

# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

## ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

### 9 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р  
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Вокруг птичьей кормушки в одной плоскости с ней по двум окружностям с одинаковой скоростью летают синица и снегирь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой кормушка (общий центр окружностей) находится в точке  $O(0; 0)$ . Синица движется по часовой стрелке, а снегирь – против. В начальный момент времени синица и снегирь находятся в точках  $M_0(\sqrt{3}; 3)$  и  $N_0(6; -2\sqrt{3})$  соответственно. Определите координаты всех положений снегиря, в которых расстояние между птицами будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров  $a$  и  $b$ , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a, \\ 3bx + (a-b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение  $\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$ .

4. [6 баллов] Решите неравенство  $6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2|x+1| + 1 \geq 0$ .

5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 7000. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

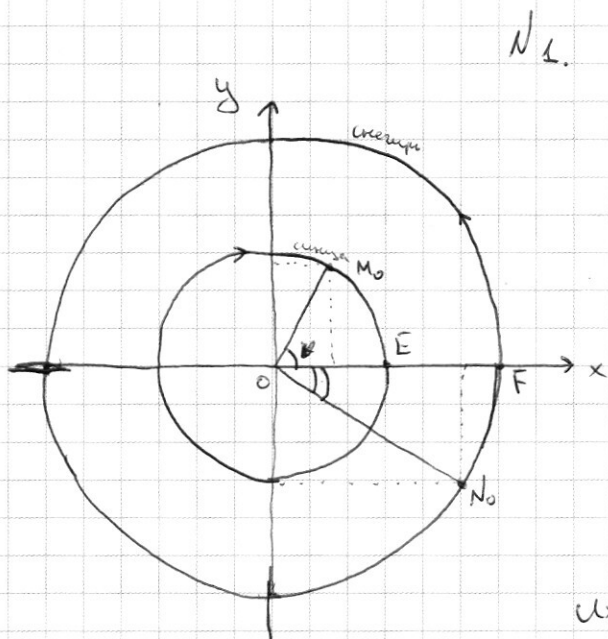
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 7 пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . На первой окружности выбрана точка  $C$ , а на второй – точка  $D$ . Оказалось, что точка  $B$  лежит на отрезке  $CD$ , а  $\angle CAD = 90^\circ$ . На перпендикуляре к  $CD$ , проходящем через точку  $B$ , выбрана точка  $F$  так, что  $BF = BD$  (точки  $A$  и  $F$  расположены по разные стороны от прямой  $CD$ ). Найдите длину отрезка  $CF$ .

7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10, \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169. \end{cases}$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$M_0(\sqrt{3}, 3)$$

$$N_0(6, -2\sqrt{3})$$

по теореме Пифагора:

$$R_{\text{внутр}} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$R_{\text{внешн}} = \sqrt{6^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

их радиусы отличаются в 2 раза.

значит за то время, за которое

внутренний пролетает  $\angle = 2\alpha$  внешний пролетает угол только  $\angle = \alpha$ .

Чему равен косинус угла отрезка  $OM_0$  и оси  $Ox$ :  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 0,5$   
значит  $\alpha = 60^\circ$

А чему равен синус угла отрезка  $OM_0$  и оси  $Ox$ :  $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = 0,5$   
значит  $\beta = 30^\circ$ . ~~Разность~~ мин расст - это разность их радиусов.

мин расст будет  
Так  $\frac{60}{30} = 2$  то ~~оно будет~~ на оси  $Ox$

(Потому что внешний летит к точке E  $\frac{2\pi r}{6} = \frac{\pi r}{3}$

А именно  $\frac{2\pi \cdot 2r}{12} = \frac{\pi r}{3}$  значит они  
окажутся на оси  $Ox$   
в одно время.



Когда wage ~~to~~ или растёт в отрасли  
FNC сокращает производство в отрасли  
B, иначе будет в E, затем ~~to~~ изменится

$$\frac{90}{3} = 30^\circ \text{ (первое)}; \text{ а сумма } \frac{90}{3} \cdot 2 = 60^\circ$$

слева будет мин. раст. координата стержня.

$$r = 4\sqrt{3} \quad x = -2\sqrt{3} \quad y = 6 \quad (\sqrt{48-12})$$

Zatun, koga crveno se žigla i A, a curio B F.

когда будет 3е или 4ое сечение будет  
меньше 1м. Оно пролетит  $\frac{\pi r}{3} \cdot (30^\circ)$ , и снова  $\frac{\pi r}{3} (60^\circ)$

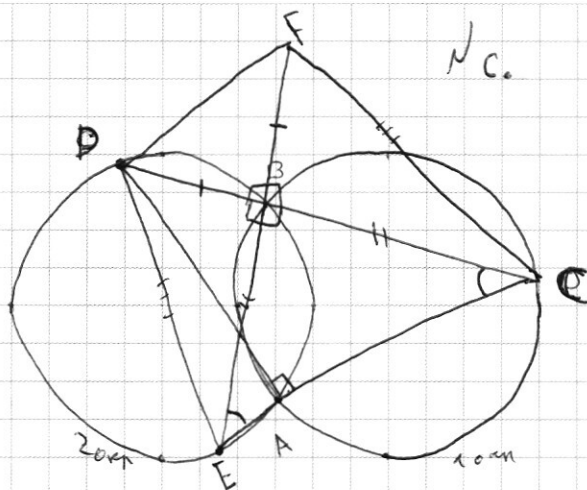
координата по  $x$ , тогда же  $x = -2\sqrt{3}$ , а по  $y$ ,  $y = -6$ .

Затем ~~оп~~ снова мы расс. бдгет в точках  $F_{\mu C}$ , т.е.

всего 3 результата.

Order:  $(4\sqrt{3}, 0); (-2\sqrt{3}, 6); (-2\sqrt{3}, -6)$ .

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



DE диаметр г.к.  $\angle DBE = 90^\circ \Rightarrow \angle DAE = 90^\circ \Rightarrow E, A, C$  — лежат на одной прямой (г.к.  $\angle EAD + \angle DAC = 180^\circ$ ).  $\angle BEA = \angle BCA$  (г.к. углы опираются на равные дуги, равных окружностей)  $\Rightarrow BE = BC$

$\triangle DBE = \triangle FBC$  по стороне и  $\angle$  между ними

$$BE = BC$$

$$\angle DBE = \angle FBC = 50^\circ$$

$$DB = FB \text{ по усл. } \Rightarrow DE = FC = \text{диаметр} = 2r = 2 \cdot 7 = 14.$$

Ответ: 14.

N5.

7000 разное на прот мн.  $7000 = 7 \cdot 2^3 \cdot 5^3$

преж двух мн  $2 \cdot 5 = 10 > 9$ ; всего их 7, значит  
в последней цифрой является 1

Есть  $C_6^3$  способов расставить 3 посылки на 6 мест =

$$= \frac{6!}{(6-3)! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20 \text{ способов все остальные}$$

умножается ~~на 2~~ <sup>двойки</sup> затем, есть 7 способов посылки 7.

$7 \cdot 20 = 140$ . И теперь в каждом посылки 1  $140 \cdot 8 = 1120$  способов.

Ответ: 1120.

N3.

$$\frac{1}{2} (x+5) \sqrt{x^3 - 16x + 25} = x^2 + 3x - 10$$

$$\frac{1}{2} (x+5) \sqrt{x^3 - 16x + 25} = (x+5)(x-2) \quad x \neq -5 \text{ и } x:$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{x^3 - 16x + 25} = x - 2$$

$$\frac{x^3}{4} - 4x + \frac{25}{4} = x^2 - 4x + 4$$

$$x^3 - 4x^2 + 9 = 0$$

$$4x^2 - x^3 = 9$$

$$x^2(4-x) = 9$$

$$x_1 = 3.$$

$$1 \leq x_2 \leq 4,5$$

$$-1,5 \leq x_2 \leq -1$$

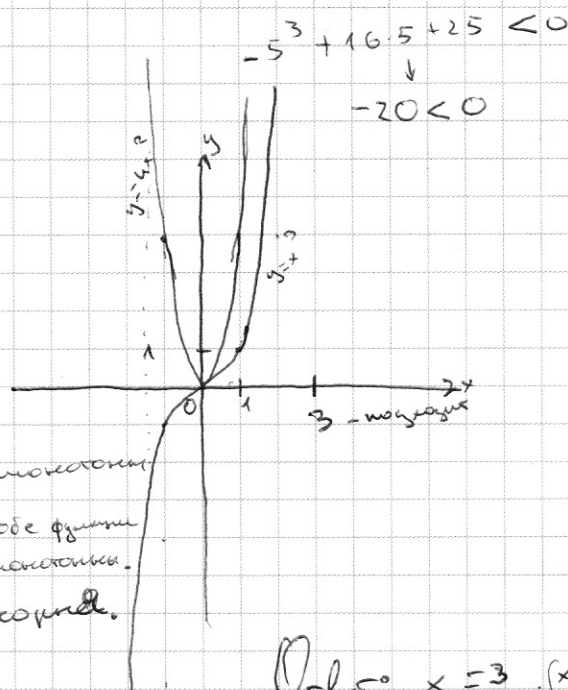
⇒ по крайней мере  $> 0$ .

когда  $x > 0$

обе функции монотонны

и когда  $x < 0$  обе функции монотонны.

поэтому ~~только~~ 2 корня.



$$\text{Ответ: } x_1 = 3 \quad \begin{cases} x_2 < -1 \\ x_2 > -1,5 \end{cases}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5.

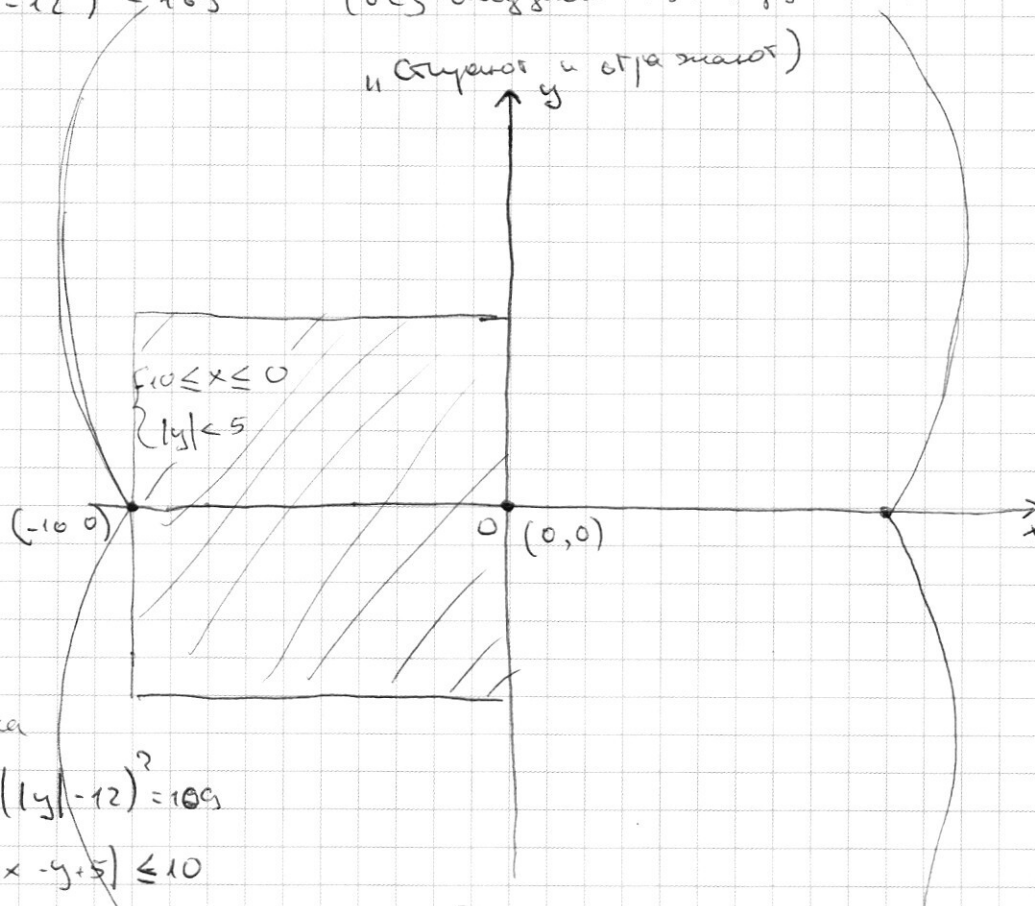
1)  $x \leq 0$  т.к. тогда  $2x + 10 \leq 10$

2)  $x \geq -10$  т.к. при  $x = -10$ :  
 $|y - 5| + |-y - 5| \geq 10$ , а должно  $\leq 10$   
~~тогда бы было~~  
~~то 10.~~

при  $-10 \leq x \leq 0$ :  $|y| \leq 5$ .

$$(|x| - 5)^2 + (|y| - 12)^2 = 169$$

(без модулей - это окружность, модули  
"отражают" и "отражают")



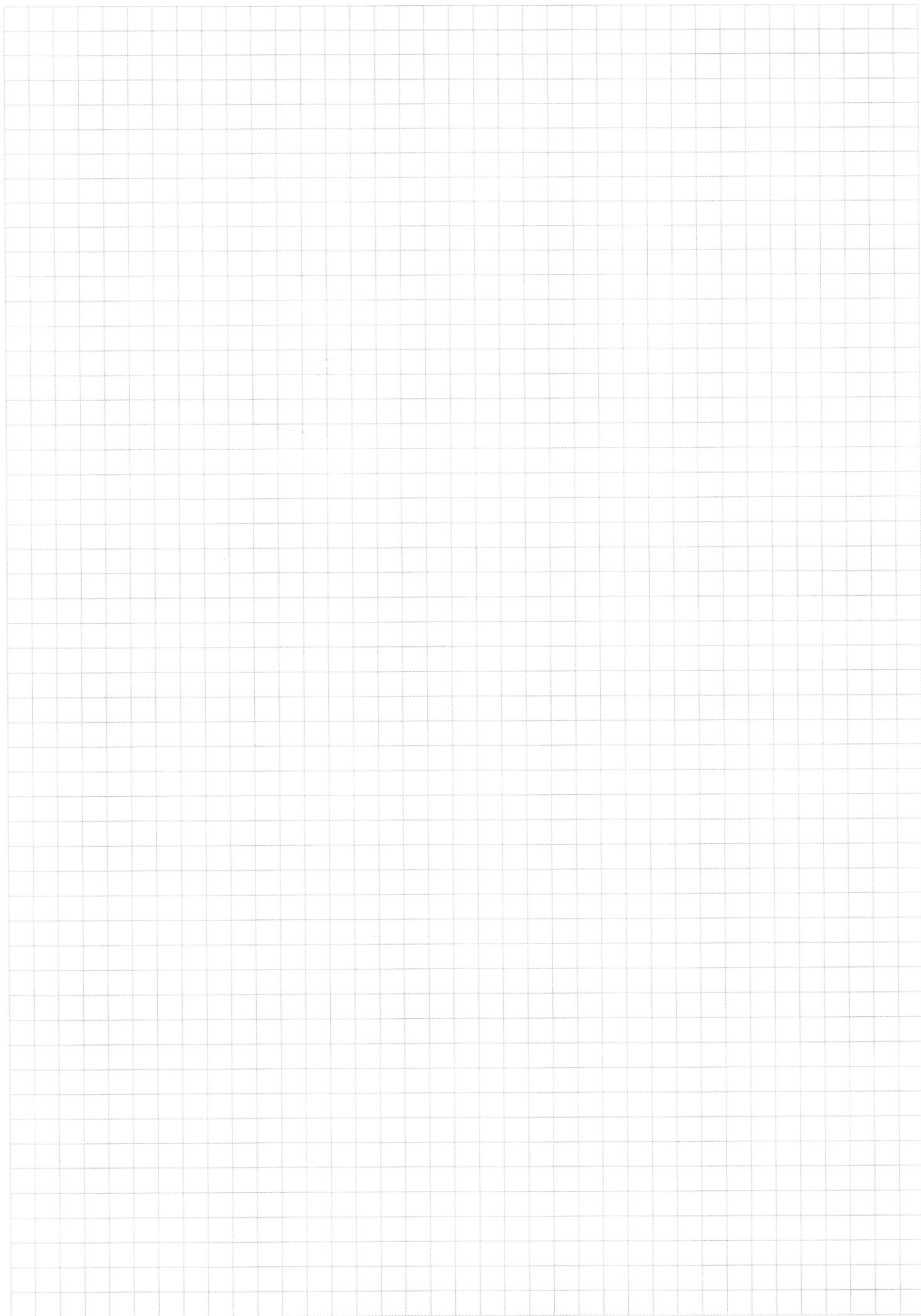
~~на графике~~

пересечение графика  
функции  $(|x| - 5)^2 + (|y| - 12)^2 = 169$

и усл.  $|x + 5 + y| + |x - y + 5| \leq 10$

подходят точки  $(-10, 0)$   
 $(0, 0)$

Ответ:  $\begin{cases} x = -10, & y = 0. \\ x = 0, & y = 0. \end{cases}$



☐ черновик    ☐ чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\text{длина осей эллипса} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$   
 $\text{длина осей эллипса} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$   
 $\text{радиус окружности} = 2\sqrt{3}$

$x^2 + y^2 = 48$   
 $x_1^2 + y_1^2 = 12$   
 $\frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1} + \dots$

$x^2 + y^2 = 48$   
 $x^2 + y^2 = 12$   
 $x^2 - 48 + y^2 = 0$   
 $x^2 - 12 + y^2 = 0$

$x_1 y_1 = 24$   
 $x_1 y_1 = 6$   
 $x_1 y_1 = 12$   
 $x_1 y_1 = 6 \cdot 24$   
 $x_1 y_1 = \frac{6 \cdot 24}{x_1 y_1} = x_1 y_1$

$\frac{y}{y_1} = 2$   
 $\frac{x}{x_1} = 2$

$x^2 + y^2 = 48$   
 $y^2 + x^2 + 2 \cdot \sqrt{48} + 48 = 4x^2$   
 $3 - y^2 = 8\sqrt{3} + 48$   
 $4 - y^2 = 48 + 8\sqrt{3}$   
 $4 - 8\sqrt{3} \cdot 12 = 105$   
 $4 - 8\sqrt{3} \cdot 12 = 105$

$24 \cdot \frac{96}{16}$

4  
5  
4  
2

$$G = \frac{1}{2}$$

$$16w^2$$

$\frac{10}{10} = \frac{10}{10}$

$$\frac{1 - \cos^2 \alpha}{2} = \frac{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)}{2}$$

2.2.1

25513

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}$$

3500 2

95  
125

1750.2.2  
3  
875 3  
3 5 1  
482

25% Gr 3

2

1.  $5^2 \cdot 2^{10}$

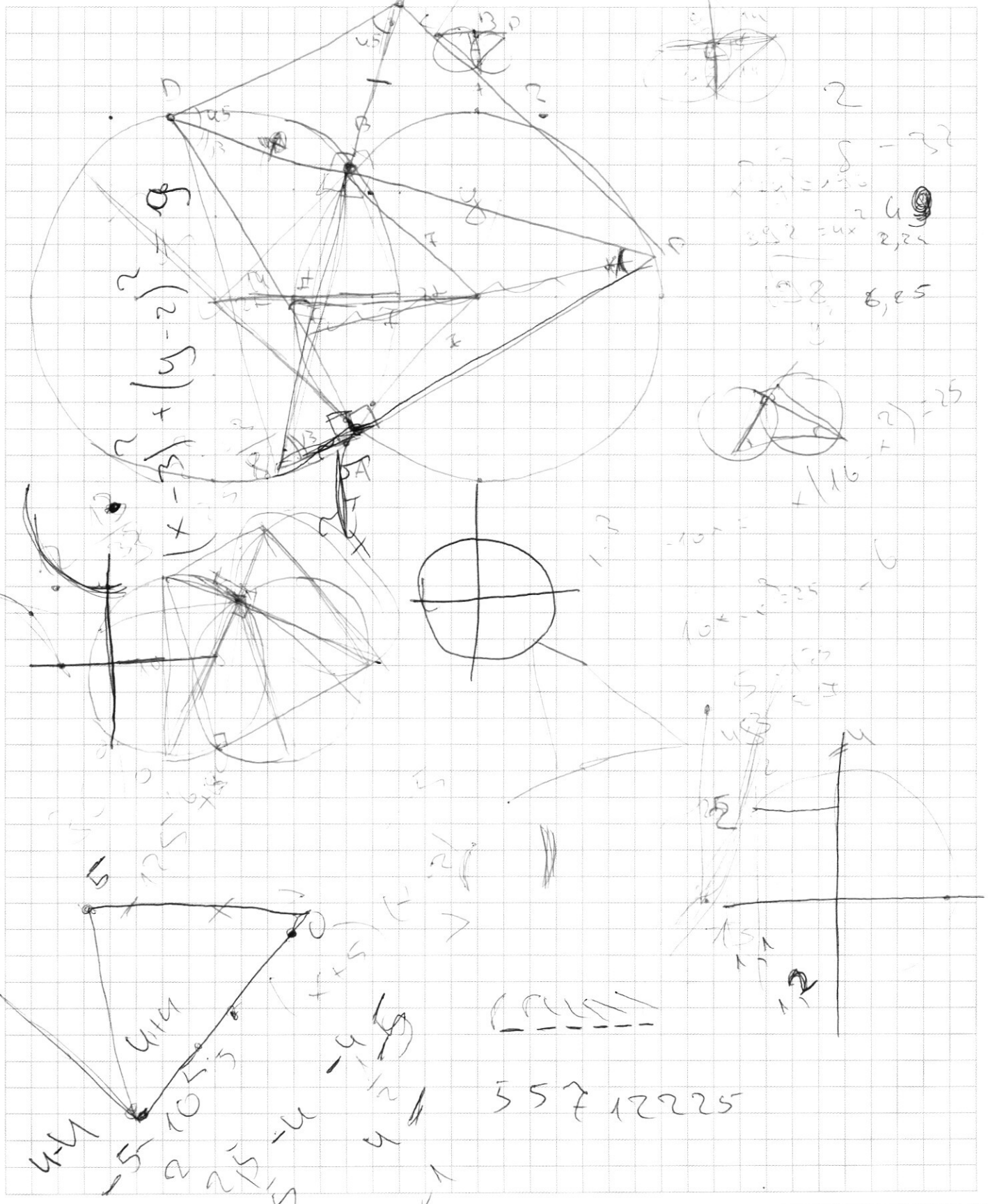
17

120  
64

20  
40  
30  
12.  
A

— 2352 — 8

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{1}{2} \sqrt{3-10 \times 175} = 2-2$$

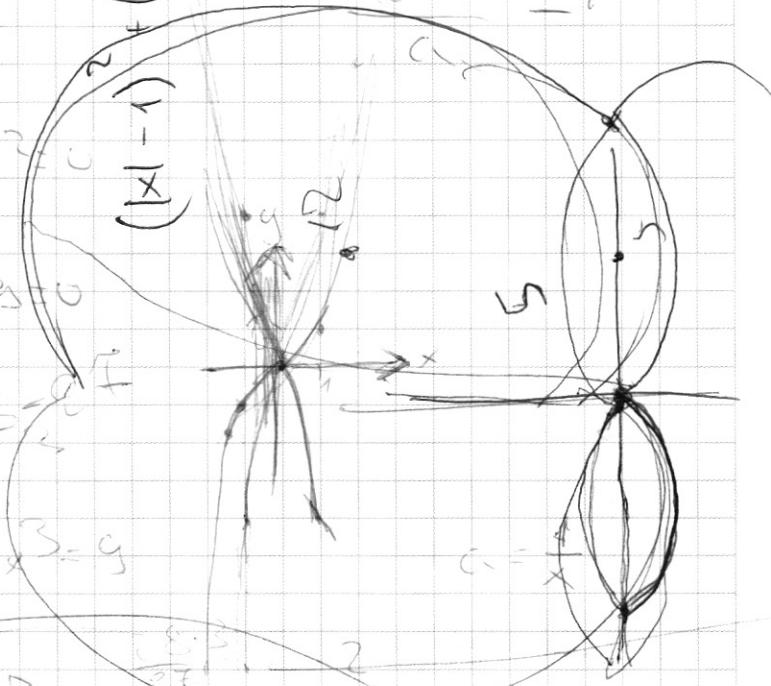
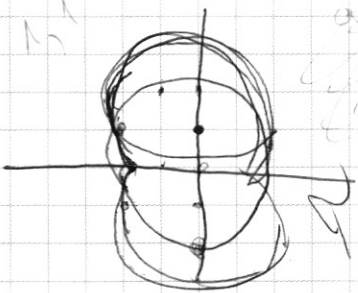
$$2x - 48 + 25$$

$$\frac{x^3}{u} - 4x + \frac{25}{u} = (x-2)^2$$

$$2x^2 - 48x + 25 = (x-2)^2$$

$$\frac{x^3}{u} - 4x + \frac{25}{u} = x^2 - 4x + 4$$

$$(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$$



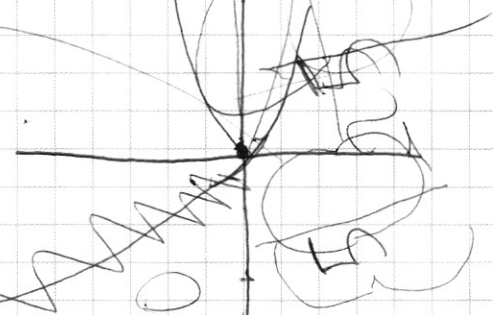
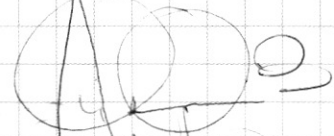
$$4x^2 - 13x + 9 = 0$$

$$x^2(4x-13) = 9$$

$$x = 3$$

$$(a+1)(a^2 - a + 1)$$

$$(a+x)^2$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~Чистовик~~ Черновик.

1)  $x \leq 0$  т.к. много пошлось

2)  $x \geq -10$  т.к.

Черновик

$2x + 10 \leq 10$   
(у сократился)

$|y - 5| + |-y - 5| \leq 10$   
какими бы  $y$  ни были (кроме 0)  
это больше 10.  
при этом максимальный  $|y| = 5$ .

Черновик

график функции  
 $(x - 5)^2 + (|y| - 12)^2 = 169$

1 условие  
когда только 2  
точки

$x \leq 0$   
 $x \geq -10$   
 $|y| \leq 5$

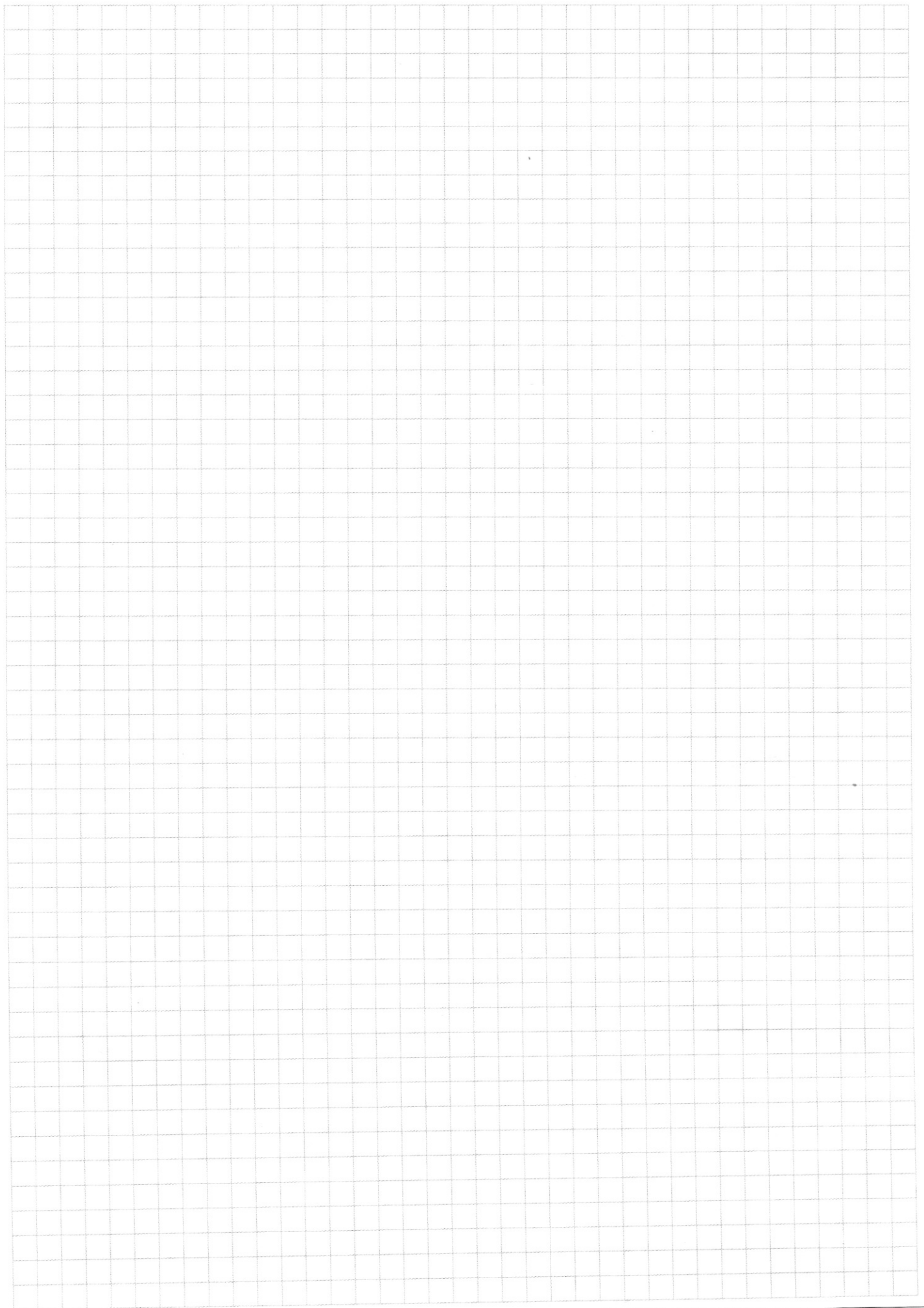
только

$(-10 \ 0) (0 \ 0)$

$\begin{cases} x = -10 \\ y = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Ответ:  $x = -10, y = 0$   
 $x = 0, y = 0$

Черновик



☐ черновик    ☐ чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)