

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФ:

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Муравей движется по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0(-1; \sqrt{3})$ и $N_0(2\sqrt{3}; 2)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a, \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6, \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25. \end{cases}$$

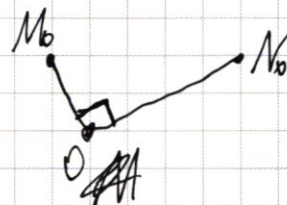
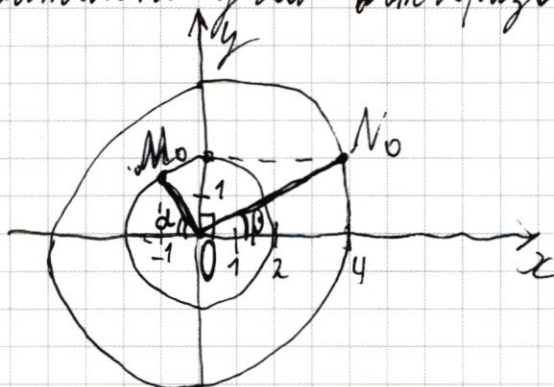
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N-1.

Сначала вычисли радиусы окружностей по которым бегают жук и муравей: для жука -

$\sqrt{(-1)^2 + (2\sqrt{3})^2} = 2$, а для муравья - $\sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$. Введём новые величины ω_1 - угловая скорость муравья, ω_2 - жука, v - линейная скорость

Будем отсчитывать углы ~~по направлению~~ осм x (см. рис.)



Без ограничения общности (ввиду $\omega_1 = \frac{v}{2}$, $\omega_2 = \frac{v}{4} \Rightarrow$ ~~ид. скорости~~)

$\Rightarrow \frac{\omega_1}{2} = \omega_2$ ~~Связь~~ $\omega_1 = \frac{v}{2}$, $\omega_2 = \frac{v}{4} \Rightarrow \frac{\omega_1}{2} = \omega_2$. Но

угловая скорость их сближения равна сумме

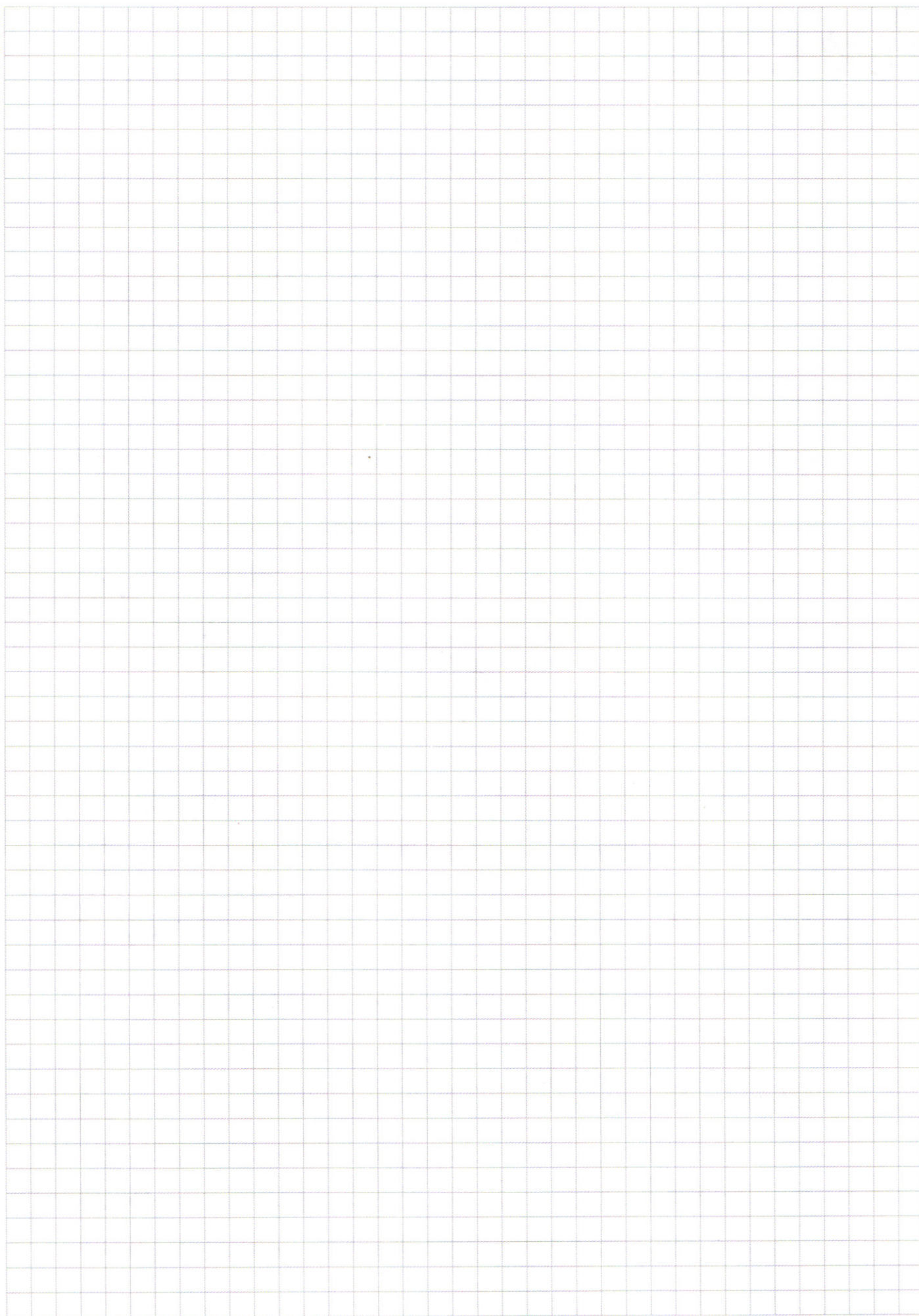
т.е. $\frac{3\omega_2}{2}$, а значит жук повернётся на угол, ~~который~~

меньший, ~~или начальный~~, M_0O/N_0 который равен 90° (т.к. $\cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$;

$\sin \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = 30^\circ$), т.е. угол между жуком и осью будет

$\theta + \frac{90^\circ}{3} = 30^\circ + \frac{90^\circ}{3} = 60^\circ \Rightarrow K_1 = (2; 2\sqrt{3})$, K_i - искомые координаты.

Затем ситуация почти повторяется, только начальный



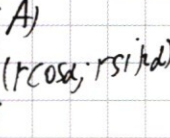
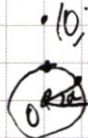
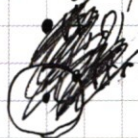
☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Угол равен 60° , а между муравьями и муравьиной — $360^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow 60^\circ + \frac{360^\circ}{3} = 180^\circ \Rightarrow k_2 = (-4; 0)$. И снова: $180^\circ + \frac{360^\circ}{3} = 300^\circ = 360^\circ - 60^\circ$;

т.е. $k_3 = (2; -2\sqrt{3})$. Емкраз: $300^\circ + \frac{360^\circ}{3} = 420^\circ \equiv 60^\circ \pmod{360} \Rightarrow$
 $\Rightarrow k_4 = (2; 2\sqrt{3}) = k_1$. Вывод: кратчайшее расстояние $\Rightarrow$ центр,
 мух и муравей на 1 прямой. Они сделают вид
 симметрии окружности и следующие записи.
 да же структура — бесконечно повторяется!



$$\sqrt{(A + r(1 - \sin \alpha))^2 + (r \cos \alpha)^2} - \text{минимум при } \alpha = 90^\circ$$

Ответ: $(2; 2\sqrt{3})$ и $(-4; 0)$ и $(2; -2\sqrt{3})$

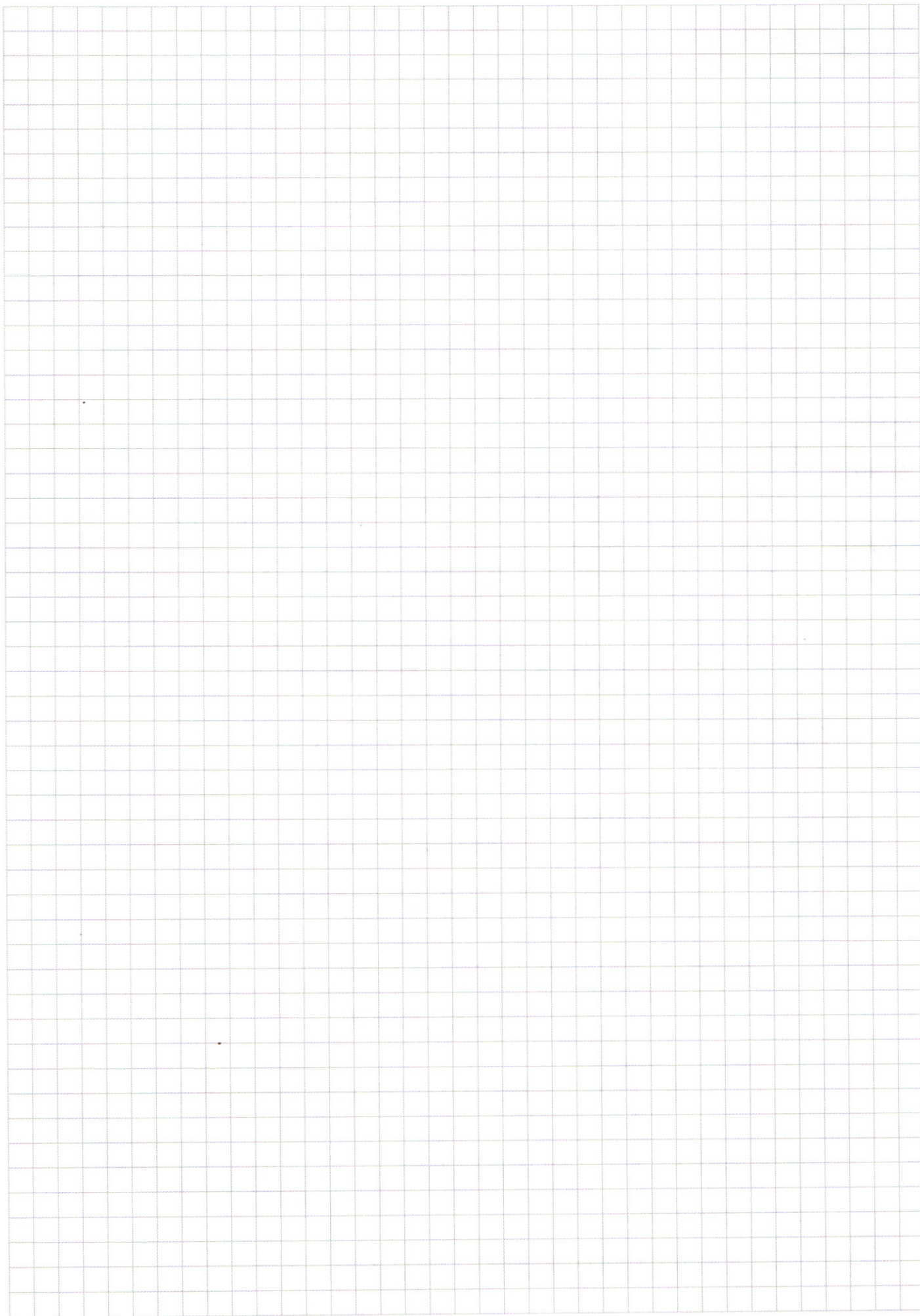
из уравнений $N=2$. Система имеет бесконечно много решений, когда эти две они линейно зависимы:

$$\frac{3(a+b)}{4b} = \frac{12}{(a+b)b} = \frac{a}{1} \Rightarrow \begin{cases} a+b=3(a+b) \\ 12=ab(a+b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 36=4(ab)^2 \\ ab=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=4 \\ ab=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \\ a=3 \\ b=1 \end{cases} \text{ При этом } b \neq 0, \text{ т.к. тогда}$$

$4x \cdot 0 + ay \cdot 0 = 1?! \text{ и } a+b \neq 0, \text{ т.к. } \begin{cases} 12b=a \\ 4b=1 \end{cases} \Rightarrow \text{решения}$
 единственно.

После рассмотрения всех случаев $\Rightarrow$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: $a=1; b=3$ и $a=3; b=1$

N-3.

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6 = (x+2)(x+3)$$

$$x_1 = -3;$$

$$x^3-x+10 = x^2+4x+4$$

$$x^3-x^2-5x+6=0.$$

По теореме о рациональных корнях уравнения с целыми коэффициентами, возможные корни: $\pm \frac{1}{1}; \pm \frac{2}{1}; \pm \frac{3}{1}; \pm \frac{6}{1}$, проверим и убеждаемся, что

2-корень. По схеме Горнера:

$$x_2=2$$

	1	-1	-5	6
2	1	1	-3	0

Получили: $x^2+x-3=0$

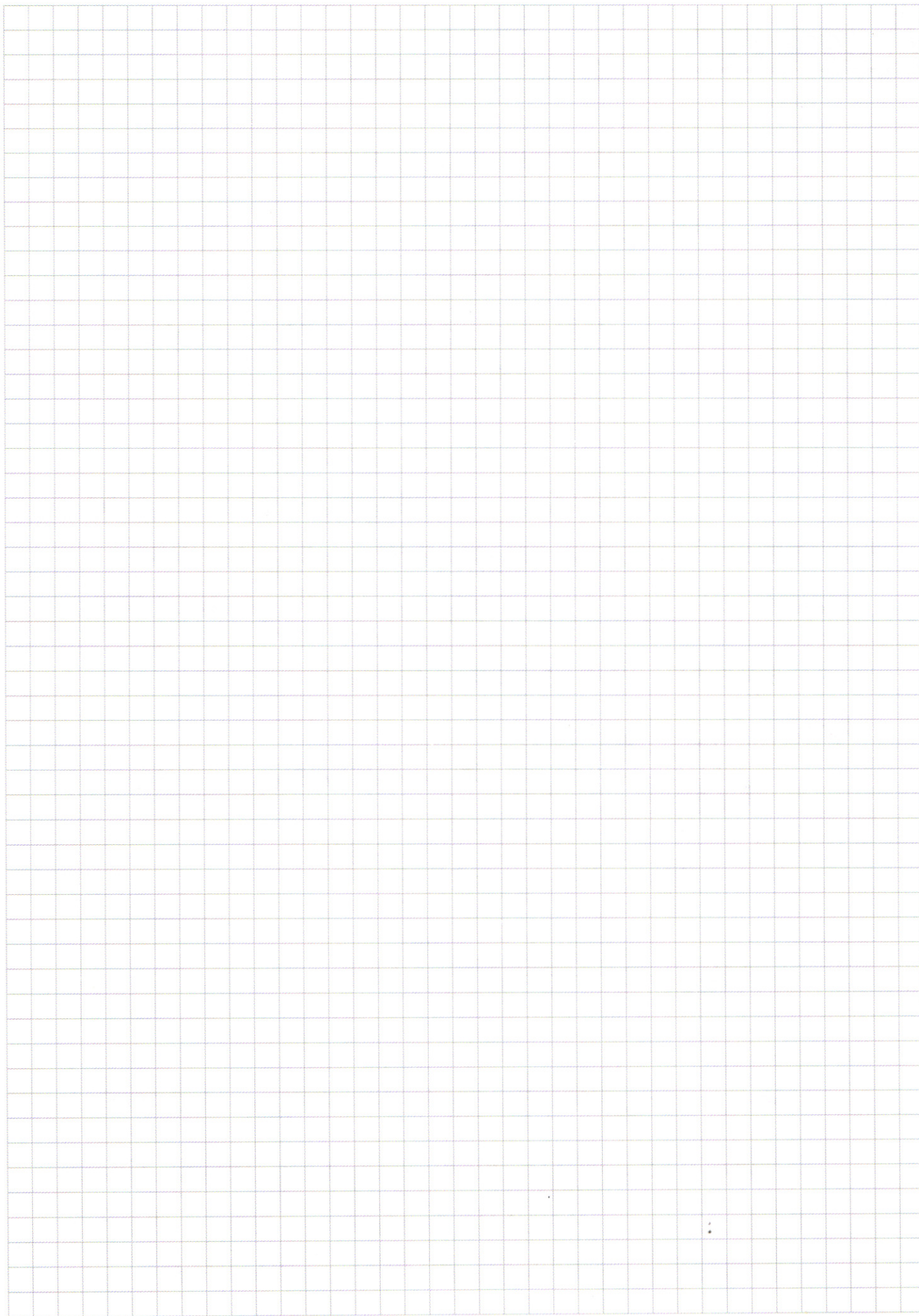
$$x_{3/4} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4 \cdot 3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Ответ: $-3; \frac{-1-\sqrt{13}}{2}; \frac{-1+\sqrt{13}}{2}; 2$

N-5

$a_1 a_2 \dots a_8 = 1400, a_i$ — цифра на i -м месте

в числ. $1400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$ т.е. среди a_i обязательно
а : 7 и а : 5. Но а : 25, т.к. ~~а : 25~~ $0 < a \leq 9$, (если $a=0$,
то произведение равно 0) т.е. 2 цифры



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

обязательно будут 5 и 5. Аналогично,
в интервале $(0; 10)$ есть 1 целое, кратное 7.

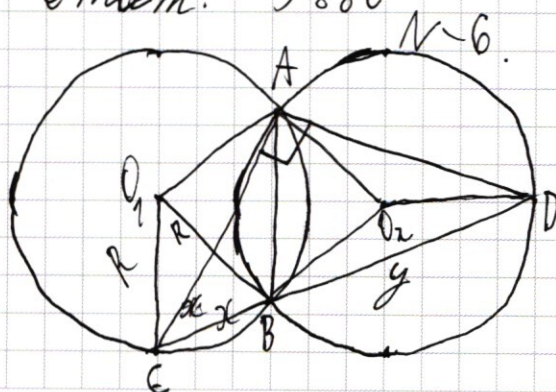
П. е. три цифры — 5, 5, 7. Кол-во способов
занять ^{3 из 8} мест = $8 \cdot (6+5+4+3+2+1) = 3 \cdot 8 \cdot 7 = 168$.
^{вариантов поставить 5 и 5 на 4 места}
вариантов поставить 7

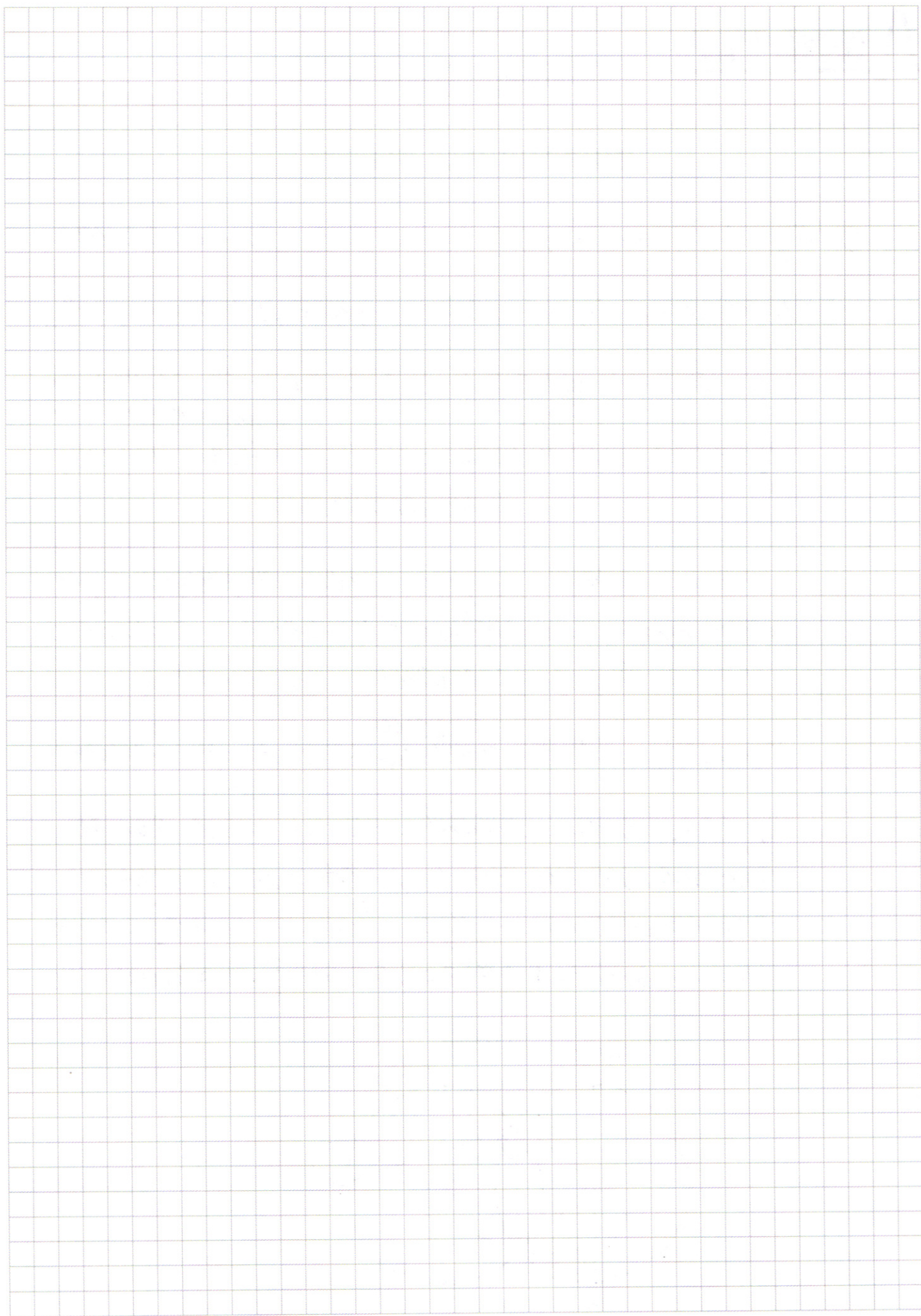
Затем остаются 5 цифр, в произведении дающие 8, ко-
торые нужно распределить на 5 мест. Вариант 1:
8, 1, 1, 1, 1. Тогда способов 5. Вариант 2:

2, 2, 2, 1, 1. Тогда ^{способов} ~~вариантов~~ — $4+3+2+1=10$; Вариант 3:

4, 2, 1, 1, 1. Тогда способов — $5 \cdot 4 = 20$. Итого. кол-во
способов поставить на 5 мест цифры, дающие
8 в произведении — 35, а всего требуемых
чисел — $35 \cdot 168 = 5 \cdot 7^2 \cdot 8 = (5 \cdot 7 \cdot 8) \cdot 7 \cdot 3 = \frac{21}{5} \cdot 1400 = 5600 + 280 = 5880$

Ответ: 5880



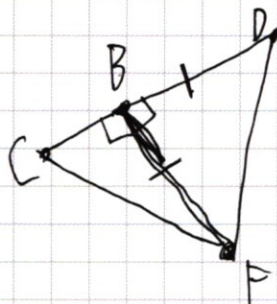


☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$CB = x, BD = y, \angle CO_1B = \alpha, \angle DO_2B = \beta$
 R-радиусы
 160 метров



Пугарова, $CF = \sqrt{CB^2 + BF^2} =$

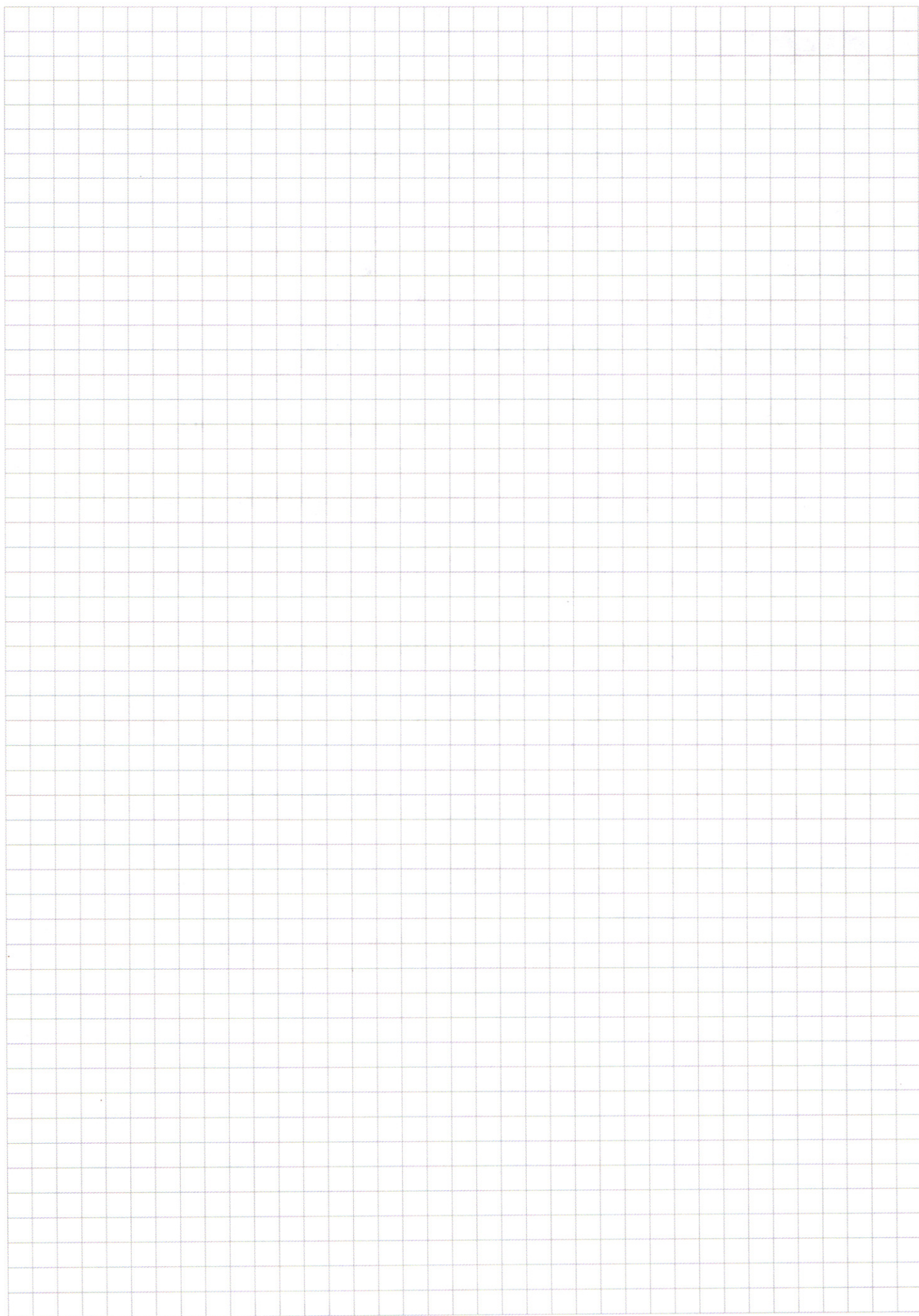
$$= \sqrt{CB^2 + BD^2} = \sqrt{x^2 + y^2}; \text{ По теореме косинусов,}$$
$$x^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos 2 = 2R^2(1 - \cos 2), \text{ а значит, } y^2 = 2R^2(1 - \cos 2)$$
$$y^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos \theta = 2R^2(1 - \cos \theta). \text{ To measure}$$

0 Вписанным и центральным углам, $\angle CAB =$

$$= \angle CO_1B/2 = \frac{\alpha}{2}; \angle DAB = \angle CO_2B/2 = \frac{\beta}{2}; \text{H.O}$$
$$90^\circ = \angle CAB + \angle BAD = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \Rightarrow \alpha + \beta = 180 \Rightarrow \cos \alpha + \cos \beta = 0.$$

Maka $(F = \sqrt{w^2 + z^2}) = \sqrt{2R^2(1 - \cos u) + 2R^2(1 + \cos u)} =$

$$= \sqrt{4R^2} = 2R \quad \text{Ordnung: } CF = 2R$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N-4.

Случай 1: $x \geq 1$:

$$\begin{aligned} 2x^4 + x^2 - 2x - 3x^3 | x-1 | +1 &= 2x^4 + x^2 - 2x - 3x^3 + 3x^3 + 1 = \\ &= 2x^4 - 3x^3 + 3x^2 + (x^2 - 2x + 1) \geq 2x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 0 = \\ &= 2x^4 - 3x^3 + \frac{9}{8}x^2 + \frac{15}{8}x^2 \geq 2x^4 - 3x^3 + \frac{9}{8}x^2 = x^2(2x^2 - 3x + \frac{9}{8}) = \\ &= x^2(x - \frac{3}{2x})^2 \geq 0 \quad (\text{т. е. все } x \geq 1 - \text{применим}) \end{aligned}$$

Случай 2: $x < 1$:

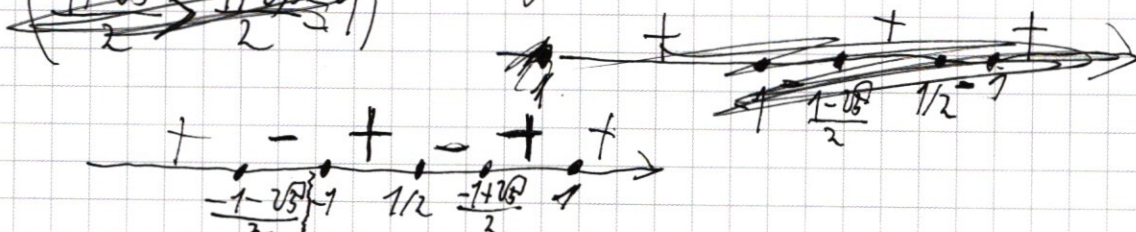
$$\begin{aligned} 2x^4 + x^2 - 2x - 3x^3 | x-1 | +1 &= 2x^4 + x^2 - 2x + 3x^3 - 3x^3 + 1 = \\ &= 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1. \text{ Найдём корни по} \\ &\text{теореме о рациональных корнях: среди} \\ &\text{возможных } \pm \frac{1}{1} \text{ и } \pm \frac{1}{2} \text{ корни будут } x_1 = 1 \text{ и } x_2 = -\frac{1}{2}. \\ &\text{Разделим по схеме Горнера:} \end{aligned}$$

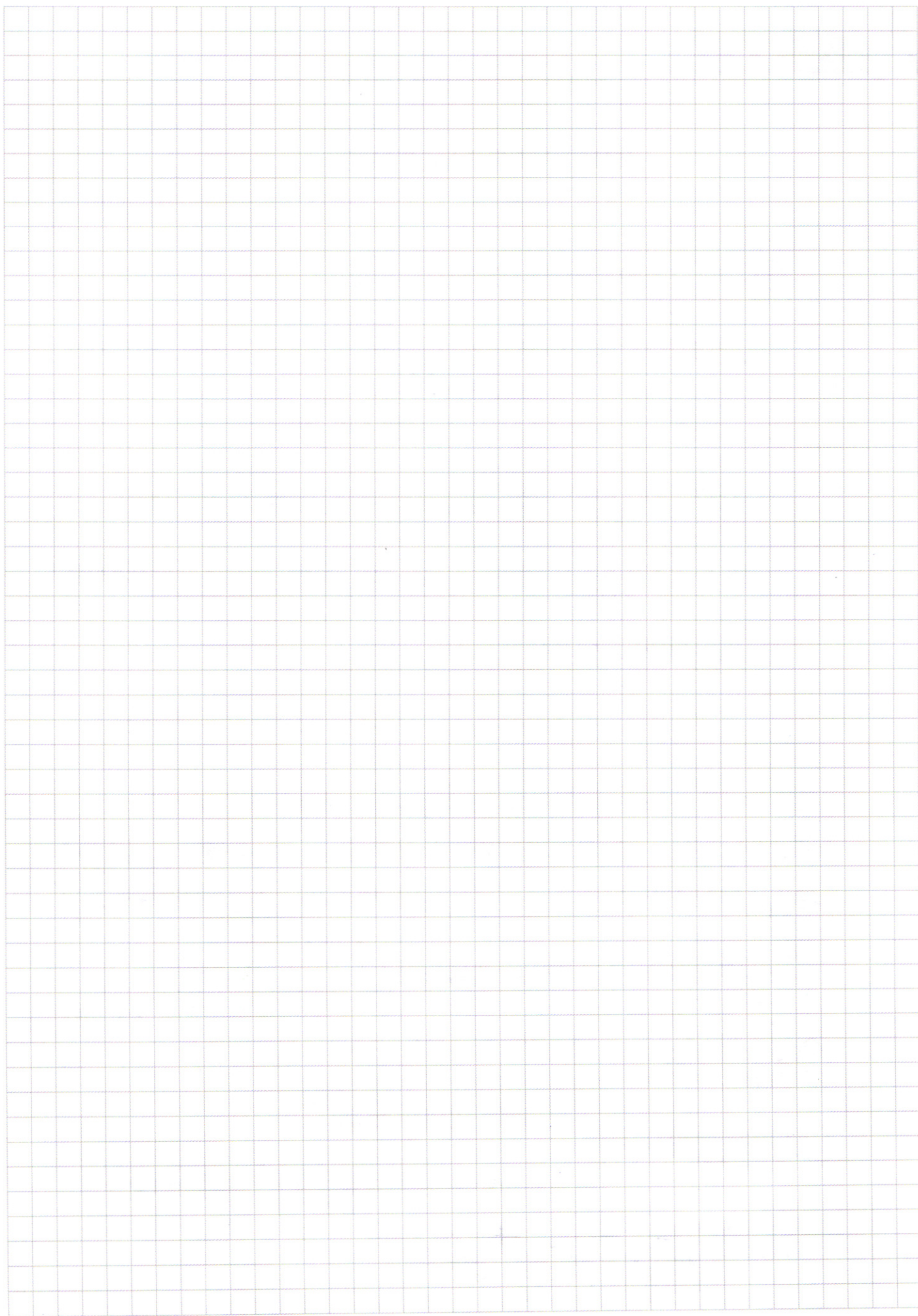
2	3	-2	-2	1
⊖1	2	1	-3	0

$$\text{т. е. } x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

⊖1	2	1	-3	1
⊖1	2	2	-2	0

Метод интервалов:





☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № ____
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: $x \in (-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}] \cup [-1; \frac{1}{2}] \cup [\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; +\infty)$

$|x-3-|y|| + |x-3+|y|| \leq 6$ $x-3$

$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6 \\ (|x-3|)^2 + (|y|+4)^2 = 25 \end{cases}$

Случай 1:

$x-3-y \geq 0; x-3+y \geq 0$

Тогда $2x-2-6 \leq 6 \Rightarrow x \leq 6$;

Значит, $y \geq 3-x$ и $y \leq x-3$. Но при $x \leq 3$ y не существует,

значит $6 \geq x > 3$; $|y|+4 = \sqrt{25 - (|x-3|)^2}$, заметим, что $1 \leq y$

$3 \geq |x-3| > 0 \Rightarrow 9 \geq (|x-3|)^2 > 0 \Rightarrow 5 \geq |y|+4 \geq 4 \Rightarrow |y| \leq 1$

Выразим $|y|$: $|y| = \sqrt{16-6x-x^2} - 4$. Но, ввиду

неотрицательности модулей: $\begin{cases} x-3-y \geq 0 \Rightarrow y \geq 3-x \\ x-3+y \geq 0 \Rightarrow y \leq x-3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x-3-\sqrt{16-6x-x^2}+4 \geq 0 \Rightarrow x^2+2x+1 \geq 16+6x-x^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x^2-2x-8 \geq 0 \Rightarrow (x-4)(x+2) \geq 0 \Rightarrow 4 \leq x \leq 6$

Случай 2:

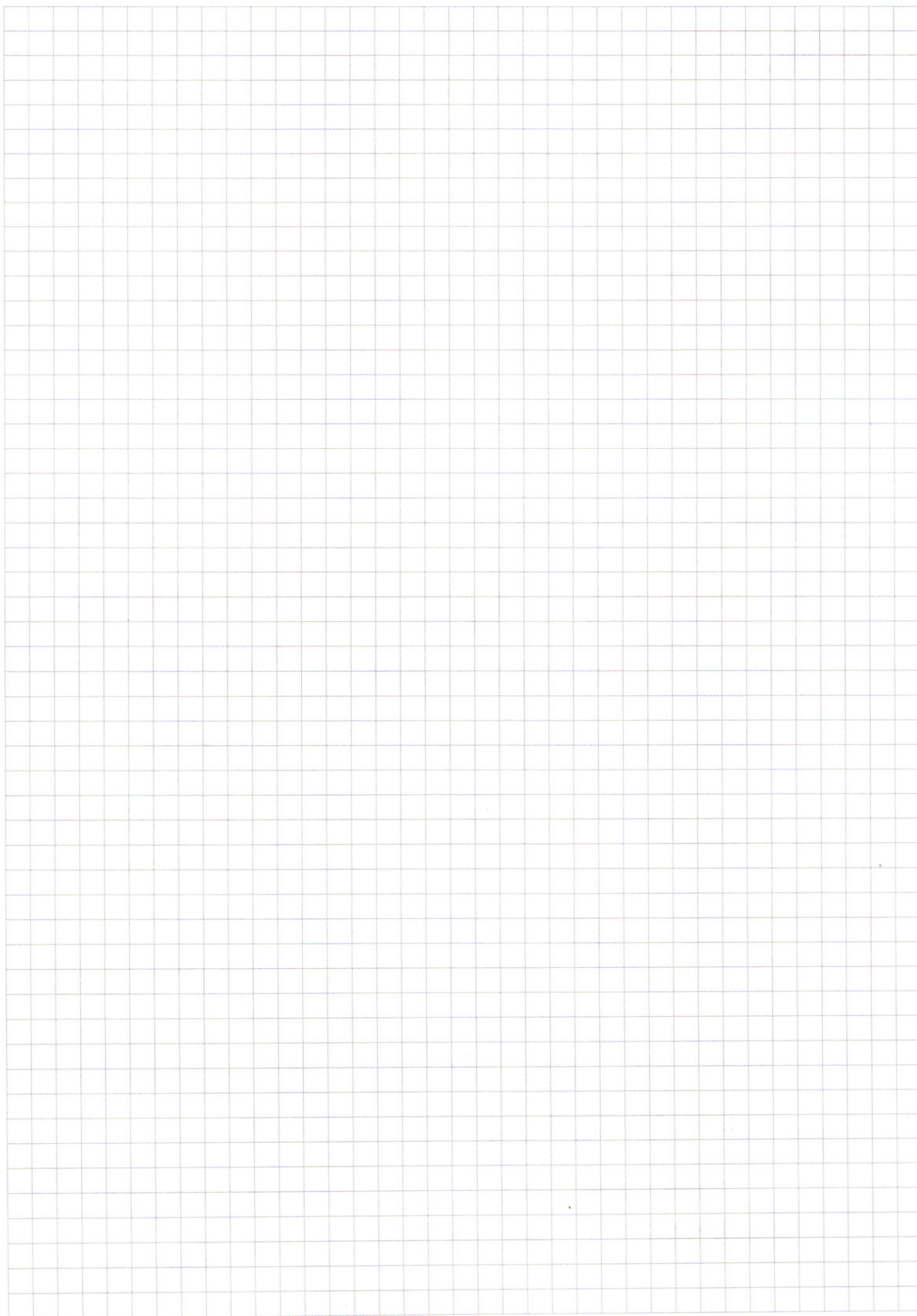
$|y| > |x-3|$ (значки под мод. модулем разные)

$|y|+x-3 \leq 6, y-x+3 \leq 6 \Rightarrow y \leq 3$

Выразим y : $\sqrt{16-}$

Выразим $|x|$:

$y = \sqrt{25 - (|x-3|)^2} - 4$; $|x| = \sqrt{9+8y-y^2}$;



☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2.1: $x \geq 0$:

$$\sqrt{16x - x^2} - 4$$

Ответ: $4 \leq x \leq 6$; $y = \pm(\sqrt{16x - x^2} - 4)$

$$\text{Омбс: } 4 \leq x \leq 6$$

$$x - \frac{1}{x} + \sqrt{16 + 6x - x^2} > 0$$

$$(x + \sqrt{16 + 6x - x^2})^2 \geq 49$$

$$16 + 6x + 2x\sqrt{16 + 6x - x^2} \geq 49$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

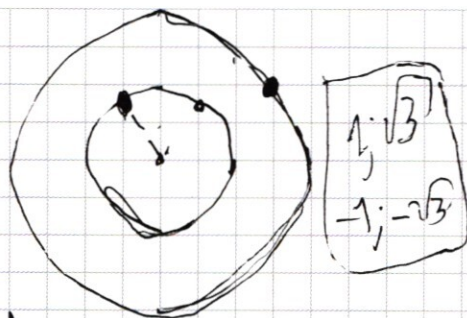
$$(x+3)\sqrt{x^2-4} = (x+3)(x+2) \quad 2 \quad 4$$

$$x^2 + 2x + 4x^3 - x + 10$$

$$x^3 - x^2 - 3x + 9 = 0$$

$$x^3 - x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\begin{cases} 3(a+b) = 4ab \\ 12 = a(a+b)b \end{cases}$$



$$\varphi_x(t) = -30^\circ + 2\omega t$$

$$\varphi_m(t) = 60^\circ - \omega t$$

$$2x^4 + x^2 - 2x$$

$$1) x \geq 1:$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^3 + 3x^2 + 17 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$36 = 4(a+b)^2$$

$$\begin{cases} ab = 3 \\ a+b = 4 \end{cases}$$

$$x+y = \frac{1}{12}$$

$$3.4x + 12y = a$$

$$4bx + 4by = 1$$

$$x+y = \frac{1}{4}$$

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_8 = 1400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$$

$$= 2^3 \cdot 350 = 2^3 \cdot 175 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$$

2)

$$2x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 10$$

5

5

7

$$x^2(2x^2 - 3x + 3)$$

$$9 - 4 \cdot 2 \cdot 3 < 0$$

$$2) x < 1:$$

$$2x^4 + x^2 - 2x + 3x^3 - 3x^2 + 17 \geq 0$$

$$3b(a+b) \neq 0$$

$$2x^4 + 3x^3 - x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$2(x^2 - 1)(x+1)(x+1)(x^2 - x - 1) \geq 0$$

$$(2x^3 - 2x + x^2 - x - 1)(x+1) \geq 0$$

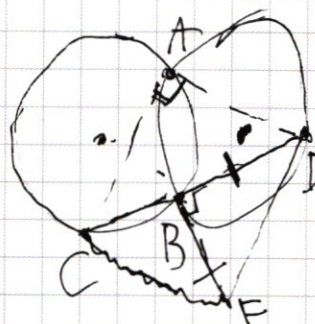
$$a+b \neq 2$$

$$6x + 12y = a$$

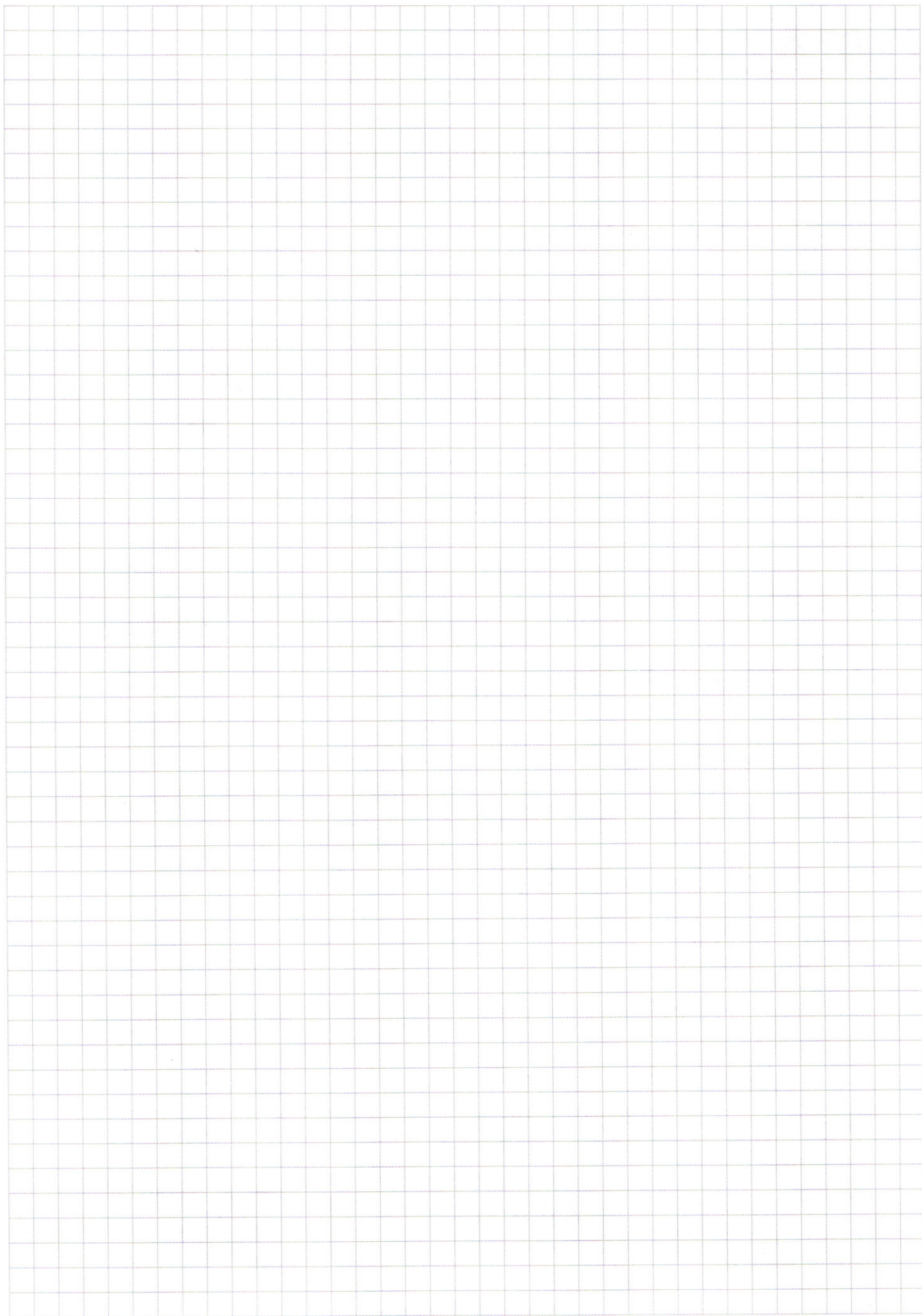
$$4bx + 4by = 1$$

$$12x + 12y = a - b$$

$$4bx + 4by = 1$$



$$2 + 50^\circ = 130^\circ$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |x-3-y|+|x-3+y| \leq 6 \\ (|x-3|)^2 + (|y-4|)^2 = 25 \end{cases}$$

$$1) x-3-y \geq 0, x-3+y \geq 0$$

$$2x-6 \leq 6$$

$$\textcircled{1} \leq x \leq 6$$

$$y > 3-x > -3$$

$$y \leq x-3 \leq 3$$

$$x \leq 8$$

$$y \leq 9$$

$$\sqrt{25} = 5$$

$$5 - 10x$$

$$25 - (1-x)^2 = 9 - (2-x)^2$$

$$x^2 + y^2 = 8|x-3| + 8|y-4|$$

$$(y-4) = -\sqrt{8-12x(1-x+2)}$$

$$4 - |y| = \sqrt{8}$$

$$\pm 8 - 4 \mp 10 \neq 0$$

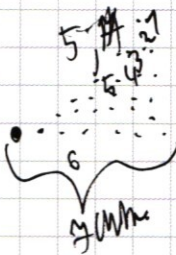
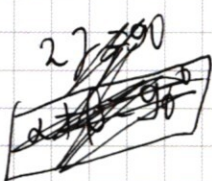
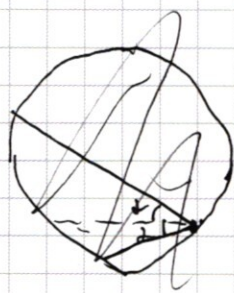
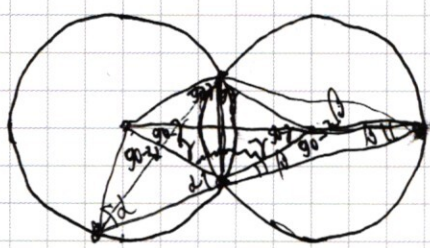
$$x^3 - x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x^2 + ax + b)$$

$$b = 2a/x$$

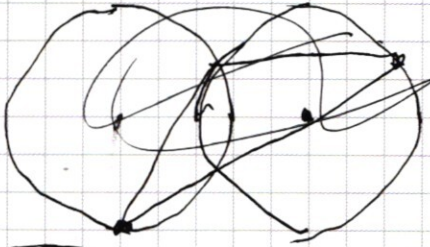
$$8 - 2a = 5$$

$$a = 1$$

$$(x^2 + x - 3)(x-2) = x^3 - 5x^2 + 5x - 6$$



$$6 \times 5$$



$$R^2 + R^2 - 2R^2 \cos \alpha = x$$

$$2R^2(1 - \cos \alpha) = x^2$$

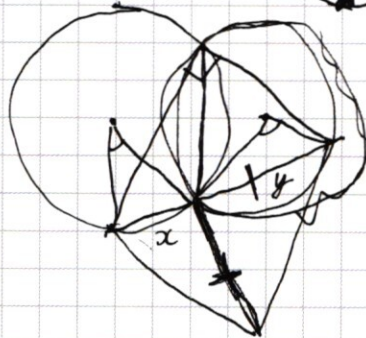
$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90^\circ$$

$$2R^2(1 - \cos \alpha) = y^2$$

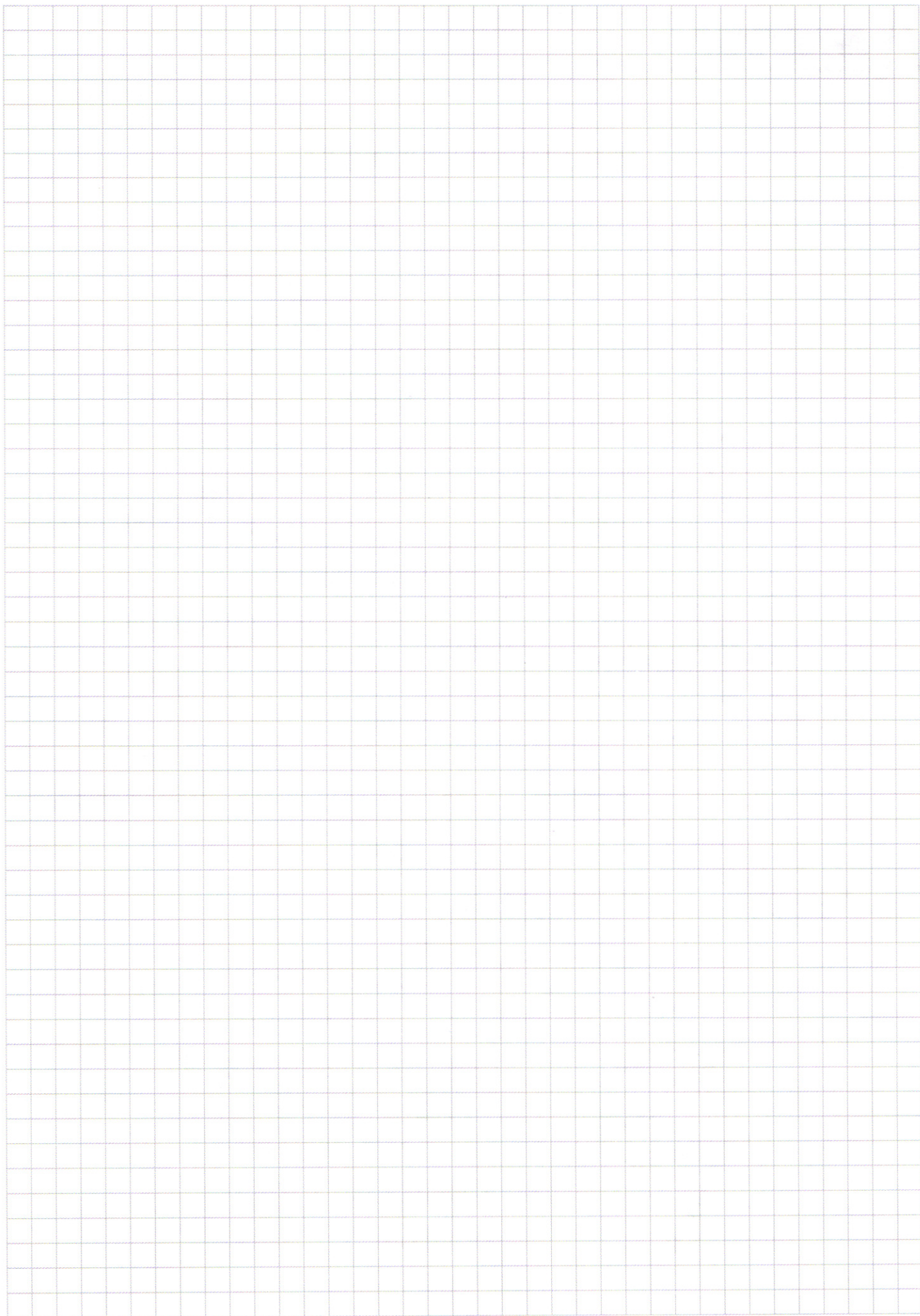
$$\alpha = 180^\circ - \beta$$

$$\cos \alpha = -\cos \beta$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2R$$



$$2R \sqrt{1 - \cos \alpha} = \sqrt{x^2 + y^2}$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2x^4 + x^2 - 2x + 3x^3 - 3x^2 + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

— 1-корень

1+2-3

$$(x+1)(ax^3+bx^2+cx+d) = 2x^4+3x^3-2x^2-2x+1$$

$$2 \quad 1 \quad -3 \quad 1$$

$$\frac{1}{2} \quad 2 \quad 2 \quad -2 \quad 0$$

~~2~~
~~2~~

$$a+2=3$$

$$b+a=-2$$

$$c+b=-2$$

$$d+c=1$$

$$b=-3$$

$$a=1$$

$$2x^3 + x^2 - 3x + 1 = (x^2 + x - 1)(2x - 1)$$

$$2x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$(x^2 + x - 1)(2x - 1) = 2x^3 + x^2 - 3x + 1$$

$$\frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

$$\frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

5

$$2+1+2-3-3+1=0$$

$$2 \cdot \frac{1}{16} + 3 \cdot \frac{1}{8} - 2 \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = \frac{9}{8}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1 + 1 = 0$$

$$2x^2 - 3x + 1 = \left(\sqrt{2}x - \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\sqrt{25 - (x-3)^2} = 4$$

$$(x-3)^2 \leq 25 - (x-3)^2$$

$$x^2 - 14x + 49 = 25 - x^2 + 6x - 9$$

$$2x^2 - 20x + 33 = 0$$

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6 \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25 \end{cases}$$

~~25~~

$$x-3 \geq y \quad \sqrt{25-x^2+6x-9} = \sqrt{16+6x-x^2}$$

$$\sqrt{16+6x-x^2} - 4$$

$$x^2+2x+1 = (x+1)^2 \geq 16+6x-x^2$$

$$2x^2-4x-16 \geq 0$$

$$x^2-2x-8 \geq 0 \quad x \geq 2$$

$$(x-4)(x+2) \geq 0$$

1

3.

$$3 \cdot 4x + 12y = 3; 1$$

$$4 \cdot (1,3)x + 4 \cdot (1,3)y = 1$$

$$20 - 5 \sqrt{16} = 4 + 10 + 6 = 20$$

$$\frac{168}{35} = \frac{84}{70}$$

$$\frac{84}{70} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$