

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" I

9 класс

ВАРИАНТ 1

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Муравей движется по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0(-1; \sqrt{3})$ и $N_0(2\sqrt{3}; 2)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.
2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений
- $$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a, \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$
- имеет бесконечно много решений.
3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему
- $$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6, \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

 $\sqrt{3}$

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$$

$$ОДЗ: x^3-x+10 \geq 0$$

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = (x+3)/(x+2)$$

$x = -3$ — не является решением, т.к.

$$(-3)^3 - (-3) + 10 = -27 + 13 < 0. \Rightarrow \text{сократим на } (x+3)$$

$$\sqrt{x^3-x+10} = x+2$$

Возведём обе части в квадрат

$$x^3-x+10 = x^2+4x+4$$

$$x^3-x^2-5x+6=0$$

$$x^3-2x^2+x^2-2x-3x+6=0$$

$$(x-2)x^2+x(x-2)-3(x-2)=0$$

$$(x-2)(x^2+x-3)=0$$

$$x=2$$

$$x^2+x-3=0$$

$$D=1+12=13$$

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$$

$$x=2$$

$$8-2+10 > 0 \Rightarrow x=2 \text{ — решение}$$

$$x = \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \text{ — тоже подходит, т.к.}$$

нам подходит любой положительный x , т.к.

$$\text{при } x > 1 \quad x^3 - x > 0 \Rightarrow 10 + x^3 - x > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } 1 > x > 0 \quad x^3 > 0 \\ x < 1 \Rightarrow 10 - x > 0 \end{array} \right\} 10 + x^3 - x > 0.$$

Теперь осталось только проверить $x = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$

~~$x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$~~

$$\begin{aligned} x^3 - x + 10 &= \left(\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}\right)^3 + \frac{1 + \sqrt{13}}{2} + 10 = -\frac{1}{8}(1 + \sqrt{13})^3 + 10,5 + 0,5\sqrt{13} = \\ &= -\frac{1}{8}(1 + \sqrt{13})(1 + 2\sqrt{13} + 13) + 10,5 + 0,5\sqrt{13} = -\frac{1}{8}(1 + \sqrt{13})(14 + \\ &+ 2\sqrt{13}) + 10,5 + 0,5\sqrt{13} = -\frac{1}{4}(1 + \sqrt{13})(7 + \sqrt{13}) + 10,5 + \\ &+ 0,5\sqrt{13} = -\frac{1}{4}(7 + \sqrt{13} + 7\sqrt{13} + 13) + 10,5 + 0,5\sqrt{13} = \\ &= -\frac{1}{4}(20 + 8\sqrt{13}) + 10,5 + 0,5\sqrt{13} = -5 - 2\sqrt{13} + 10,5 + \\ &+ 0,5\sqrt{13} = 5,5 - 1,5\sqrt{13} \end{aligned}$$

$$5,5 - 1,5\sqrt{13}$$

$$5,5 \quad 1,5\sqrt{13}$$

Сравним квадраты

$$5,5^2 \quad 1,5^2 \cdot 13$$

Разложим на 100

$$55^2 \quad 15^2 \cdot 13$$

$$55^2 = 5^2 \cdot 121 = 25 \cdot 121 = 25 + 120 \cdot 25 = 25 + 60 \cdot 50 = \\ = 25 + 3000 = 3025$$

$$15^2 \cdot 13 = 9 \cdot 25 \cdot 13 = 225 \cdot 13 = 2250 + 3 \cdot 225 = \\ = 2250 + 675 = 2850 + 75 = 2925$$

$$5,5 > 1,5\sqrt{13} \Rightarrow 5,5 - 1,5\sqrt{13} > 0 \Rightarrow x = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$$

- корень

$$\text{Ответ: } x = 2; \quad x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}; \quad x = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

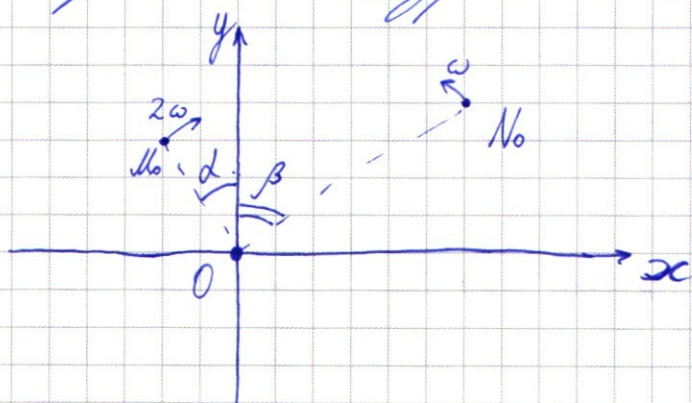
N1

Муравей и пчух движутся по окружностям радиусами R_m и R_n соответств.

$$R_m = OM_0 = \sqrt{1+3} = 2$$

$$R_n = ON_0 = \sqrt{4+3 \cdot 4} = 4$$

Так как линейные скорости одинаковые, угловые отличаются как радиусы в 2 раза. Угловая скорость муравья 2ω , а пчуха ω .



рассмотрим
вектора

$$\vec{OM}_0 (-1; \sqrt{3})$$

$$\vec{ON}_0 (-2; 2)$$

$$\vec{OY} (0; 1)$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{OM}_0 \cdot \vec{OY}}{OM_0 \cdot OY} = \frac{-1 \cdot 0 + \sqrt{3} \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{ON}_0 \cdot \vec{OY}}{ON_0 \cdot OY} = \frac{0 + 2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$\beta = 60^\circ$$

Введем угловую систему координат, где угол будем отсчитывать ~~от~~ по часовой стрелке от направления $\vec{OY}$

Изначально между муравьей и жуком -90° до встречи жука пройдёт:

$$\frac{90^\circ}{2\omega + \omega} \cdot \omega = 30^\circ$$

~~№~~ (встреча $\Leftrightarrow$ минимальное расстояние между жуком и муравьей, это происходит, когда у них одна угловая координата) Координата встречи:

$$\varphi_{\text{встр}} = \beta - 30^\circ = 30^\circ$$

Затем жук будет проходить до встречи.

$$\frac{360^\circ}{2\omega + \omega} \cdot \omega = 120^\circ$$

и тогда возможные угловые координаты встречи:

$$\varphi = 30^\circ$$

$$\varphi = 270^\circ$$

$$\varphi = 150^\circ$$

A

B — начальная точка

C

Мы знаем радиус окружности, по которой движется жук, и знаем угловые координаты, можем легко найти просто координаты

$$A(2; 2\sqrt{3})$$

$$B(-4; 0)$$

$$C(2; -2\sqrt{3})$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N2

$$\left. \begin{aligned} 3(a+b)x + 12y &= a \\ 4bx + (a+b)by &= 1 \end{aligned} \right\}$$

$b \neq 0$, т.к. $4 \cdot 0x + (a+0) \cdot 0y = 0 \neq 1$
и корней нет вообще.

$(a+b) \neq 0$, т.к. иначе: $12y = a$, получаем
единственное решение.

Чтобы было бесконечно много
корней одно уравнение должно
получаться умножением другого
на число, т.е.:

$$\frac{3(a+b)}{4b} = \frac{12}{(a+b)b} = a$$

$$\frac{3(a+b)}{4} = ab$$

$$12 = (a+b)ab = \frac{3}{4}(a+b)^2$$

$$(a+b)^2 = 16$$

$$a+b = 4$$

$$a+b = -4$$

Рассмотрим оба случая:

1.) $a = 4 - b$

$$3 = b(4-b)$$

$$b^2 - 4b + 3 = 0$$

$$b^2 - 4b + 4 = 1$$

$$(b-2)^2 = 1$$

$$b-2 = 1$$

$$b = 3$$

$$a = 1$$

$$12x + 12y = 1$$

$$12x + 12y = 1$$

$$2.) -3 = b(-4-b)$$

$$3 = b(4+b)$$

$$b^2 + 4b = 3$$

~~$$b^2 + 4b - 3 = 0$$~~

~~$$D = 16 + 12$$~~

$$b^2 + 4b + 4 = 7$$

$$(b+2)^2 = 7$$

$$b+2 = \sqrt{7}$$

$$b = \sqrt{7} - 2$$

$$a = -2 - \sqrt{7}$$

$$\text{Ответ: } \left. \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 3 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} a = \sqrt{7} - 2 \\ b = \sqrt{7} - 2 \end{array} \right\}$$

15

$$b-2 = -1$$

$$b = 1$$

$$a = 3$$

$$12x + 12y = 3$$

$$4x + 4y = 1$$

$$b+2 = -\sqrt{7}$$

$$b = -\sqrt{7} - 2$$

$$a = \sqrt{7} - 2$$

$$\left. \begin{array}{l} a = 3 \\ b = 1 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} a = \sqrt{7} - 2 \\ b = -\sqrt{7} - 2 \end{array} \right\}$$

Рассмотрим 1400.

$$1400 = 14 \cdot 100 = (2 \cdot 5)^2 \cdot 2 \cdot 7 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$$

Рассмотрим из каких чисел может состоять наименьшее значащее число:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\left. \begin{array}{l} 2; 2; 2; 5; 5; 7; 1; 1 \\ 2; 4; 5; 5; 7; 1; 1; 1 \\ 8; 5; 5; 7; 1; 1; 1; 1 \end{array} \right\} \text{ три варианта.}$

Рассмотрим их по отдельности:

1) $2; 2; 2; 5; 5; 7; 1; 1$

Будем расставлять эти числа
во всевозможные позиции.

Вначале 7: 8 вариантов

Потом 5 и 5 на 7 позиций: $\frac{7 \cdot 6}{2} = 7 \cdot 3 = 21$

Потом 2; 2; 2 на 5 позиций: $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 5 \cdot 2 = 10$

На оставшиеся единицы.

Итого вариантов: $8 \cdot 21 \cdot 10 = 1680$.

2) $2; 4; 5; 5; 7; 1; 1; 1$

Аналогично (7; 4; 2, пятёрки; единицы, что оста-
лось)

$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot (5 \cdot 2) = 8 \cdot 42 \cdot 10 = 3360$

3) $8; 5; 5; 7; 1; 1; 1; 1$

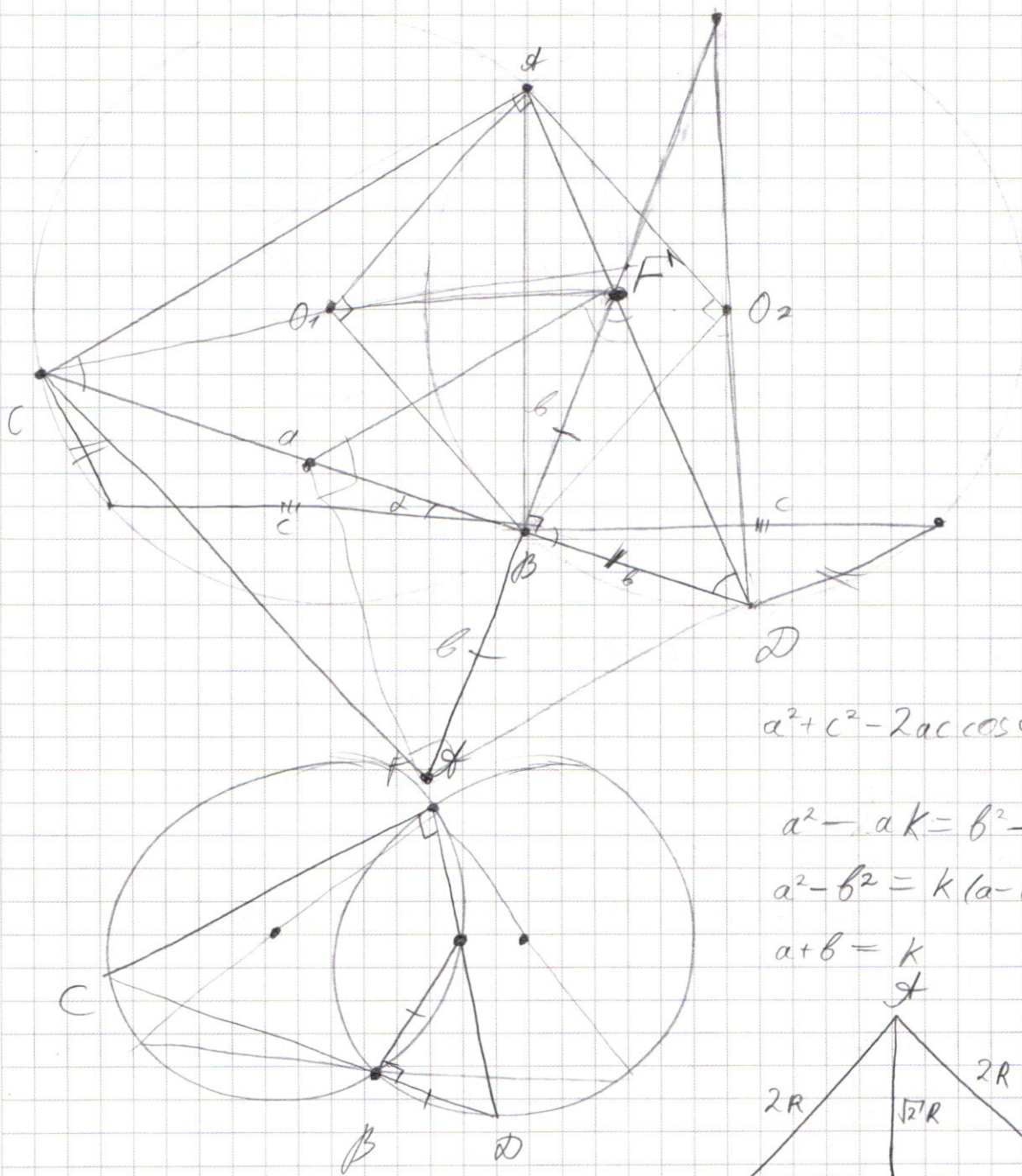
Аналогично.

$8 \cdot 7 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = 8 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 = 21 \cdot 40 = 840$

Всего нужных чисел:

$1680 + 3360 + 840 = 1680 + 3400 + 800 = 1680 + 4200 = 5880$

ответ: 5880

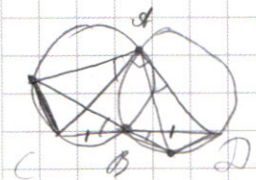
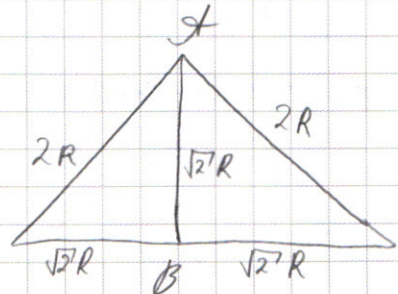


$$a^2 + c^2 - 2ac \cos \alpha = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$a^2 - ak = b^2 - bk$$

$$a^2 - b^2 = k(a - b)$$

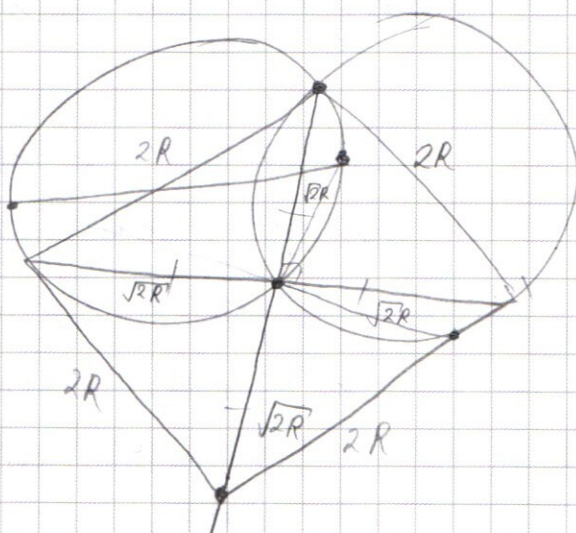
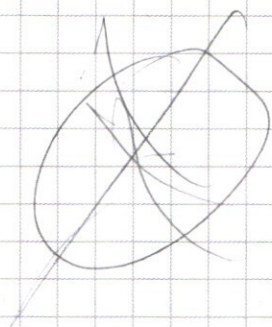
$$a + b = k$$



$$a + b = 2c \cos \alpha$$

$$a^2 + (2c \cos \alpha - a)^2 = 4c^2 \cos^2 \alpha - 4ac \cos \alpha + 2a^2 = 2(4c^2 \cos^2 \alpha - 2ac \cos \alpha + a^2)$$

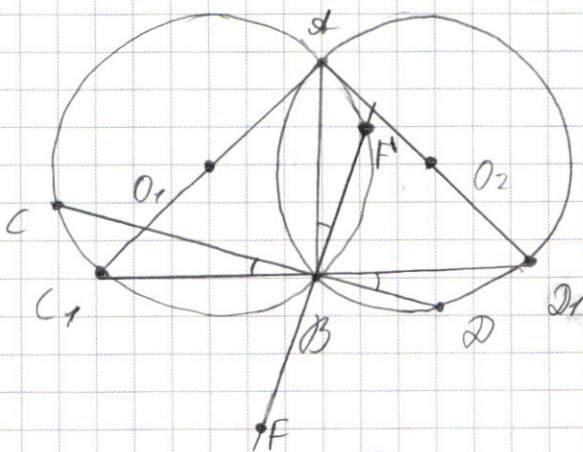
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



N6

Ответ: 18 ~~или 18~~

Несложно заметить, что $\angle ACD = \angle ADC$,
т.к. опираются на одну хорду
 AB в равных окружностях.
 $\angle ACD = \angle ADC = 45^\circ \Rightarrow$ тогда
 $\angle AO_1B = \angle AO_2B = 90^\circ$, где O_1 и O_2 —
центры окружностей. $\Rightarrow$
 $\Rightarrow AO_1BO_2$ — квадрат (все стороны
равны, углы 90°) Проведем диаметры
 AC_1 и AD_1



Несложно заме-
тить, что при этом
B будет находиться
на C_1D_1 , т.к.
 $\angle C_1BD_1 = \angle ABC_1 + \angle ABD_1 =$
 $= 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.
(опер. на дугах)

Теперь проведем через B перпендикуляр CD
Через B проведем прямую $FF' \perp CD$.
 F' — точка пересечения FF' и окружности
(как на рисунке).

Очевидно, что $\angle C_1BC_1 = \angle D_1BD_1 = \angle ABF' = \angle$
(повороты вокруг перпендикуляра), тогда
 $\widehat{C_1D_1} = \widehat{CC_1} = \widehat{AF'}$, а значит CF' — диаметр
(AC_1 — диаметр, $CC_1 = AF'$)

Заметим, что $\angle BAD_1 = \angle AD_1B = 45^\circ \Rightarrow$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x \geq 1$ — решение.

2.) $x < 1$

$$(2x^2 + x - 1)/(x^2 + x - 1) \geq 0$$

$$2x^2 + x - 1 = 0$$

$$D = 1 + 8 = 9$$

$$x_1 = \frac{-1+3}{2} = 1$$

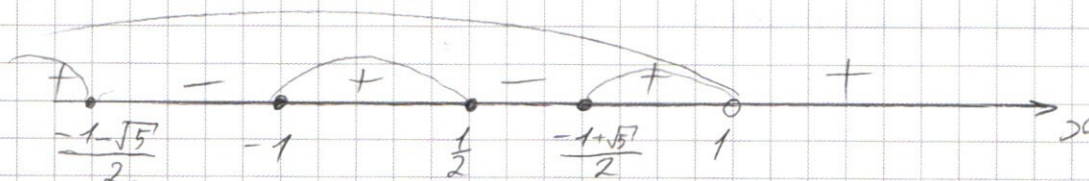
$$x_2 = \frac{-1-3}{2} = -1$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$D = 1 + 4 = 5$$

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$



$$x \in (-\infty; -1] \cup [1/2; 1] \cup [-1+\sqrt{5}/2; +\infty)$$

Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup [-1, 1/2] \cup [-1+\sqrt{5}/2; +\infty)$

№7

$$|x-3-y| + |x-3+y| \leq 6$$

$$|(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25|$$

$$(x-3-y)^2 + (x-3+y)^2 + 2|(x-3-y) \cdot (x-3+y)| \leq 36$$

$$(x-3-y)^2 + (x-3+y)^2 + 2|(x-3)^2 - y^2| \leq 36$$

Рассмотрим неравенство.

при $x \geq 3+y$; $y \geq 0$

$$2x-6 \leq 6$$

$$x \leq 6$$

$$y \leq 3$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{BD_1} \\ \overline{DD_1} &= \overline{AF'} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \overline{AB} - \overline{AF'} &= \overline{BD_1} - \overline{DD_1} \\ \overline{BF'} &= \overline{BD} \Rightarrow \\ \Rightarrow \overline{BF'} &= \overline{BD} \end{aligned}$$

$CF = CF'$, т.к. F и F' расположены симметрично отн. CD .

$$FF' \perp CD; \quad BF' = BD = BF$$

$$CF = CF' = 2R = 18.$$

$\angle CAD = 90^\circ$, т.к. $\angle C_1AD_1 = \angle C_1AD_2 = 90^\circ$
мы рассматривали все возможные случаи.

~~Но надо заметить, что все~~
~~рассуждения~~

1/4

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2/x - 1 + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + |x-1|^2 - 3x^2/|x-1| \geq 0$$

$$x^4 - x^2/|x-1| + x^4 - 2x^2/|x-1| + |x-1|^2 \geq 0$$

$$x^4 - x^2/|x-1| + (x^2 - |x-1|)^2 \geq 0$$

$$x^2(x^2 - |x-1|) + (x^2 - |x-1|)^2 \geq 0$$

$$(2x^2 - |x-1|)(x^2 - |x-1|) \geq 0$$

Рассмотрим по частям.

1.) $x \geq 1$

$$(2x^2 - x + 1)(x^2 - x + 1) \geq 0$$

$$2x^2 - x + 1 = 0$$

$$x^2 - x + 1 = 0$$

$$D < 0$$

$$D < 0$$

$$(2x^2 - x + 1)/(x^2 - x + 1) > 0. \text{ Всегда при } x \geq 1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\text{при } y \geq 0; \quad 3+y > x \geq 3-y$$

$$3+y-x+x-3-y \leq 6$$

$$y \leq 3$$

$$\text{при } x < 3-y \quad ; \quad y \geq 0$$

$$6-2x \leq 6$$

$$-2x \leq 0$$

$$x \geq 0.$$

~~Теперь~~ ~~Теперь~~ теперь рассмотрим

$$y < 0.$$

$$x \geq 3-y$$

$$2x-6 \leq 6$$

$$x \leq 6$$

$$3-y > x \geq 3+y$$

$$x-3-y+3-x-y \leq 6$$

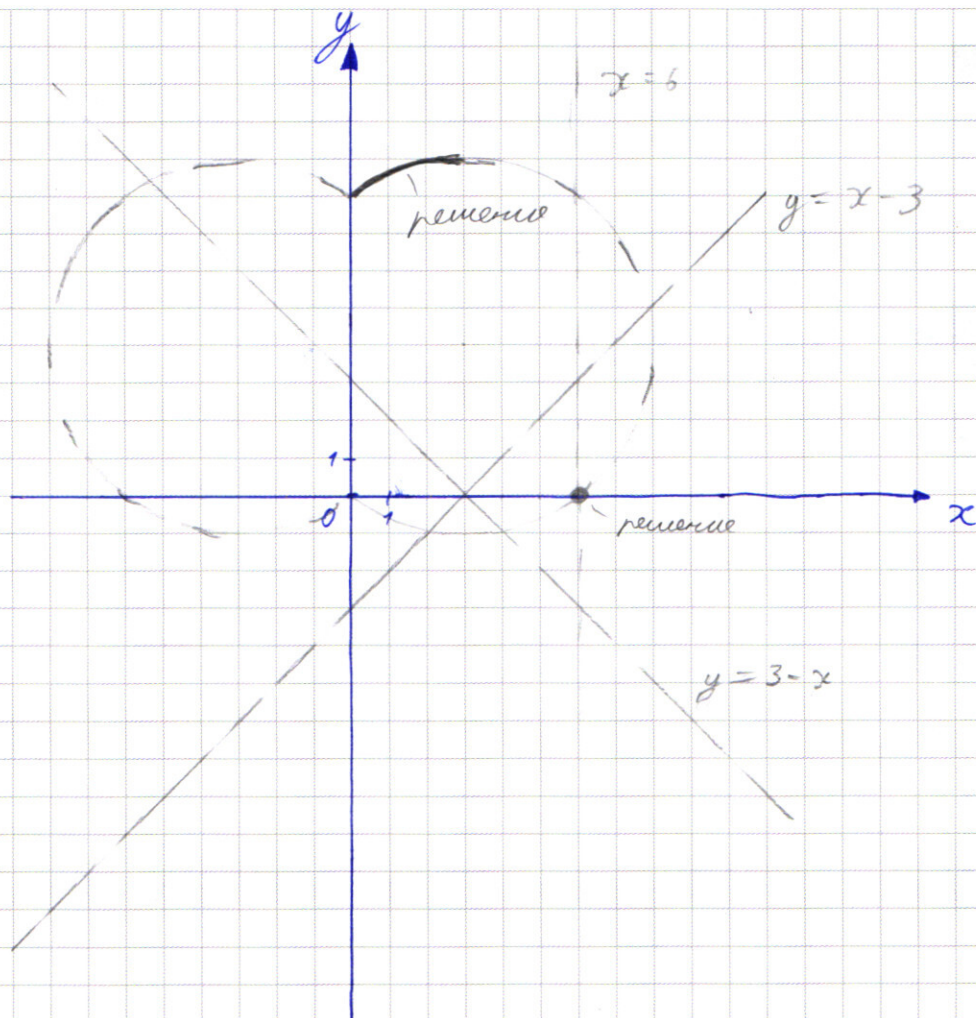
$$-2y \leq 6$$

$$y \geq -3$$

$$x < 3-y$$

$$6-2x \leq 6$$

$$x \geq 0$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$n1 \quad R_m = \sqrt{1+3} = 2$$

$$R_x = \sqrt{4+4 \cdot 3} = 4$$

$$n3 \quad (x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6 = x^2+3x+2x+6$$

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x(x+3) + 2(x+3)$$

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = (x+2)(x+3)$$

$$x = -3$$

$$(-3)^3 + 3 + 10 = -27 + 13 < 0.$$

$$\sqrt{x^3-x+10} = x+2$$

$$x^3-x+10 = x^2+4x+4$$

$$x^3-x^2-5x+6=0$$

$$x^3-2x^2+x^2-2x-3x+6=0$$

$$x^2(x-2)+x(x-2)-3(x-2)=0$$

$$(x^2+x-3)(x-2)=0$$

$$x=2$$

$$x^2+x-3=0$$

$$f(x) = x^3 - x + 10$$

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

$$3x^2 - 1 > 0$$

$$x^2 > \frac{1}{3}$$

$$x(x^2-1) = 10$$

$$-2,5^3 + 2,5 + 10$$

$$-6,25 \cdot 2,5 + 12,5$$

$$3,5^2 = 0,49 \cdot 25 \leq 12,5$$

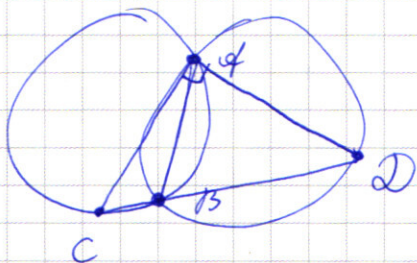
$$\frac{(-1-\sqrt{13})}{1+2\sqrt{13}+13} = \frac{-1-2\sqrt{13}-13-\sqrt{13}+26-13\sqrt{13}}{12-12\sqrt{13}}$$

$$2x^4 + x^2 - 2x + 1 - 3x^2|x-1| \geq 0$$

$$2x^4 + |x-1|^2 - 3x^2|x-1| \geq 0$$

$$(\sqrt{2}x^2)^2 + |x-1|^2 - 3x^2|x-1| \geq 0$$

$$(\sqrt{2}x^2 - |x-1|)^2 - (3 - 2\sqrt{2})x^2|x-1| \geq 0$$



$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

~~2.81~~

$$\sim \underline{\underline{2.81 - 3.27 + 3.6 - 2x + 1}}$$

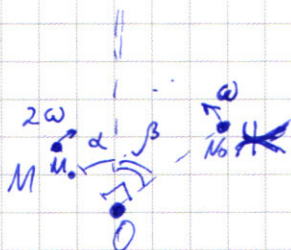
N1

$$\overrightarrow{OM_0} (-1; \sqrt{3})$$

$$\overrightarrow{ON_0} (2\sqrt{3}; 2)$$

$$\overrightarrow{OM_0} \perp \overrightarrow{ON_0}$$

$$\overrightarrow{OY} (0; 1)$$



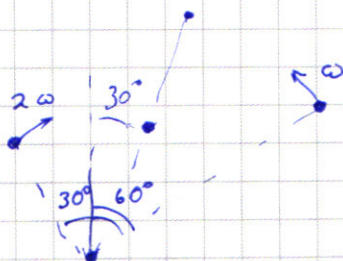
$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{OM_0} \cdot \overrightarrow{OY}}{|\overrightarrow{OM_0}| \cdot |\overrightarrow{OY}|} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \beta = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$\beta = 60^\circ$$



$$1400 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 1$$