

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 2

ШИД

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Вокруг птичьей кормушки в одной плоскости с ней по двум окружностям с одинаковой скоростью летают синица и снегирь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой кормушка (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Синица движется по часовой стрелке, а снегирь – против. В начальный момент времени синица и снегирь находятся в точках $M_0(\sqrt{3}; 3)$ и $N_0(6; -2\sqrt{3})$ соответственно. Определите координаты всех положений снегиря, в которых расстояние между птицами будет кратчайшим.
- 2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a, \\ 3bx + (a-b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

- 3. [4 балла] Решите уравнение $\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$.
- 4. [6 баллов] Решите неравенство $6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2|x+1| + 1 \geq 0$.
- 5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 7000. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
- 6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 7 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10, \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

Система имеет бесконечно много решений,
если:

$$\frac{2(a-b)}{3b} = a \text{ и } \frac{6}{b(a-b)} = a$$

$$\frac{2(a-b)}{3b} = \frac{6}{b(a-b)}$$

$$(a-b)^2 = 9$$

$$a-b=3 \text{ или } b-a=3.$$

$$a=b+3 \text{ или } a=b-3.$$

1) Пусть $a=b+3$:

$$\frac{2(b+3-b)}{3b} = b+3$$

$$6 = 3b(b+3)$$

$$3b^2 + 9b - 6 = 0$$

$$b^2 + 3b - 2 = 0$$

$$D = 9 + 8 = 17$$

$$b_1 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$$

$$b_2 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2},$$

тогда $a_{1,2} = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \pm 3 = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

2) Пусть $a=b-3$:

$$\frac{2(b-3-b)}{3b} = b-3$$

$$-2 = 3b(b-3)$$

$$-2 = b^2 - 3b$$

$$b^2 - 3b + 2 = 0$$

$$D = 9 - 4 = 1$$

$$b_3 = \frac{3+1}{2} = 2$$

$$b_4 = \frac{3-1}{2} = 1,$$

тогда $a_3 = -1; a_4 = -2.$

Ответ: 1) $a = -1; b = 2$; 2) $a = -2; b = 1$;

3) $a = \frac{3+\sqrt{17}}{2}; b = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$; 4) $a = \frac{3-\sqrt{17}}{2}; b = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}.$

№4

Пусть $|x+1| \geq 0$, тогда:

$$6x^4 + x^2 + 2x - 5x^3 - 5x^2 + 1 \geq 0$$

$$x^2(6x^2 - 5x - 4) \geq -(2x+1)$$

Разложим $6x^2 - 5x - 4$ на множители:

$$D = 25 + 96 = 121$$

$$x_1 = \frac{5+11}{12} = \frac{4}{3}; x_2 = \frac{5-11}{12} = -\frac{1}{2}$$

$$6x^2(x - \frac{4}{3})(x + \frac{1}{2}) \geq -2(x + \frac{1}{2})$$

$$6x^2(x - \frac{4}{3}) \geq -2$$

$$3x^2(x - \frac{4}{3}) \geq -1$$

$$3x^3 - 4x^2 \geq -1$$

$$3x^3 - 4x^2 + 1 \geq 0$$

$$3x^3 - 3x^2 - x^2 + 1 \geq 0$$

$$3x^2(x-1) - (x-1)(x+1) \geq 0$$

$$(x-1)(3x^2 - x - 1) \geq 0$$

Если $x \geq 1$, то $3x^2 - x - 1 \geq 0$.

Минимальное значение $3x^2 - x - 1 = \frac{1}{6}$,
значит $x \geq 0$, $\Rightarrow x \geq 1$ (при меньших
значениях, чем 1

$$3(x-1)(x - \frac{1-\sqrt{13}}{6})(x - \frac{1+\sqrt{13}}{6}) \geq 0.$$

если $x \leq 1$, то значение выражения может
меньше 0, чего не может быть, значит

$$x - \frac{1+\sqrt{13}}{6} = 0$$

$$x = \frac{1+\sqrt{13}}{6}$$

$$\frac{x+\sqrt{13}}{6} - \frac{x-\sqrt{13}}{6} - \frac{\sqrt{13}}{6} = \frac{2-\sqrt{13}}{6} - \frac{1-\sqrt{13}}{6}$$

см. стр. №3

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

если $x < \frac{1}{\sqrt{13}}$, то $x \leq \frac{1 + \sqrt{13}}{6}$.

all. comp. N_2

и больше или равно $\frac{1-\sqrt{13}}{6}$.

а меньше $\frac{1-\sqrt{13}}{6}$ × быть не может.

2) Пусть $|x+1| < 0$, тогда $x < -1$ и:

$$6x^4 + x^2 + 2x + 5x^3 + 5x^2 + 1 \geq 0.$$

$$6x^4 + 6x^2 + 5x^3 + 2x + 1 \geq 0$$

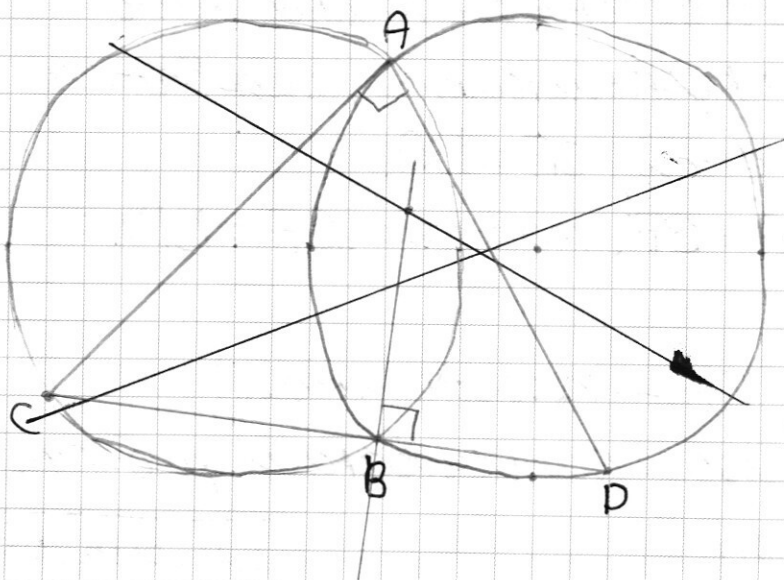
$$x^3(6x+5) \geq -(6x^2+2x+1)$$

$$x^2(6x^2 + 5x + 6) \geq -(2x + 1)$$

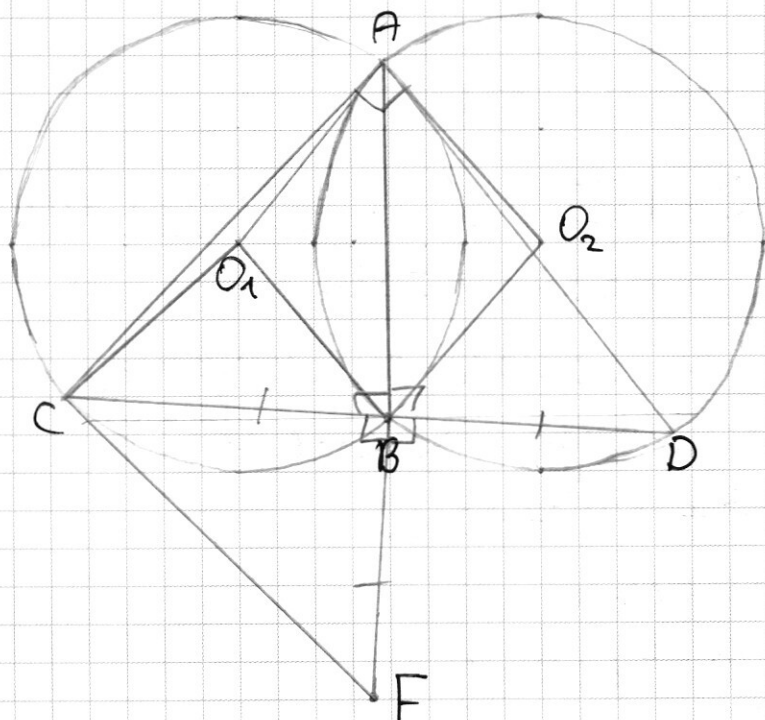
~~$6x^3 + 1$~~ если $x < -1$, то $6x^4 + 6x^2 + 1$ должно
быть больше $5x^3 + 2x$, что выполняется
при любом $x < -1$.

Antwort: 1) $x \in \left[\frac{1+\sqrt{13}}{6}; +\infty \right)$; 2) $x \in \left[\frac{1-\sqrt{13}}{6}; 1 \right]$;

3) $x \in (-\infty; -1]$:

 $\sqrt{6}$ 

См. смр. №4



- 1) $\triangle O_1AB = \triangle AO_2B$ по 3 сторонам ($O_1A = O_1B = AO_2 = O_2B$ — радиусы и AB — общая).
- 2) $\Rightarrow \angle AO_1B = \angle AO_2B$.
- 3) $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AO_1B$ — вписанный угол.
и $\angle ADB = \frac{1}{2} \angle AO_2B$ — вписанный угол;
- 4) значит $\angle ACB = \angle ADB = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$.
- 5) $\Rightarrow AC = AD$ (углы при основании равны).
- 6) AB — высота, проведённая к основанию равнобедренного треугольника, следовательно является медианой, $CB = BD$.
- 7) А значит, $CB = BF$, так как $BF = BD$ по условию.
- 8) $\angle O_1CF = 90^\circ$ (CF — касательная)
 $\angle BCF = 45^\circ$ (углы при основании р.б. треугольника равны).

ам. стр. №5

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

9) ^{значит} $\angle O_1$ и $\angle O_2$ принадлежат AC и AD . см. стр. №4

10) $\Rightarrow CO_1 = O_1B = 7$;

11) $CB = \sqrt{2} \cdot 7$

12) $CF = \sqrt{2} CB = 14$ } по теореме Пифагора

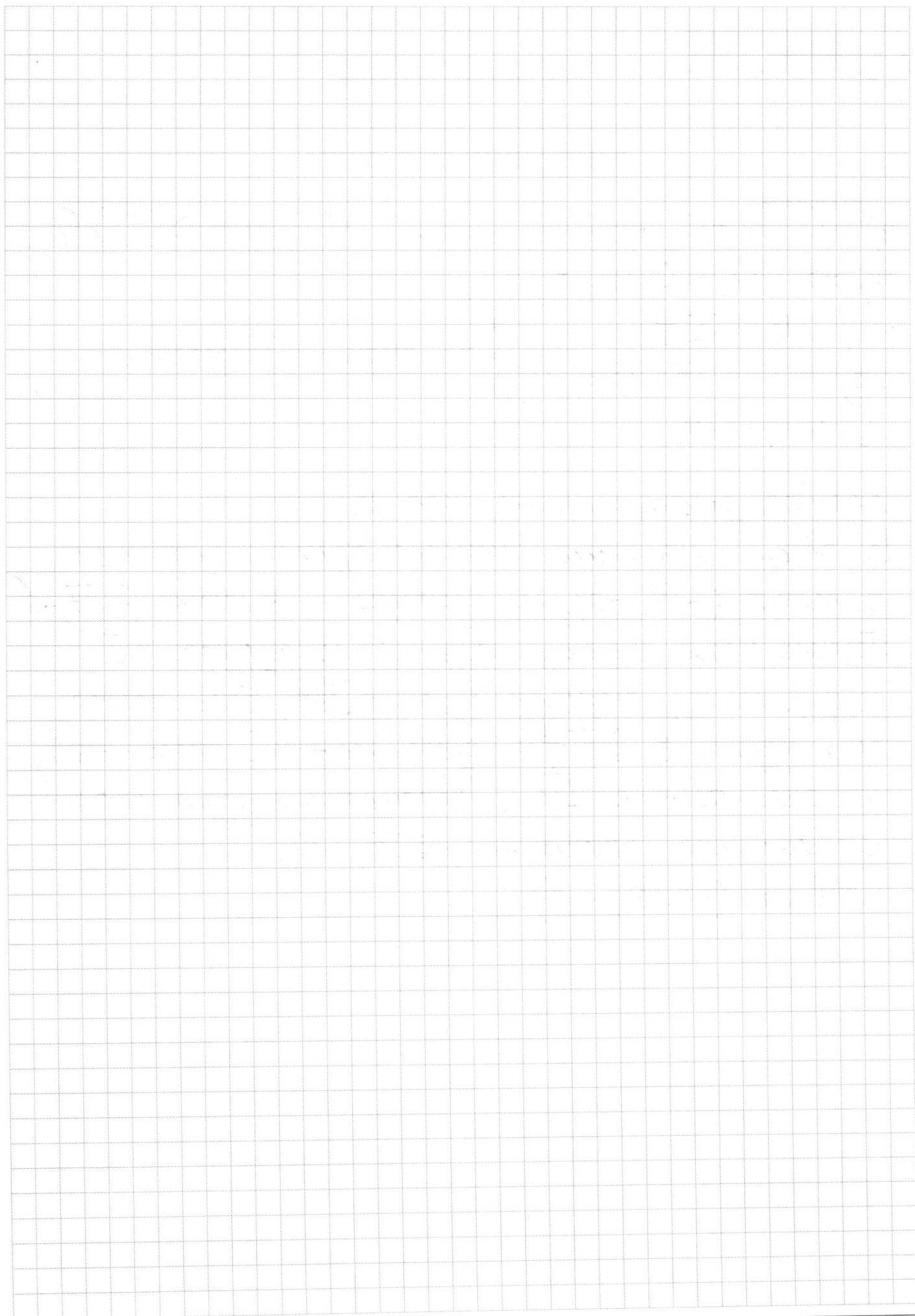
Ответ: 14.

№1 (продолжение) см. стр. 8.

В этот момент линия будет находиться в точке $(-\sqrt{3}; -3)$, а скелер — в точке $(-2\sqrt{3}; -6)$

Также когда линия будет находиться в I коорд. четв., скелер будет в ~~II~~ ^{III}, после этого она будет в ~~III~~ ^{IV}, а скелер — в I, она — в I, а скелер — в IV. Расстояние будет кратчайшим в 1 точке — $(-2\sqrt{3}; -6)$.

Ответ: $(-2\sqrt{3}; -6)$.



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$$

$$\frac{(x+5)^2(x^3-16x+25)}{4} = (x^2+3x-10)^2$$

Разложим $x^2+3x-10$ на множители:

$$D_1 = 9 + 40 = 49$$

$$x_1 = \frac{-3+7}{2} = 2; x_2 = \frac{-3-7}{2} = -5.$$

$$x^2+3x-10 = (x-2)(x+5).$$

$$\frac{(x+5)^2(x^3-16x+25)}{4} = (x-2)^2(x+5)^2$$

$$\Rightarrow x^3-16x+25 = 4(x-2)^2$$

$$x^3-16x+25 = 4(x^2-4x+4)$$

$$x^3-16x+25-4x^2+16x-16=0$$

$$x^3-4x^2+9=0$$

$$x^3-3x^2-x^2+9=0$$

$$x^2(x-3)-(x^2-9)=0$$

$$x^2(x-3)-(x-3)(x+3)=0$$

$$(x-3)(x^2-x-3)=0.$$

$$x_3 = 3;$$

Решим уравнение $x^2-x-3=0$:

$$D_2 = 1+12=13$$

$$x_{34} = \frac{1+\sqrt{13}}{2}; x_5 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}.$$

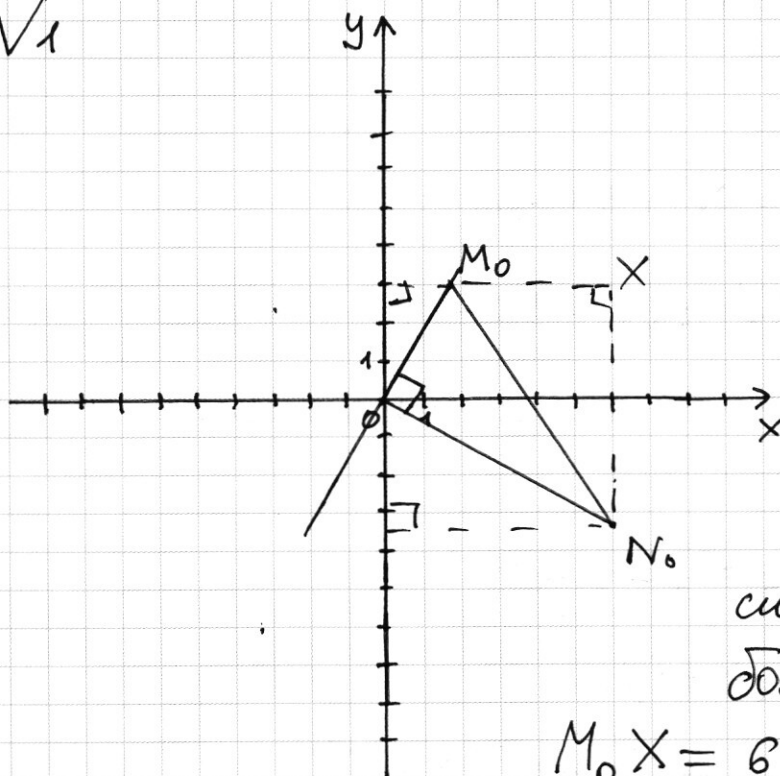
см. стр. №8

см. стр.

см. стр. №7

Ответ: 3 ; $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$; $\frac{1-\sqrt{13}}{2}$.

№1



$$M_0O = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

$$N_0O = \sqrt{36+12} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}.$$

$$\frac{N_0O}{M_0O} = 2;$$

угловая скорость
синусы в 2 раза
больше.

$$M_0X = 6 - \sqrt{3};$$

$$N_0X = 3 + 2\sqrt{3}.$$

$$M_0N_0 = \sqrt{M_0X^2 + N_0X^2} = \sqrt{(6-\sqrt{3})^2 + (3+2\sqrt{3})^2} =$$

$$= \sqrt{36 - 12\sqrt{3} + 3 + 9 + 12\sqrt{3} + 12} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}.$$

$$\sqrt{OM_0^2 + ON_0^2} = \sqrt{12 + 48} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$$

$\Rightarrow \triangle OM_0N_0$ — прямоугольный по теореме,
обратной теореме Пифагора.

Значит, когда синусы пролетит 180° (поло-
вину своей окружности), скелер пролетит
лишь четверть (90°). А значит, в этот
момент точки в которых находятся при-
цы лежат на одной прямой с корнушкой;
между ними — наименьшее расстояние.
(см. стр. 5)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y - a = 0 \\ 3bx + (a-b)by - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2ax - 2bx + 6y - a = 0 \\ 3bx + aby - b^2y - 1 = 0 \end{cases}$$

$M_0 N_0 =$

$$\begin{array}{r} x^3 \\ 28 \\ \hline 1120 \end{array} \quad \begin{array}{l} (6-\sqrt{3})^2 + \\ + (3+2\sqrt{3})^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 112 \\ 8 \\ \hline 32 \end{array}$$

№5

$$\begin{array}{r} 7000 \overline{) 2} \\ 3500 \overline{) 2} \\ 1750 \overline{) 2} \\ 875 \overline{) 5} \\ 175 \overline{) 5} \\ 35 \overline{) 5} \\ 7 \overline{) 7} \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1750 \overline{) 2} \\ 16 \overline{) 875} \\ 15 \overline{) 14} \\ 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7000 \overline{) 125} \\ 625 \overline{) 56} \\ 750 \overline{) 750} \\ 0 \end{array}$$

$$(x-2)(x+5) = x^2 + 5x - 2x - 10$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ x \overline{) 42} \\ 80 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 336 \overline{) 8} \\ 32 \overline{) 42} \\ 16 \end{array}$$

Все эти числа должны состоять из:

1; 2; 2; 2; 5; 5; 5; 7, например: 12225557

$$N = \frac{8!}{3! \cdot 3!}$$

$$\begin{array}{r} 2240 \\ + 3360 \\ \hline 5600 \end{array}$$

$$42555711 \quad \frac{8!}{3! \cdot 2!}$$

$$85557111$$

$$12225557$$

$$11425557$$

$$11185557$$

$$D = 9 + 40 = 49$$

$$x_1 = \frac{-3+7}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-3-7}{2} = -5$$

$$\frac{1}{2} (x+5) \cdot \frac{1}{4} (x+5)^2 (x^3 - 16x + 25) = (x^2 + 3x - 10)^2$$

N5

7	0	0	0	2
3	5	0	0	2
1	7	5	0	2
8	7	5		5
1	7	5		5
3	5			5
7				7
1				7

Такие числа должны состоять из 3 двоек,⁽¹⁾ трёх пятёрок, семёрки и единицы;
или из одной 4, одной 2, трёх 5,⁽²⁾ двух единиц; или из одной 8, трёх 5, 7 и трёх единиц.⁽³⁾

$$1) n_1 = \frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 = 1120$$

$$2) n_2 = \frac{8!}{3! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2 = 3360$$

$$3) n_3 = \frac{8!}{3! \cdot 3!} = 1120$$

$$4) N = n_1 + n_2 + n_3 = 2 \cdot 1120 + 3360 = 2240 + 3360 = 5600$$

количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 7000

5) Обоснование:

1. Представим, что в 1) пункте все цифры восьмизначного числа разные; тогда таких чисел — $8!$, но в каждом числе три двойки и три пятёрки могут меняться местами $3!$ способами, значит на самом деле числа повторяются $3! \cdot 3!$ раз.

2. Аналогично и с пунктами 2) и 3).

Ответ: 5600.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^3 - 3x^2 - x^2 + 9 = 0$$

$$x^2(x-3) + (3-x)(3+x) = 0$$

$$x^2(x-3) - (x-3)(3+x) = 0$$

$$(x-3)(x^2 - 3 - x) = 0$$

$$(x+5)^2(x^3 - 16x + 25) = (x^2 + 3x - 10)^2 = (x-2)^2(x+5)^2$$

$$x^3 - 16x + 25 = 4(x-2)^2$$

$$x^3 - 16x + 25 = 4(x^2 - 4x + 4)$$

$$x^3 - 16x + 25 - 4x^2 + 16x - 16 = x^3 - 4x^2 + 9$$

$$x^3 - 4x^2 + 9 = x^3 - 3x^2 - x^2 + 9 = x^2(x-3) -$$

$$-(x-3)(x+3) = (x-3)(x^2 - x - 3) \quad D = 4 + 24$$

N4

$$6x^2(x^2+1) \geq -(5x^3+2x+1)^3 \left(x - \frac{1-\sqrt{13}}{6}\right) \left(x - \frac{1+\sqrt{13}}{6}\right) =$$

$$6x^4 + x^2 + 2x - 5x^3 - 5x^2 + 1 \geq 0$$

$$6x^4 + x^2 + 2x - 5x^3 - 5x^2 + 1 \geq 0 \quad -3x^2 - \frac{x(1+\sqrt{13})}{2}$$

$$6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$x^3(6x-5) \geq 4x^2 - 2x - 1$$

$$x^3(6x-5) \geq 4x^2 - 2x - 1$$

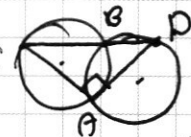
$$D = 4 + 16 = 20$$

$$x_1 = 2 + 2\sqrt{5}$$

$$6x^4 = x^3(6x-5)$$

$$2x^2(3x^2-4) = 5x^3 - 2x - 1$$

$$2x^2(3x^2-4) = 5x^3$$



25

$$x^2(6x^2+6+5x) \geq -(2x+1)$$

$$(x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$$

N2

Примем $\frac{2(a-b)x+6y}{3bx+(a-b)y} = a$, и $6y = 3abx$,

$$2(a-b)x = a(a-b)y$$

$$2y = 3abx$$

$$2y = abx$$

$$2x = aby$$

$$3x^2 - x - 1$$

$$D = 1 + 12 = 13$$

$$2(a-b) = 3ab$$

$$D = 1 + 12 = 13$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{13}}{6}$$

$$a = \frac{2(a-b)}{3b}$$

$$2a - 2b = 3ab$$

$$a(2 - 3b) = 2b$$

$$a = \frac{2b}{2 - 3b}$$

$$\frac{6}{b(2)}$$

$$\frac{1 - \sqrt{13}}{6}$$

$$-1, 1 + 1 = -1, 1 + 1$$

$$2(-3x + 6y) = -1$$

$$3 \cdot 2x - 3 \cdot 2y = 1$$

$$6x - 6y = 1$$

$$6x - 6y = 1$$

$$2(-2 - 1)x + 6y = -2$$

$$3 \cdot 1 \cdot x + (-2 - 1)y = 1$$

$$6x - 6y = 2$$

$$3x - 3y = 1$$

$$\frac{-3 + \sqrt{17}}{2} + 3 = \frac{6 - 3 + \sqrt{17}}{2} = 3 + \frac{\sqrt{17}}{2}$$

$$\frac{2(b+3-b)}{3b} = b+3$$

$$b^2 = 3b(b+3)$$

$$b^2 + 3b - 2 = 0$$

$$D = 9 + 8 = 17$$

$$1 \cdot 3 - 1 - 1 = 1$$

$$D = 1 + 12 = 13$$

$$D = 1 + 12 = 13$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{13}}{6}$$

$$a = \frac{2(a-b)}{3b}$$

$$2a - 2b = 3ab$$

$$a(2 - 3b) = 2b$$

$$a = \frac{2b}{2 - 3b}$$

$$\frac{6}{b(2)}$$

$$\frac{1 - \sqrt{13}}{6}$$

$$-1, 1 + 1 = -1, 1 + 1$$

$$2(-3x + 6y) = -1$$

$$3 \cdot 2x - 3 \cdot 2y = 1$$

$$6x - 6y = 1$$

$$6x - 6y = 1$$

$$2(-2 - 1)x + 6y = -2$$

$$3 \cdot 1 \cdot x + (-2 - 1)y = 1$$

$$6x - 6y = 2$$

$$3x - 3y = 1$$

$$\frac{-3 + \sqrt{17}}{2} + 3 = \frac{6 - 3 + \sqrt{17}}{2} = 3 + \frac{\sqrt{17}}{2}$$

$$\frac{2(b+3-b)}{3b} = b+3$$

$$b^2 = 3b(b+3)$$

$$b^2 + 3b - 2 = 0$$

$$D = 9 + 8 = 17$$

$$6x^4 + x^2 + 2x - 5x^3 - 5x^2 + 1 \geq 0$$

$$x^2(6x^2 - 5x - 4) \geq -(2x+1)$$

$$x^2(6x^2 - 5x - 4) \geq -\frac{1}{6}$$

$$6x^2 - 5x - 4 = \dots$$

$$D = 25 + 96 = 121$$

$$x_1 = \frac{5 + 11}{12} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

$$x_2 = \frac{5 - 11}{12} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{6 - 3 + \sqrt{17}}{2} = 3 + \frac{\sqrt{17}}{2}$$

$$x^2 \left\{ 6 \left(x - \frac{4}{3} \right) \left(x + \frac{1}{2} \right) \right\} \geq -(2x+1)$$

$$3x^3 - 4x^2 - 3x^2 + 1$$

$$6x^2 + 3x - 8x - 4$$

$$3x^2(x-1) + (x$$

$$3x^3 - 3x^2 - x^2 + 1 =$$

$$= 3x^2(x-1) - (x^2-1)$$