

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На полу стоит блюдечко с молоком, вокруг которого по двум окружностям ходят котёнок и щенок. Скорость котёнка в два раза меньше скорости щенка. На плоскости пола введена прямоугольная система координат, в которой блюдечко (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Котёнок движется по часовой стрелке, а щенок – против. В начальный момент времени котёнок и щенок находятся в точках $M_0(-6; 0)$ и $N_0(2; 2\sqrt{3})$ соответственно. Определите координаты всех положений котёнка, в которых расстояние между животными будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все тройки целочисленных параметров a , b и c , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x - by + z = 2b, \\ ax + 5y - cz = a. \end{cases}$$

не имеет решений.

3. [4 балла] Решите неравенство $(\sqrt{x^3 - 18x - 5} + 2) \cdot |x^3 - 4x^2 - 5x + 18| \leq 0$.

4. [5 баллов] Решите уравнение $4x^4 + x^2 + 6x - 5x^2|x + 3| + 9 = 0$.

5. [5 баллов] Бросили 60 игральных костей (кубиков с цифрами от 1 до 6 на гранях; вероятность выпадения каждой из граней одна и та же) и посчитали сумму выпавших цифр. Какая из вероятностей больше: того, что сумма не меньше 300, или того, что сумма меньше 120?

6. [4 балла] Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D , пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E , а также вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно $\frac{6}{5}$. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1 .

7. [7 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} a^2 - 2ax + 10y + x^2 + y^2 = 0, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = 169 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3

$$(\sqrt{x^3 - 18x - 5} + 2) \cdot |x^3 - 4x^2 - 5x + 18| \leq 0.$$

Разобьем на два случая. 1-й: когда выражение равно 0. 2-ой: когда выражение меньше 0.

Со второго все ~~очевидно~~. $\sqrt{x^3 - 18x - 5} + 2 \geq 0$ - всегда больше нуля, а ~~из~~ выражение из под модуля выходит не отрицательным $\Rightarrow$ невозможен 2-ой случай.

Остался 1-й. III. к. $\sqrt{x^3 - 18x - 5} + 2$ - больше нуля, тогда

$$x^3 - 4x^2 - 5x + 18 = 0. \text{ Один из корней равен } 2. \text{ Вынесем } x-2 \text{ за скобку. Получаем: } (x-2)(x^2 - 2x - 9) = 0. \text{ [Проверить правильность можно просто раскрыв скобки]. } x^2 - 2x - 9 = 0. D = 4 - (-9 \cdot 4) = 40 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{40}}{2} = 1 \pm \sqrt{10}$$

~~Ответ: $x_1 = 1 + \sqrt{10}$; $x_2 = 1 - \sqrt{10}$~~

Теперь проверим наши корни, подставив их в

~~$\sqrt{x^3 - 18x - 5}$~~ $x^3 - 18x - 5 \geq 0$ (Это условие в подкоренное выражение)

$$2^3 - 18 \cdot 2 - 5 \geq 0$$

$$8 - 36 - 5 \geq 0$$

$$-33 \geq 0. \text{ — Противоречие}$$

~~$(1 + \sqrt{10})^3 - 18 - 18\sqrt{10} - 5 \geq 0$~~
 ~~$1 + 10\sqrt{10} + 3 \cdot 10 + 3\sqrt{10} - 18 - 5 - 18\sqrt{10} \geq 0$~~
 ~~$41 - 15\sqrt{10} - 18\sqrt{10} \geq 0$~~
 ~~$18 - 15 \cdot 3 \geq 0$~~
 $\sqrt{10} > 3.$
 $\rightarrow \text{Противоречие.}$

$$(1 - \sqrt{10})^3 - 18 + 18\sqrt{10} - 5 \geq 0$$

$$1 - 10 + 3 \cdot 10 - 3\sqrt{10} - 18 - 5 + 18\sqrt{10} \geq 0$$

$$(1 + \sqrt{10})^3 - 18 - 18\sqrt{10} - 5 \geq 0$$

$$1 + 10\sqrt{10} + 30 + 3\sqrt{10} - 23 - 18\sqrt{10} \geq 0$$

$$8 - 5\sqrt{10} \geq 0 \quad \sqrt{10} > 3$$

$$8 - 5 \cdot 3 \geq 0$$

→ Противоречие.

$$(1 - \sqrt{10})^3 - 18 + 18\sqrt{10} - 5 \geq 0$$

$$1 - 10\sqrt{10} + 30 - 3\sqrt{10} - 18 - 5 + 18\sqrt{10} \geq 0$$

$$8 + 5\sqrt{10} \geq 0. \text{ — Справедливо.}$$

$$\text{Ответ: } x = 1 - \sqrt{10}$$

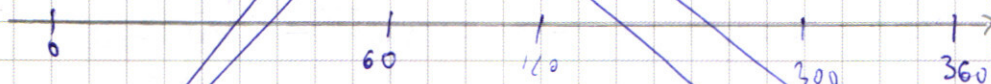
№ 5.

Максимальная сумма чисел равна 60 ($1 \cdot 60$), а максимальная равна 360 ($6 \cdot 60$). П.к. ~~каждой~~ кости

не зависят друг от друга ~~то сумма из~~

то задачу можно свести к: "Случайно выбрано число из промежутка $[60; 360]$, где число и будет суммой."

Введем промежутки на числовой прямой.



меньше 120 — $[60; 119]$ (т.к. сумма $\in \mathbb{N}$) — 60 чисел

не меньше 300 — $[300; 360]$ — 61 число.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Докажем, что ~~вероятность~~ ^{КС} [в дальнейшем будем писать ~~вер~~] ^{$160 > a \geq 0$}
какой-то способ
получить сумму $60+a$ равно $360-a$, где $a \in \mathbb{N}$

Пусть было несколько единиц, двоек, троек и т.д. В
сумме они дают $60+a$. Запишем единицы на ~~двоек~~ ^{$7-1$} ,
~~двоек~~ ^{$7-2$} на ~~троек~~ ^{$7-3$} , тройки на ~~двоек~~ ^{$n-1$} и ~~троек~~ ^{$n-2$} и т.д.

Тогда ~~получим~~ ~~какой-то способ~~ ~~получим~~ ~~какой-то способ~~
Итак. Тогда получаем: $7 \cdot 60 - (60+a) = 360-a$.

Итак и т.д.

Таким образом, КС получить $60+a$ и КС получить $360-a$ равно

~~какой-то способ~~

, и если заменить 1 на 6, 2 на 5, 3 на 4 и наоборот

получим из любого способа ~~получим~~ ^{способ} $60+a$, ~~получим~~

получим $360-a$, который уже есть, и наоборот, то

вероятность выпадения одинаковая у $60+a$ и $360-a$.

(Пример: 62 и 358 ($a=2$), $62 = 1 \cdot 58 + 2 \cdot 2$; $62 =$
 $= 1 \cdot 59 + 3 \cdot 1$ _{ит} $358 = 6 \cdot 58 + 5 \cdot 2$ _{ит}; $358 = 6 \cdot 59 + 4 \cdot 1$ _{ит})

Запомним, что $ит$ < 120 от 60 до $360 - 60, a$

$ит$ ≥ 300 от 60 до $360 - 61$. Ну и т.д.

вероятности ~~какой-то способ~~ ^{от 60 до 119} и вероятности от 360 до -301 .

Соответственно равно, до этого еще $ит$ 300 ,

которое тоже можно получить с этой вероятностью,
то сумма с большей вероятностью попадет в
промежуток $[300; 360]$, чем $[60; 120]$.

Ответ: Большая вероятность ≥ 300 .

№ 7.

$$\begin{cases} a^2 - 2ax + 10y + x^2 + y^2 = 0 \\ (x+12)^2 + (y-5)^2 = 169 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-a)^2 + (y+5)^2 = 5^2 \\ (x+12)^2 + (y-5)^2 = 13^2 \end{cases}$$

1-ое уравнение это окружность с центром $(a; -5)$ и $R = 5$
(где R - радиус) ~~и т.д.~~

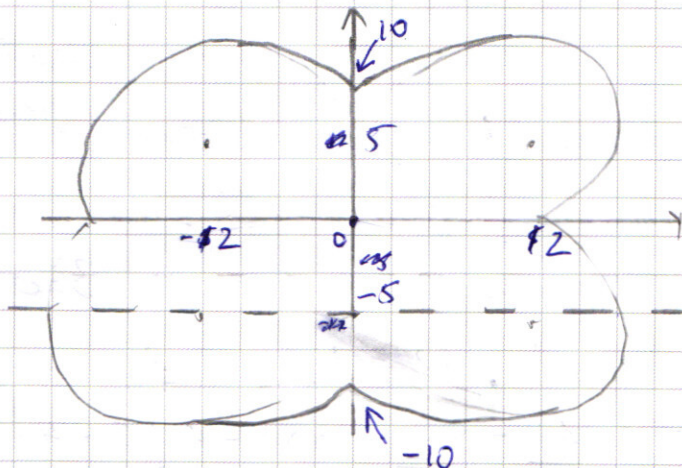
2-ое уравнение можно разбить на 4 случая

$(x > 0, y > 0; x < 0, y > 0; x > 0, y < 0; x < 0, y < 0)$

Тогда центры окр-ей соответственно в точках:

$(-12; 5); (-12; 5); (12; -5); (-12; -5)$.

Начертим на ~~плоскости~~ ^{плоскости} ~~координатной~~ ^{координатной} плоскости



На пунктирной линии
имеет центр окружности
1-ого уравнения.
Кроме того, точка $(0; 0)$
Также удовлетворяет 2-му
уравнению.

Если ~~тогда~~ $20 \geq a \geq -20$, то количество точек пере-
сечения будет меньше 2, ~~это~~ ^{за исключением} $a = 0$.

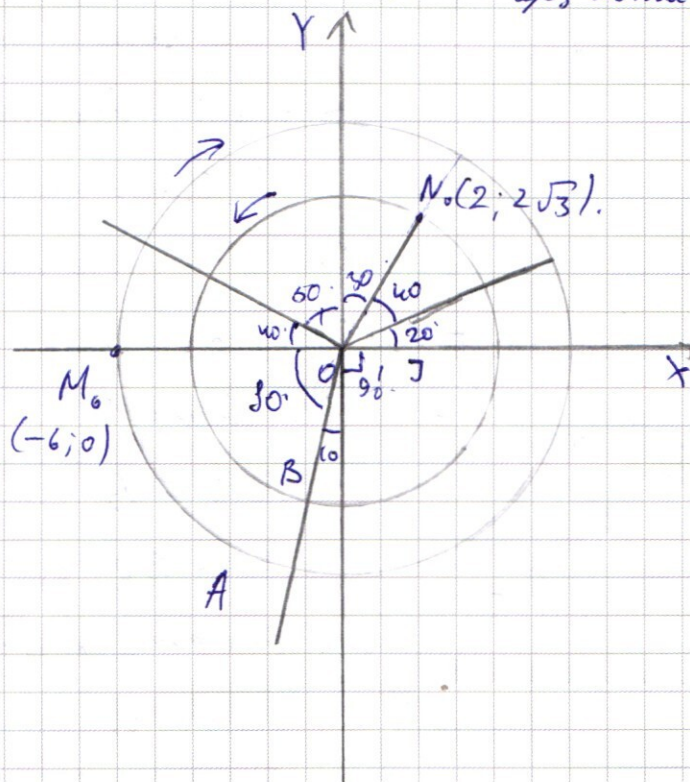
Также если $a \in (-\infty; -30]$ то количество точек пересечения
 > 2 . Также также при $a \in [30; +\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ при $a \in (-30; -20)$ или $a \in (20; 30)$ или $a > 0$, то

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

точек пересечения будет равно две.

2) (Вспомогательная — ~~прямая~~ проходит через центр и центра, проходит и через котла) ~~и~~



Разобьем окружность на
контрастные радиусы конусов.

А, а вторую В.

$$\text{Радиус } B = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$$

П.к. скорость котла — по до-
вня скорости центра, но
если кот пройдет 4 угла
то центр 2д. угла. (это
естественно центральный)

Разобьем точку (2; 0) — J,

$$\text{тогда } N_0 O = 4, O J = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle J N_0 O = 30^\circ = \angle N_0 O Y. \text{ Минимальное расстояние —}$$

это разность радиусов. ($\Rightarrow 6 - 4 = 2$), а так как ^{если} ~~прямая~~

проводящая через эти две точки, проходит еще и через ~~центр~~

общий центр, и наоборот $\angle N_0 O M_0 = 120^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow$ если кот пройдет 40°, а центр 80°, то они и

то же O окажутся на одной прямой. Затем от

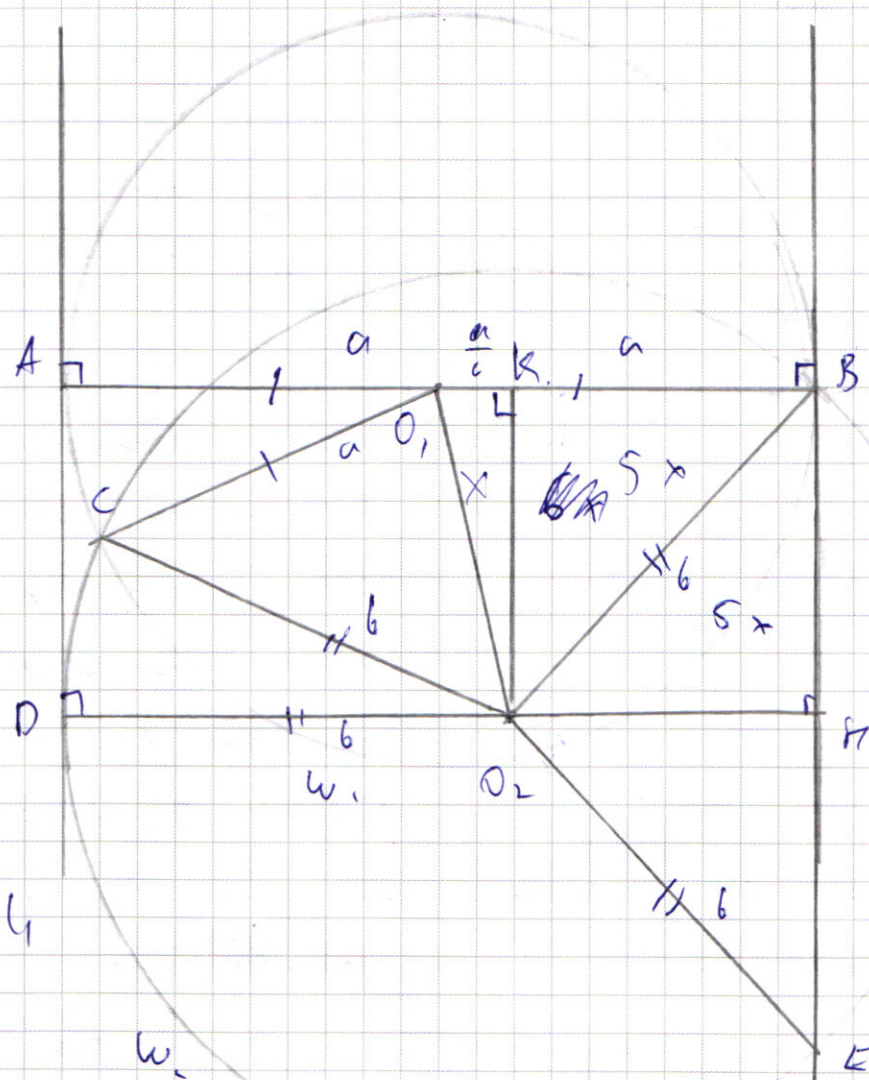
встретимся, если кот ~~пройдет~~ 120°, а центр 240°.

и еще раз так. После 3-ей ~~встречи~~ 4-ая

будет на месте 1-ой. П.к. кот ~~пройдет~~ ^{обойдет весь круг (360°)}

Запишем, что $\frac{R_A}{R_B} = \frac{6}{2} = \frac{3}{2} = k$ — коэф. пропорц.

NE



Then l_1, l_2 are

онка касается $\omega_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow A$ и B - диаметры

противоположности. $\rightarrow$

A, O, B - на огуном
хруллант.

~~Тогда~~ Пусть $AO_1 = a$, a

$$\cdot O_2 D = b$$

Поэма В.О.С. -

действ. и $\Delta B_{0,0,2} =$

$$= \Delta CO_2 O_2$$

Problema boron

us O_2 ka BE u

показ пересечения

назовем κ , тогда

D, O, H - на огни

приближ. ; $BN \approx HE$.

$$(\Delta_m h, \text{BO}_2 = \text{EO}_2) \Rightarrow \Delta S_{\text{BHO}_2} = S_{\Delta \text{EHO}_2} \quad | \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\text{BO}_2\text{CO}_2}}{S_{\text{BO}_2\text{E}}} = \frac{2S_{\text{BO}_2\text{O}_1}}{2S_{\text{BKCO}_2}} = \frac{S_{\text{BO}_2\text{O}_1}}{S_{\text{BKCO}_2}} = \frac{6}{5} = \frac{6x}{5x}$$

Опустим перпендикуляр из O_2 на AB и точку пересечения назовем K . Тогда O_2KBK - прямоугольник $\Rightarrow$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$KO_2 = BK \cdot \frac{1}{2}; KB = O_2 H \Rightarrow \triangle KO_2 B \sim \triangle O_2 KB \Rightarrow S_{\triangle KO_2 B} = X.$$

$$\frac{X}{6X} = \frac{S_{\triangle KO_2 B}}{S_{\triangle KBO_2}} = \frac{\frac{O_1 K \cdot KO_2}{2}}{\frac{O_1 B \cdot KO_2}{2}} = \frac{O_1 K}{O_1 B} = \frac{O_1 K}{a} \Rightarrow \frac{O_1 K}{a} = \frac{1}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O_1 K = \frac{a}{6}.$$

$$AKO_2 B - \text{прямоугольник} \Rightarrow AK = O_2 B \Rightarrow a - \frac{a}{6} = b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = \frac{5a}{6}.$$

$$\frac{R_{w_1}}{R_{w_2}} = \frac{b}{a} = \frac{\frac{5a}{6}}{a} = \frac{5a}{6a} = \frac{5}{6} \quad (R - \text{радиус}).$$

Ответ: $\frac{R_{w_2}}{R_{w_1}} = \frac{6}{5}$

№ 5.

$$4x^4 + x^2 + 6x - 5x^2(x+3) + 9 = 0.$$

Если $x = -3$, то равенство неверно.

Если $x < -3$, то

$$4x^4 + x^2 + 6x + 5x^3 + 15x^2 + 9 = 0$$

$$4x^4 + 16x^2 + 5x^3 + 6x + 9 = 0.$$

$$4x^4 + 5x^3 + 16x^2 + 6x + 9 = 0.$$

Если $x > -3$, то.

$$4x^4 + x^2 + 6x - 5, 3 - 15x^2 + 9 = 0.$$

Один из корней $= 1$

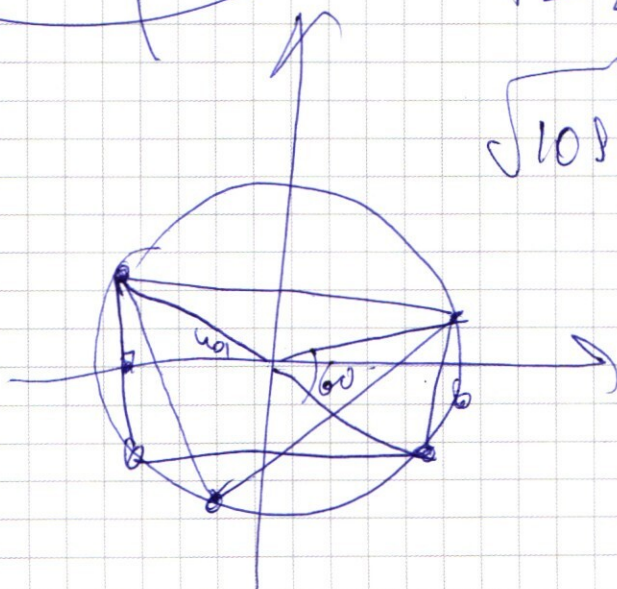
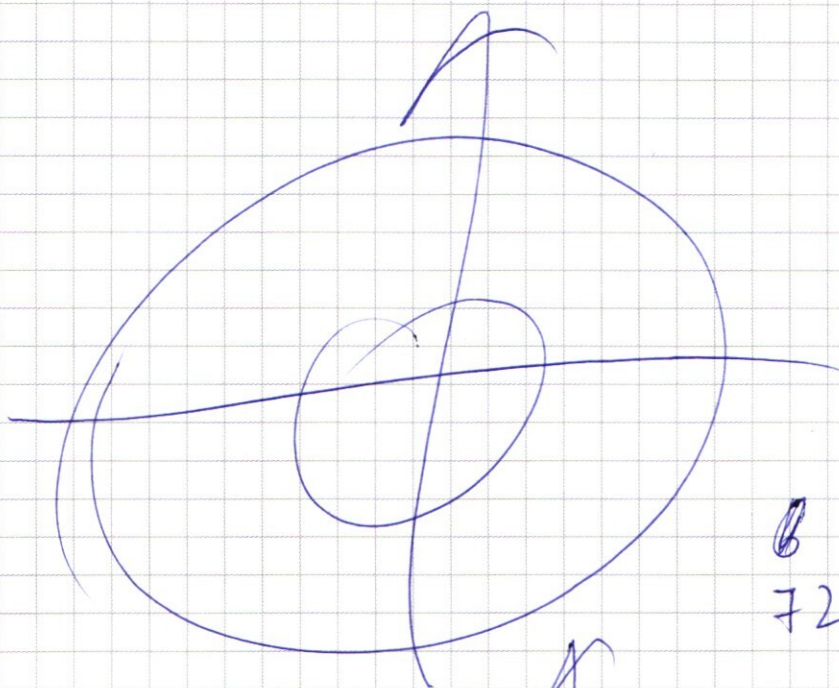
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

а) $\text{вер}(60 + a) = (360 - a)$
 вер

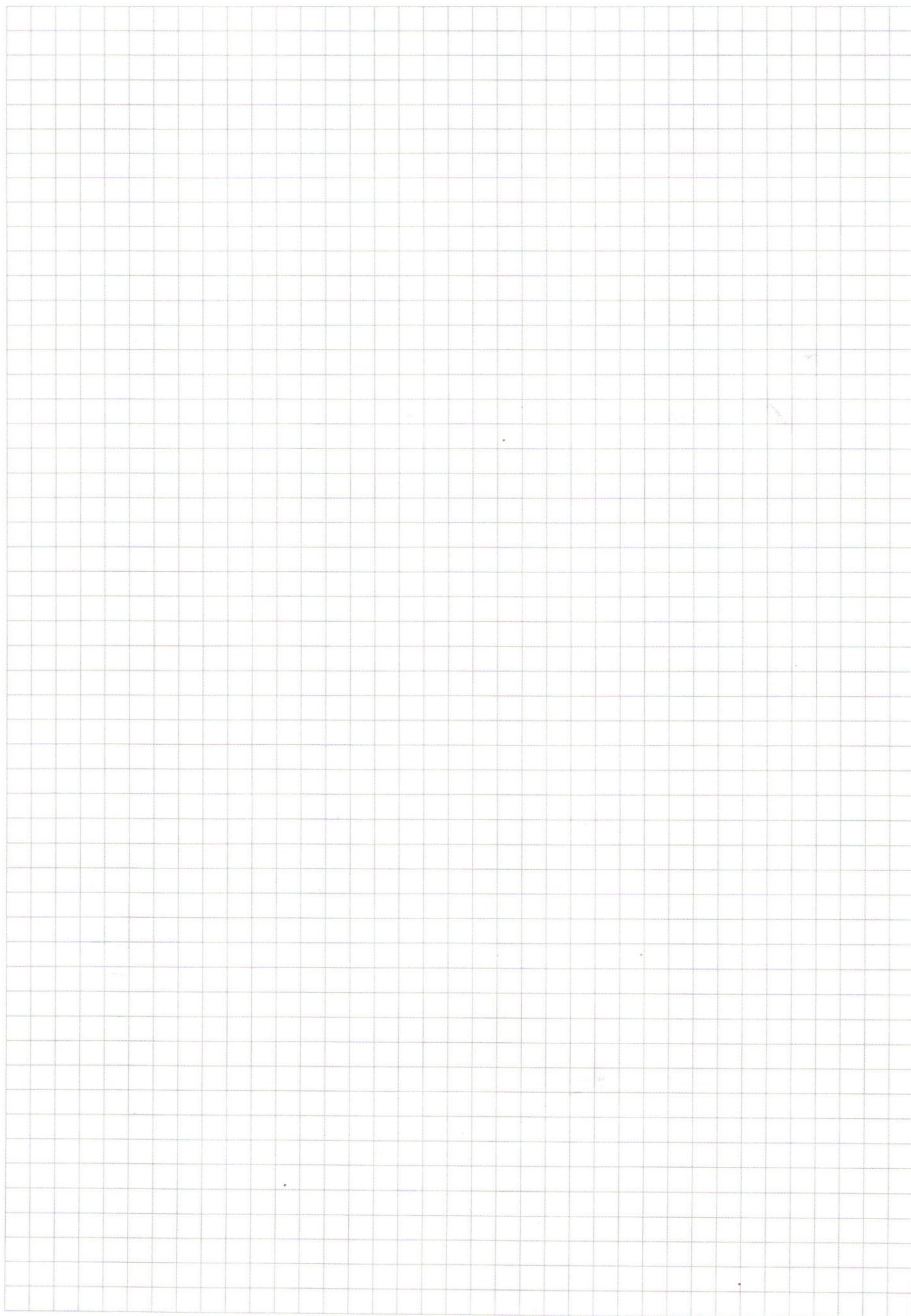
б) $\text{вер}(50 + a + 1) = \text{вер}?$

а

Заметим 1-6, 2-5, 3-4



б) $72 + 2 \cdot 36 \cdot \cos \frac{60}{2}$
 $\sqrt{108} = \sqrt{36 \cdot 3} = 6\sqrt{3}$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$$x(2-a)+y$$~~

$$x(a+z)+y(5+b)+z(-c+1) = 2b+a$$

~~$$x(2-a)+y(5+b)+z(-c+1)$$~~

~~$$2x+b$$~~

$$\begin{cases} 2x+by+z = 2b \\ ax+5y-cz = a \end{cases}$$

~~$$2x+b$$~~

~~$$x(2-a)+y(5+b)+z(-c+1)$$~~

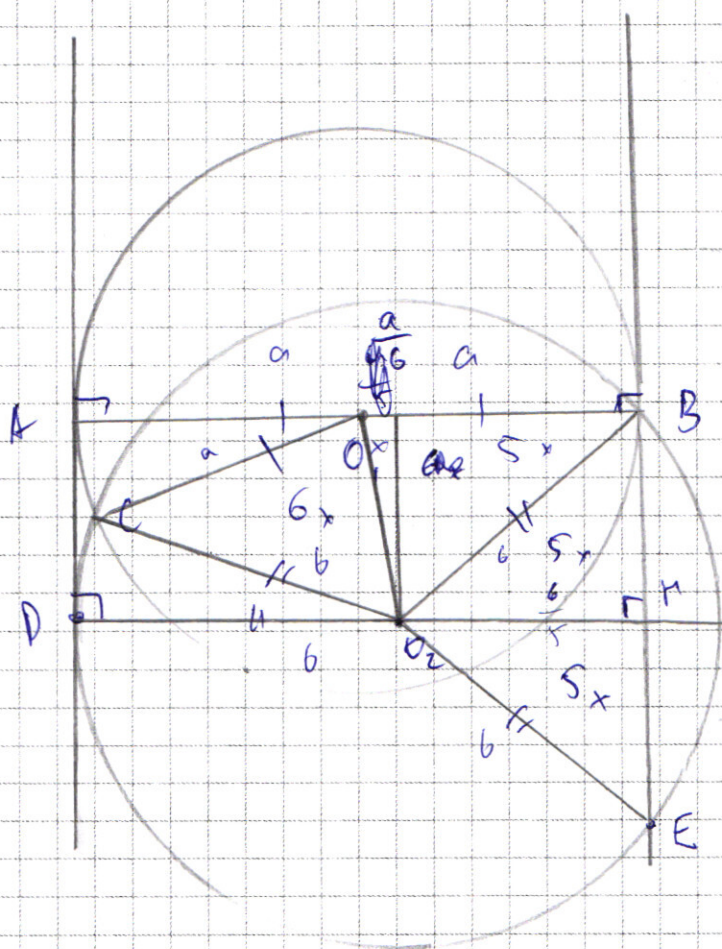
~~$$2x+b-2x=by$$~~

$$\frac{a}{b} =$$

$$\frac{OB = h}{OH = h} = \frac{6}{5}$$

~~$$\frac{a}{b} = \frac{6}{5}$$~~

$$\frac{a}{OH} = \frac{6}{5}$$



$$6c = a - c$$

$$c = \frac{a}{6}$$

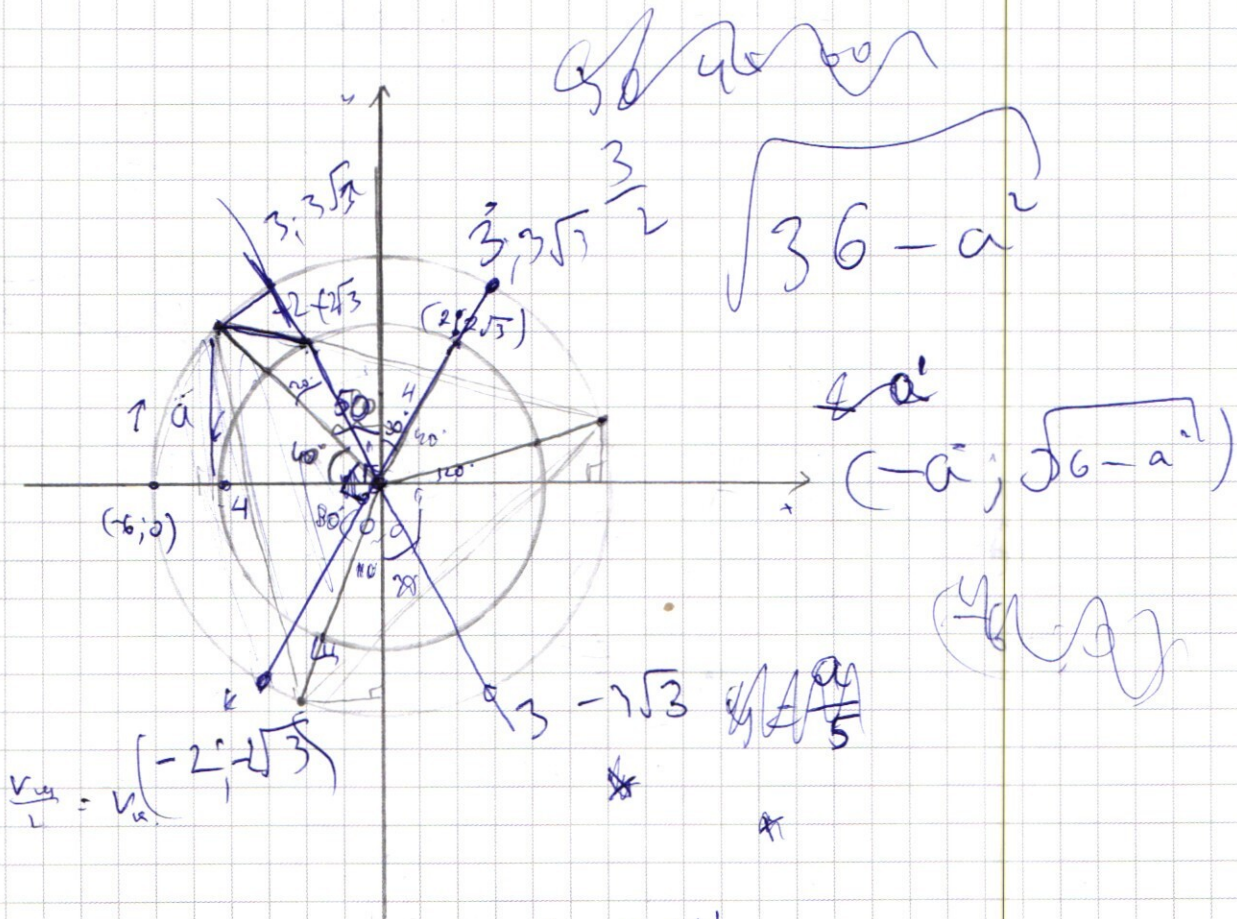
$$b = a + \frac{a}{6}$$

$$b = \frac{7a}{6}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\cancel{a}}{\frac{7\cancel{a}}{6}}$$

$$\frac{6}{7}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$x = \frac{a+2b}{a+2}$$

$$\begin{cases} 2x - by + z = 2b \\ ax + 5y - cz = a \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2x - by + z - 2b + ax + 5y - cz + a &= 0 \\ x(a+2) + y(5-b) + z(1-c) - a - 2b &= 0 \\ x(a+2) + y(5-b) + z(1-c) &= a + 2b \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2x - by - 2b + z = 0 \\ ax + 5y - cz - a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - b(y+2) + z = 0 \\ a(x-1) + 5y - cz = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a+2 &= 0 \\ 5-b &= 0 \\ 1-c &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} a &= -2 \\ b &= 5 \\ c &= 1 \end{aligned}$$

$$2x - b(y+2) + z - a(x-1) + 5y - cz = 0$$

$$\frac{S_{BO_1CO_2}}{S_{BO_2E}} = \frac{6}{5}$$

$$\parallel$$

$$\frac{S_{BO_1O_2}}{S_{BO_2H}}$$

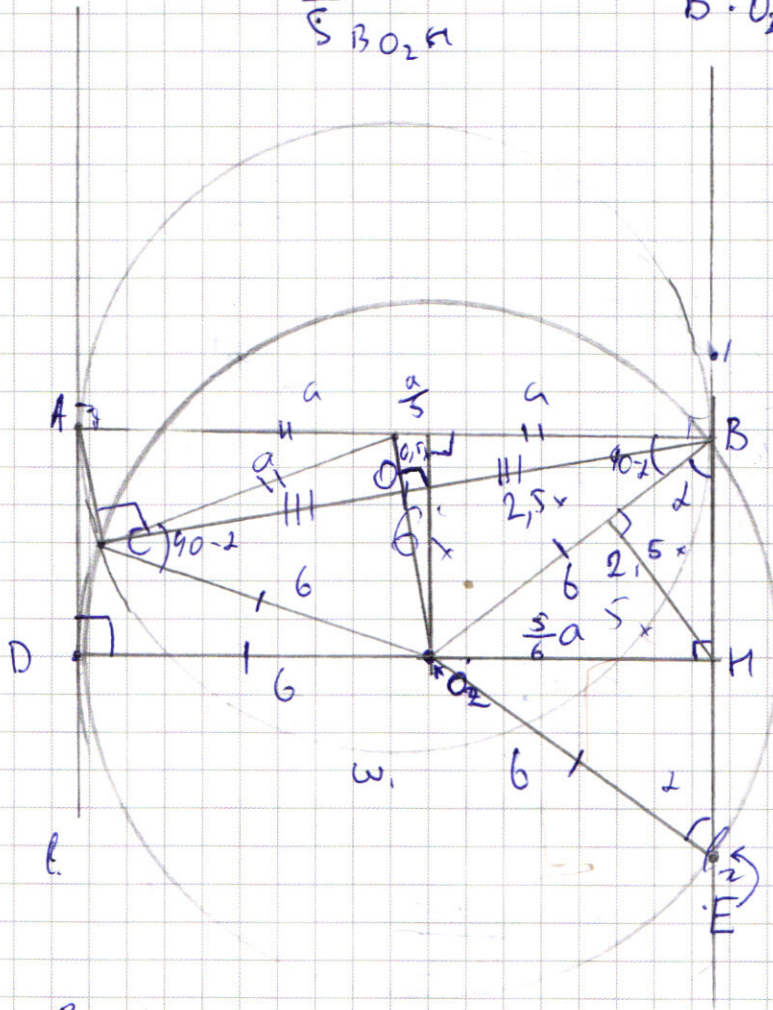
$$\frac{R_{w_2}}{R_{w_1}} = 1 = \frac{6}{a}$$

$$\frac{a \cdot b \cdot \sin(90^\circ - \alpha)}{b \cdot O_2H \cdot \sin 90^\circ} = \frac{8}{5}$$

$$\frac{a}{O_2H} = \frac{6}{5}$$

$$BH = \sqrt{b^2 - \frac{25}{36} a^2}$$

$$O_1O_2 = O_1B^2 + 2ab \cos(90^\circ - \alpha)$$



$$\frac{O_1B}{O_2B}$$

$$c \cdot a = 2,5x$$

$$c \cdot d = 0,5x$$

$$\frac{a}{d} = 5$$

$$a = 5d$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1 + 10 + 3 \cdot 10 + 3\sqrt{10}$$

$$\geq 300 \quad < 120$$

60

$$x_{\text{max}} \geq 5$$

1

$$2.59 \neq 1$$

~~400~~

$$(x-2)(x^2-2x-9)$$

$$D = 4 + 36 = 40$$

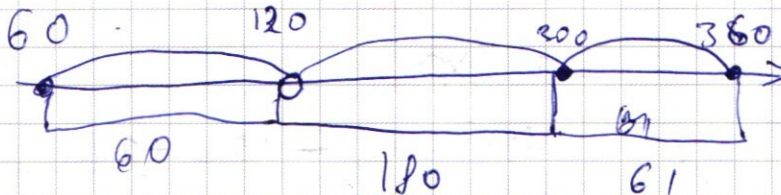
$$x^2 - 2x - 9 > 0$$

$$121 - 299$$

$$360$$

$$60$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{40}}{2} = 1 \pm \sqrt{10}$$



$$61$$

$$359$$

$$60$$

$$360$$

$$(\sqrt{x^3 - 18x - 5} + 2) \cdot |x^3 - 4x^2 - 5x + 18| \leq 0$$

$$= 0$$

$$< 0$$

$$\geq 0$$

$$\sqrt{x^3 - 18x - 5} + 2 = 0$$

$$x^3 - 4x^2 - 5x + 18 = 0$$

$$x^3 - 4x^2 - 5x + 18 = 0$$

$$\text{вер}(a) = \text{вер}(360 - a)$$

$$\frac{x^3 - 4x^2 - 5x + 18}{x^3 - 2x^2} \cdot \frac{x-2}{x^2 - 2x - 9}$$

$$-2x^2 - 5x$$

$$-2x^2 + 4x$$

$$-9x + 18$$

$$\text{вер}(a)$$

$$360 - a$$

$$(\sqrt{x^3 - 18x - 5} + 2) \cdot |x^3 - 4x^2 - 5x + 18| < 0$$

$$\leq 0 \qquad \geq 0$$

$$\sqrt{x^3 - 18x - 5} + 2 < 0$$

$$x^3 - 18x - 5 \geq 0$$

$$\sqrt{x^3 - 18x - 5} < -2$$

$$|x+3|=0$$

$$4x^4 + x^2 + 6x - 5x^3 - 15x^2 + 9 = 0$$

$$4 \cdot 81 + 9 - 18 + 9 \neq 0$$

$$x > -3$$

$$4x^4 + x^2 + 6x - 5x^3 - 15x^2 + 9 = 0$$

$$4x^4 - 5x^3 - 14x^2 + 6x + 9$$

$$4x^4 - 4x^3$$

$$-x^3 - 14x^2$$

$$-x^3 + x^2$$

$$-15x^2 - 6x$$

$$-15x^2 + 15x$$

$$-9x + 9$$

$$(x+3)^2$$

$$x^2 + 6x + 9$$

$$24x^3 - 36x^2$$

$$-29x^3 - 50x^2 - 6x$$

$$4x^3 - x^2 - 15x - 9$$

$$4x^3 - 4x^2$$

$$-5x^2 - 15x$$

$$-5x^2 - 5x$$

$$10x - 9$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(x-a)^2 + (y+5)^2 = 25$$

b, a
 b, a
 $b, (7-a)$
 $11x-6=0$

$$(x-a)^2 + y^2 + 10y = 0$$

$$6y-8=172$$

$$(x-a) + y + 10y + 2r = 25$$

$$(x-a)^2 + (y+5)^2 = 5^2 \quad \text{--- окр } R=5, (a; -5)$$

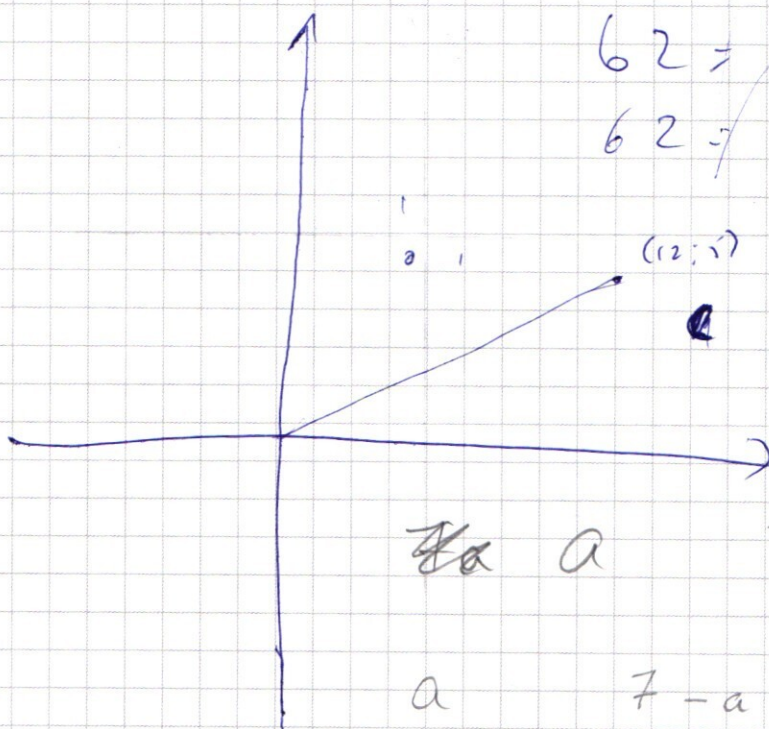
$$(x+12)^2 + (y-5)^2 = 13^2$$

$$x, y > 0$$

$$(x+12)^2 + (y-5)^2 = 13^2$$

$$(x+12)^2 + (y-5)^2 = 13$$

$$(x+12)^2 + (y-5)^2 = 13^2$$



$$62 = 1.58 + 2 + 2$$

$$62 = 1.58 + 3$$

$$C_{60}^2 + C_{60}^1$$

$$420 - 60 = 360$$

