

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Муравей двигается по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0(-1; \sqrt{3})$ и $N_0(2\sqrt{3}; 2)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a, \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6, \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6 = (x+3)(x+2)$$

$$(x+3)(\sqrt{x^3-x+10} - x-2) = 0$$

$$x = -3$$

$$\sqrt{x^3-x+10} = x+2$$

$$x^3-x+10 = x^2+4x+4$$

$$x^3-x^2-5x+6=0$$

$$(x-2)(x^2+x-3)=0$$

$$x=2 \quad x^2+x-3=0$$

$$D = 1+12=13$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Ответ: $x = -3; 2; \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 - 5x + 6 \quad | \quad x-2 \\ \underline{x^3 - 2x^2} \\ x^2 - 5x \\ \underline{x^2 - 2x} \\ -3x + 6 \\ \underline{-3x + 6} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{a+b}{4}x + \frac{a}{12} \\ y = \frac{1}{(a+b)b} - \frac{4}{a+b}x \end{cases}$$

или $a \neq -b$
 $b \neq 0$

Получ. 2 y-а на коорд. м. являются прямыми $\Rightarrow$ чтобы система имела беск. мн. решений эти прямые должны совпадать $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{a+b}{4} = -\frac{4}{a+b} \\ \frac{a}{12} = \frac{1}{(a+b)b} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} (a+b)^2 = 16 \\ ab = \frac{12}{a+b} \end{cases}$$

$$\rightarrow \text{I) } \begin{cases} a+b=4 \\ ab=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a+\frac{3}{a}=4 \\ b=\frac{3}{a} \end{cases}$$

$$\rightarrow a^2-4a+3=0 \rightarrow (a-3)(a-1)=0 \rightarrow \boxed{a=3, b=1} \quad \boxed{a=1, b=3}$$

$$\text{II)} \begin{cases} a+b=-4 \\ ab=-3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=-\frac{3}{a} \\ b=-\frac{3}{a} \end{cases} \rightarrow a^2+4a-3=0$$

$$D_1=4+3=7.$$

$$a_1=-2+\sqrt{7} \rightarrow b=\frac{3}{2-\sqrt{7}}$$

$$a_2=-2-\sqrt{7} \rightarrow b=\frac{3}{2+\sqrt{7}}$$

Если $a=-b$, то

$$\begin{cases} 12y=a \\ -4ax=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=\frac{a}{12} \\ x=-\frac{1}{4a} \end{cases} \Rightarrow \text{сист. имеет 1 реш.}$$

~~Значит~~ $a \neq b$.

Если $b=0$, то

$$\begin{cases} 3ax+12y=a \\ 0 \neq 1 \end{cases} \rightarrow \emptyset \Rightarrow b \neq 0$$

Значит ответ: ~~а~~ $a=3; b=1;$
 $a=1; b=3$
 $a=-(2-\sqrt{7}); b=\frac{3}{2-\sqrt{7}}$
 $a=-(2+\sqrt{7}); b=\frac{3}{2+\sqrt{7}}.$

$1400 = 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 1 \xrightarrow{\sqrt{5}}$ числа могут быть составлены из таких наборов цифр:

2; 7; 2; 5; 2; 5; 1; 1
 4; 7; 2; 5; 5; 1; 1; 1
 8; 7; 5; 5; 1; 1; 1; 1

Каждому набору соотв. $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ чисел. $\Rightarrow$ Ответ: $3 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 320 \cdot 24 \cdot 63 =$
 $= \boxed{483840.}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sqrt{7}$.

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6 \\ (x-3)^2 + (y-4)^2 = 25 \end{cases}$$

Рассмотрим 1е нерав. : $|x-3-y| + |x-3+y| \leq 6$

I) $\begin{cases} x-3-y \geq 0 \\ x-3+y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-3-y + x-3+y \leq 6 \\ x \leq 6 \end{cases}$

$\begin{cases} x-3-y \geq 0 \\ x-3+y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x-6 \geq 0 \\ x \geq 3 \\ y \leq x-3 \\ y \geq -x+3 \end{cases}$

$\begin{cases} x-3-y \geq 0 \\ x-3+y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ y \leq x-3 \\ y \geq -x+3 \end{cases}$

II) $\begin{cases} x-3-y < 0 \\ x-3+y < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 3 \\ y < x-3 \\ y > x-3 \end{cases}$

$\begin{cases} x-3-y < 0 \\ x-3+y < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 3 \\ y < x-3 \\ y > x-3 \end{cases}$

$\begin{cases} x-3-y < 0 \\ x-3+y < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -(x-3+y) - (x-3+y) \leq 6 \\ 2(x-3) \geq -6 \\ x \geq 0 \end{cases}$

III

IV (прод.)

$$2(a - \frac{1}{2}b)(a-b) \geq 0$$

$$2(x^2 - \frac{1}{2}(x-1))(x^2 - |x-1|) \geq 0$$

1) $x \geq 1$

$$(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2})(x^2 - x + 1) \geq 0$$

$$D = \frac{1}{4} - 2 < 0$$

$$x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} > 0$$

$$D = 1 - 4 < 0$$

$$x^2 - x + 1 > 0$$

III. к. им. керашн.
2 чина > 0
это не-то не-то

№5

Дано: $\omega_1; \omega_2; r=9$

$\omega_1 \cap \omega_2 = A; B$

$\angle CAD = 90^\circ$

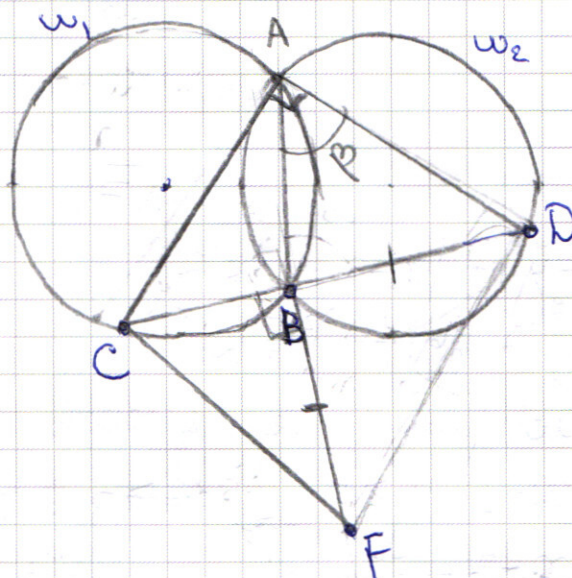
$B \in CD$

$BF \perp CD$

$BF = BD$

Найти:

CF



Реш: Пусть $\angle DAB = \beta \Rightarrow BD = 2R \cdot \sin \beta$ по т. синусов
 $\angle CAB = 90^\circ - \beta \Rightarrow CB = 2R \sin(90^\circ - \beta) = 2R \cdot \cos \beta$.

~~Значит~~

$$CF^2 = CB^2 + BF^2 = CB^2 + BD^2 = 4R^2 (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) = 4R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CF = 2R = 18$$

Ответ: $CF = 18$.

№4.

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + (x-1)^2 - 3x^2|x-1| \geq 0$$

Введем зам. пер. $x^2 = a; |x-1| = b$.

$$2a^2 + b^2 - 3ab \geq 0 \quad \& \quad (x-1)^2 = (|x-1|)^2 = b^2$$

Решим это у-е привав в за парам.

$$D = 9b^2 - 8b^2 = b^2$$

$$a_1 = \frac{3b - b}{4} = \frac{1}{2}b \rightarrow x^2 = \frac{|x-1|}{2}$$

$$a_2 = b \rightarrow x^2 = |x-1|$$

$$1) x > 1 \rightarrow 2x^2 - x + 1 = 0$$

$$D = 1 - 8 < 0$$

$$2) x < 1 \rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$$

$$D = 1 + 8 = 9$$

$$x_1 = \frac{-1+3}{4} = 0.5$$

$$x_2 = -1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

БЧ (продолжи)

2) $x < 1$

$$(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2})(x^2 + x - 1) \geq 0$$

$$D = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$$

$$x_1 = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

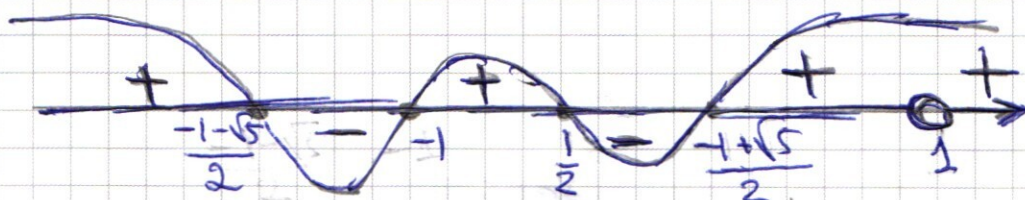
$$x_2 = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2} = -1$$

$$D = 1 + 4 = 5$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

< 1



Ответ: $x \in (-\infty; -1) \cup (\frac{1}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}) \cup (1; \infty)$

$$|x-3-y| + |x-3+y| \leq 6$$

$$(|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25$$

-4 окр., сим. отн. осей коорд

$$|x-3-y| + |x-3+y| \leq 6$$

$$\begin{cases} x-3-y \geq 0 \\ x-3+y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ y \geq -x+3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-3-y + x-3+y \leq 6 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

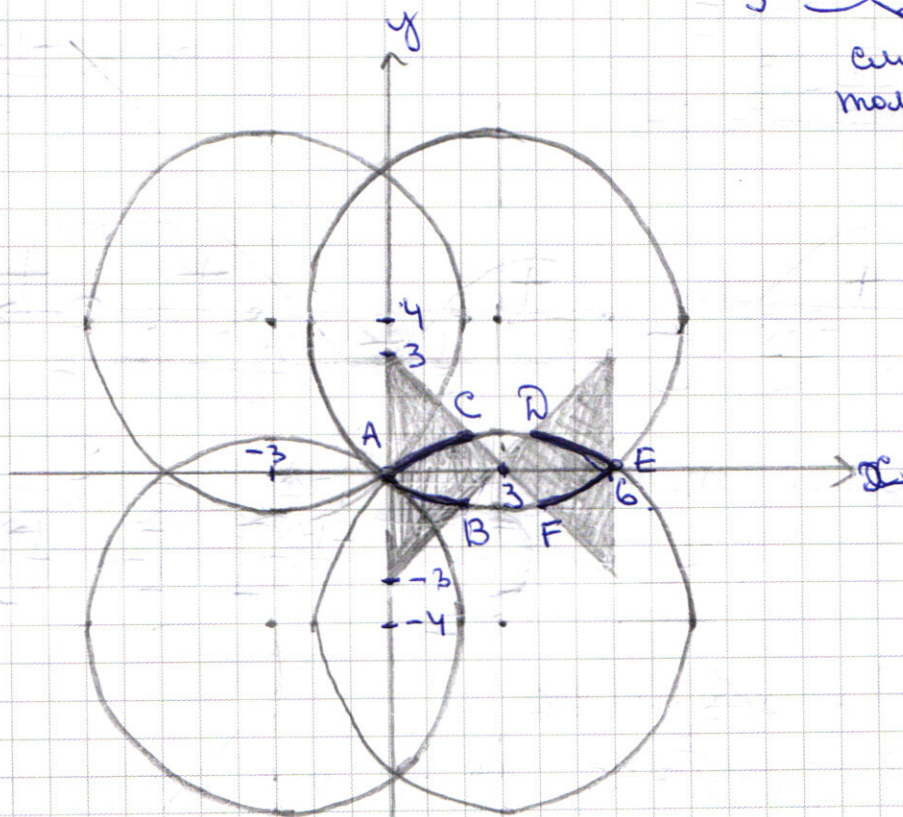
$$\text{II)} \begin{cases} x-3-y < 0 \\ x-3+y < 0 \end{cases} \begin{cases} x < 3 \\ y > x-3 \\ y < -x+3 \end{cases} \begin{aligned} &-(x-3-y)-(x-3+y) \leq 6 \\ &2x-6 \geq -6 \\ &x \geq 0. \end{aligned}$$

$$\text{III)} \begin{cases} x-3-y < 0 \\ x-3+y \geq 0 \end{cases} \begin{cases} y > x-3 \\ y \geq -x+3 \end{cases} \begin{aligned} &-(x-3-y)+(x-3+y) \leq 6 \\ &2y \leq 6 \\ &y \leq 3. \end{aligned}$$

→ в этом случае есть только 1 решение (0; 3)

$$\text{IV)} \begin{cases} x-3-y \geq 0 \\ x-3+y < 0 \end{cases} \begin{cases} y \leq x-3 \\ y < -x+3 \end{cases} \begin{aligned} &x-3-y-(x-3+y) \leq 6 \\ &y \geq -3. \end{aligned}$$

→ в этом случае есть только 1 решение (0; -3)



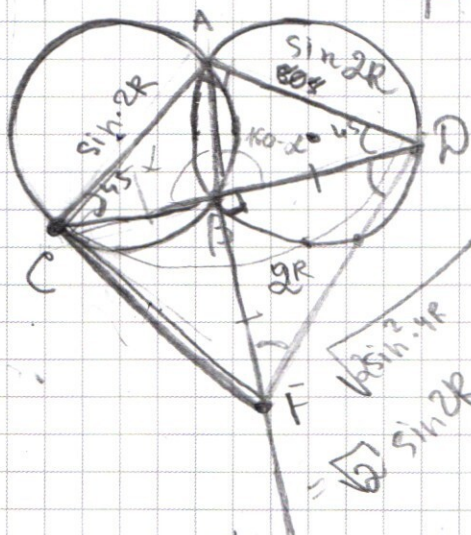
Решениями будут дуги AC, AB, ED, EF

~~В этих областях координаты:~~ В им. координаты: $x=2; y=-(\sqrt{24}-4)$
 $C(2; \sqrt{24}-4)$
 $D(4; \sqrt{24}-4); F(4; (\sqrt{24}-4))$

Ответ: $x \in (0; 2) \cup (4; 6); y \in (-(\sqrt{24}-4); \sqrt{24}-4)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin(180^\circ - \alpha)$$



$$\sin \alpha \cdot 2R = CA$$

$$\cos \alpha \cdot 2R = AB$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2 | x-1 | + 1 \geq 0.$$

$$2x(x^3 - 1) + x^2 - 3x^2 | x-1 | + 1 \geq 0.$$

$$2x(x-1)(x^2 + x + 1) + x^2 - 3x^2 | x-1 | + 1 \geq 0.$$

$$x^2(2x + \dots)$$

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a \\ 4bx + (a+b)by = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{(a+b)}{42}x + \frac{a}{12} \\ y = -\frac{4}{a+b}x + \frac{1}{(a+b)b}. \end{cases}$$

$$-\frac{(a+b)}{4}x + \frac{a}{12} = -\frac{4}{(a+b)}x + \frac{1}{(a+b)b}.$$

$$x \left(\frac{4}{a+b} - \frac{a+b}{4} \right) = \frac{1}{(a+b)b} - \frac{a}{12}.$$

$$\text{При } \begin{cases} \frac{4}{a+b} - \frac{a+b}{4} = 0 \\ \frac{1}{(a+b)b} - \frac{a}{12} = 0 \end{cases}$$

ОДЗ
 $a \neq -b$
 $b \neq 0$

$$\begin{cases} (a+b)^2 = 16 \\ 12 - ab(a+b) = 0 \end{cases}$$

это у-е имеет беск.
много реш. $\Rightarrow$ сист.
может иметь беск. мн.
реш.

$$\rightarrow \text{I) } \begin{cases} a+b=4 \text{ ab} \\ 12 - 4(a+b) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=4 \text{ ab} \\ 3 - ab = 0 \\ a+b=4 \\ ab=3 \end{cases}$$

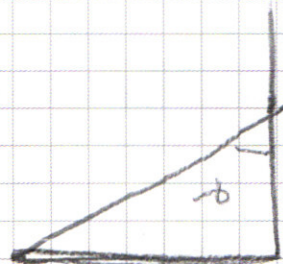
$$1400 = 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot$$

$$2 \cdot 27255211$$

$$47525111$$

$$875251111$$

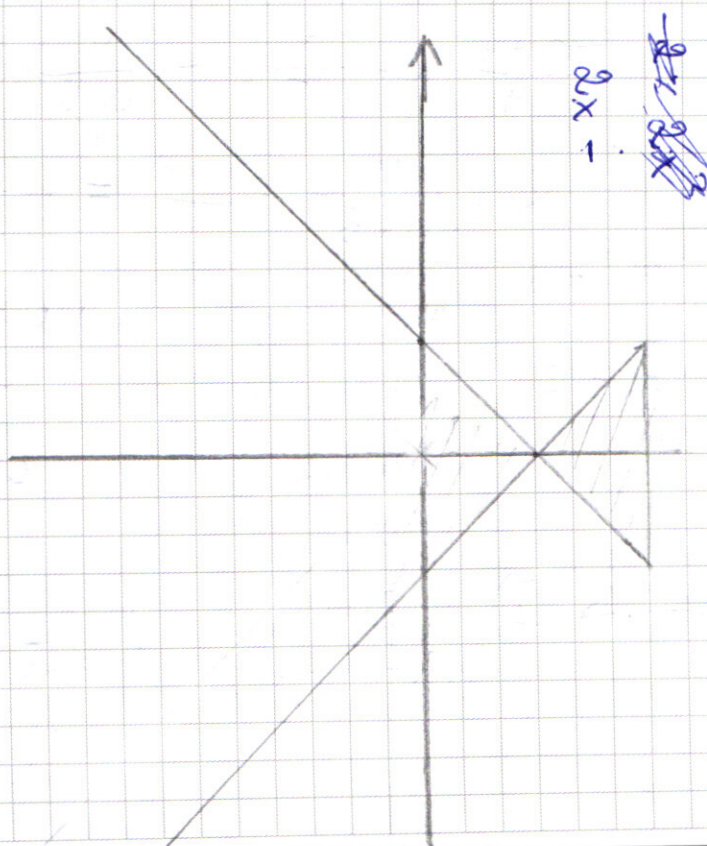
$$\begin{array}{r} 320 \\ \times 24 \\ \hline 1280 \\ 640 \\ \hline 7680 \\ \times 63 \\ \hline 23040 \\ 46080 \\ \hline 483840 \end{array}$$



$$|x-3-y| + |x-3+y| \leq 6$$

$$\begin{cases} x-3-y > 0 \\ x-3+y > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x-6 > 0 \\ x > 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-3 > y \\ x-3 > -y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-3 > y \\ 3-x < y \end{cases} \rightarrow y \in (3-x; x-3)$$



$$\begin{aligned} 2x^4 + x^2(1-3|x-1|) - 2x > 0 \\ 2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 > 0 \\ 2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 > 0 \\ 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 > 0 \\ 2x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x + 1 > 0 \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a \\ 4bx + (a+b)y = 1 \end{cases}$$

$$4bx + (a+b)y = 1$$

$$(3x - by)(a+b) + (3y - bx) \cdot 4 = a - 1$$

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6 = (x+3)(x+2)$$

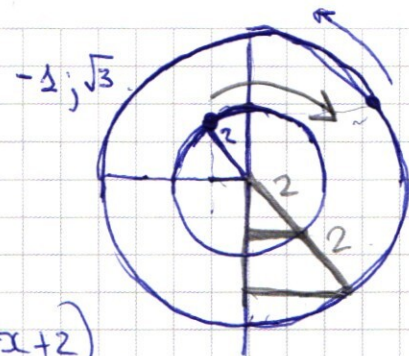
$$(x+3)(\sqrt{x^3-x+10} - x - 2) = 0$$

$$x = -3$$

$$\sqrt{x^3-x+10} = x+2$$

$$x^3-x+10 = x^2+4x+4$$

$$x^3-x^2-5x+6=0$$



$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 - 5x + 6 \mid x-2 \\ \underline{x^3 - 2x^2} \\ x^2 - 5x + 6 \\ \underline{x^2 - 2x} \\ -3x + 6 \\ \underline{-3x + 6} \\ 0 \end{array}$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2 \mid x-1 \mid +1 \geq 0$$

$$x \geq 1$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^3 + 3x^2 + 1 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$|x-3-y| + |x-3+y| \leq 6$$

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$$

$$x > 0, y > 0$$

$$x$$

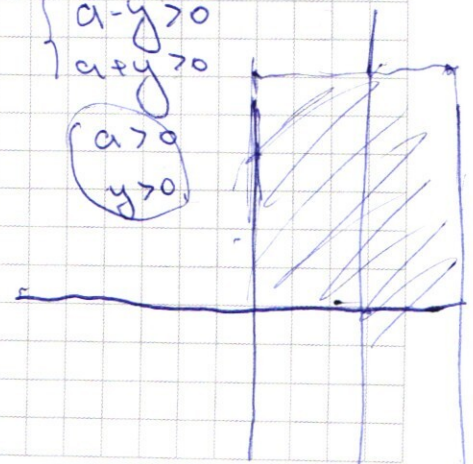
$$\begin{cases} a-y > 0 \\ a+y > 0 \\ a > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$|x-3-y| + |x-3+y| \leq 6$$

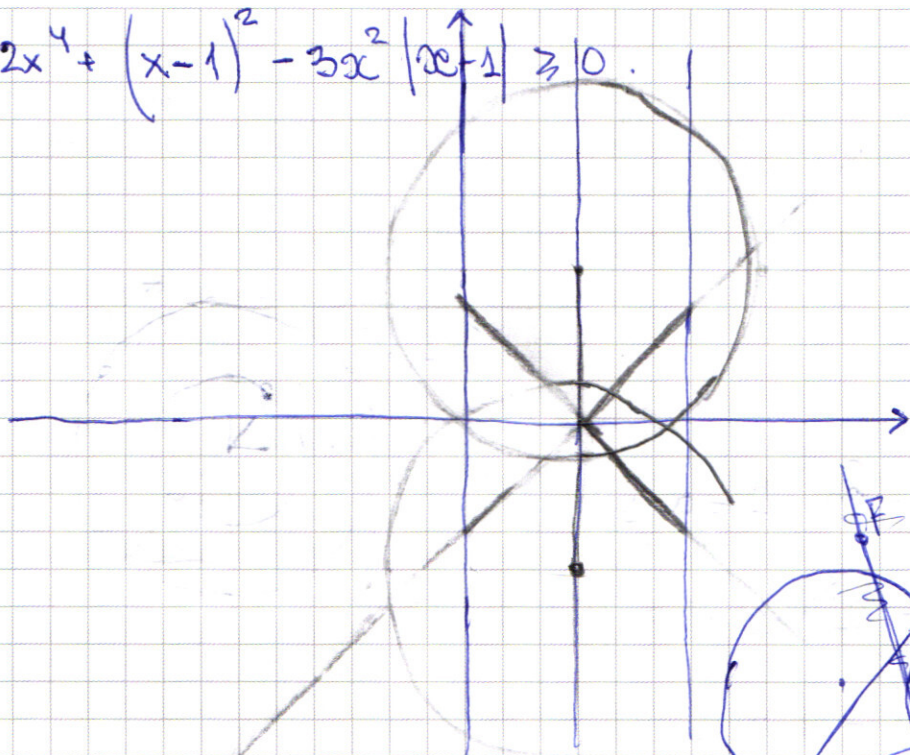
$$x-3 = a$$

$$|a-y| + |a+y| \leq 6$$

$$a-y + x-3 + x-3 \leq 6 \quad x \leq 6$$



$$2x^4 + (x-1)^2 - 3x^2|x-1| \geq 0.$$



$$|x-3+y| + |x-3-y| \leq 6.$$

$$x-3=a$$

$$|a+y| + |a-y| \leq 6.$$

$$1) \begin{cases} a+y > 0 \\ a-y > 0 \end{cases}$$

$$2y \geq 0$$

$$a > 0 \rightarrow x > 3.$$

$$y \neq 0$$

$$(a+y)(a-y) > 0.$$

$$a < y \text{ or } (y+a)(y-a) < 0.$$

$$y \in (-a, a).$$

$$x=3 > 0.$$

$$y < x-3$$

$$2) \begin{cases} a+y > 0 \\ a-y < 0 \end{cases}$$

$$a+y - a+y \leq 6$$

$$y \leq 3.$$

$$2x^2 + 1 - \frac{2}{x} - 3|x-1| + \frac{1}{x^2} \geq 0.$$

$$\frac{2}{x}$$

$$2x^2 + \frac{1}{x^2} + 1 \geq 3|x-1| + \frac{2}{x}.$$

