + 6(y-4) + 4z = 0$

$ax + 2y$



0 1 8 27 64 343

$x^3+7=10x$

$x^3-18x+28 \,|\, x-2$

$x^2+2x-14$

x^3-2x^2

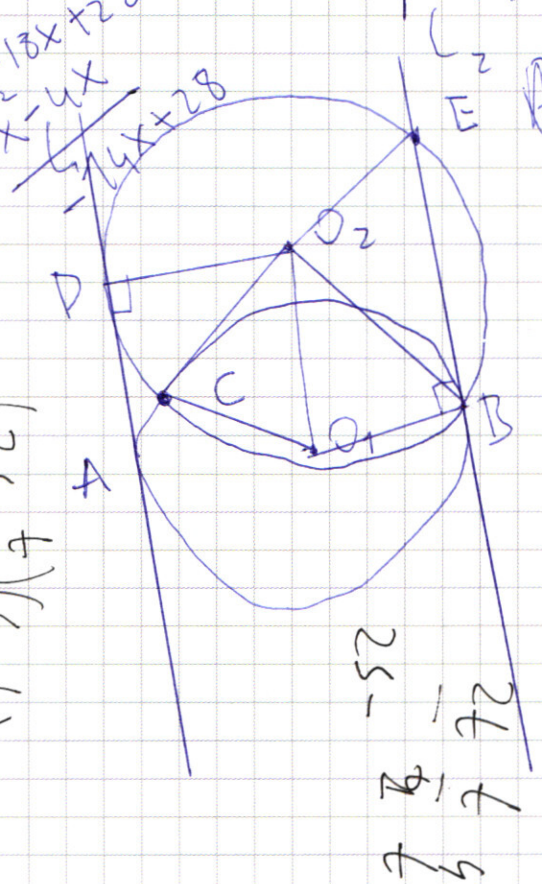
$2x^2-18x+28$

$2x^2-4x$

$-14x+28$

$x^3-10x+7 \geq 0$

$4+56=60$



$|x-3|^2=x^2-6x+9$

$2x^4-3x^2|x-3|+(x^2-6x+9)$