

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На полу стоит блюдечко с молоком, вокруг которого по двум окружностям ходят котёнок и щенок. Скорость котёнка в два раза меньше скорости щенка. На плоскости пола введена прямоугольная система координат, в которой блюдечко (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Котёнок движется по часовой стрелке, а щенок – против. В начальный момент времени котёнок и щенок находятся в точках $M_0(-6; 0)$ и $N_0(2; 2\sqrt{3})$ соответственно. Определите координаты всех положений котёнка, в которых расстояние между животными будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все тройки целочисленных параметров a , b и c , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x - by + z = 2b, \\ ax + 5y - cz = a. \end{cases}$$

не имеет решений.

3. [4 балла] Решите неравенство $(\sqrt{x^3 - 18x - 5} + 2) \cdot |x^3 - 4x^2 - 5x + 18| \leq 0$.

4. [5 баллов] Решите уравнение $4x^4 + x^2 + 6x - 5x^2|x + 3| + 9 = 0$.

5. [5 баллов] Бросили 60 игральных костей (кубиков с цифрами от 1 до 6 на гранях; вероятность выпадения каждой из граней одна и та же) и посчитали сумму выпавших цифр. Какая из вероятностей больше: того, что сумма не меньше 300, или того, что сумма меньше 120?

6. [4 балла] Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D , пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E , а также вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно $\frac{6}{5}$. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1 .

7. [7 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

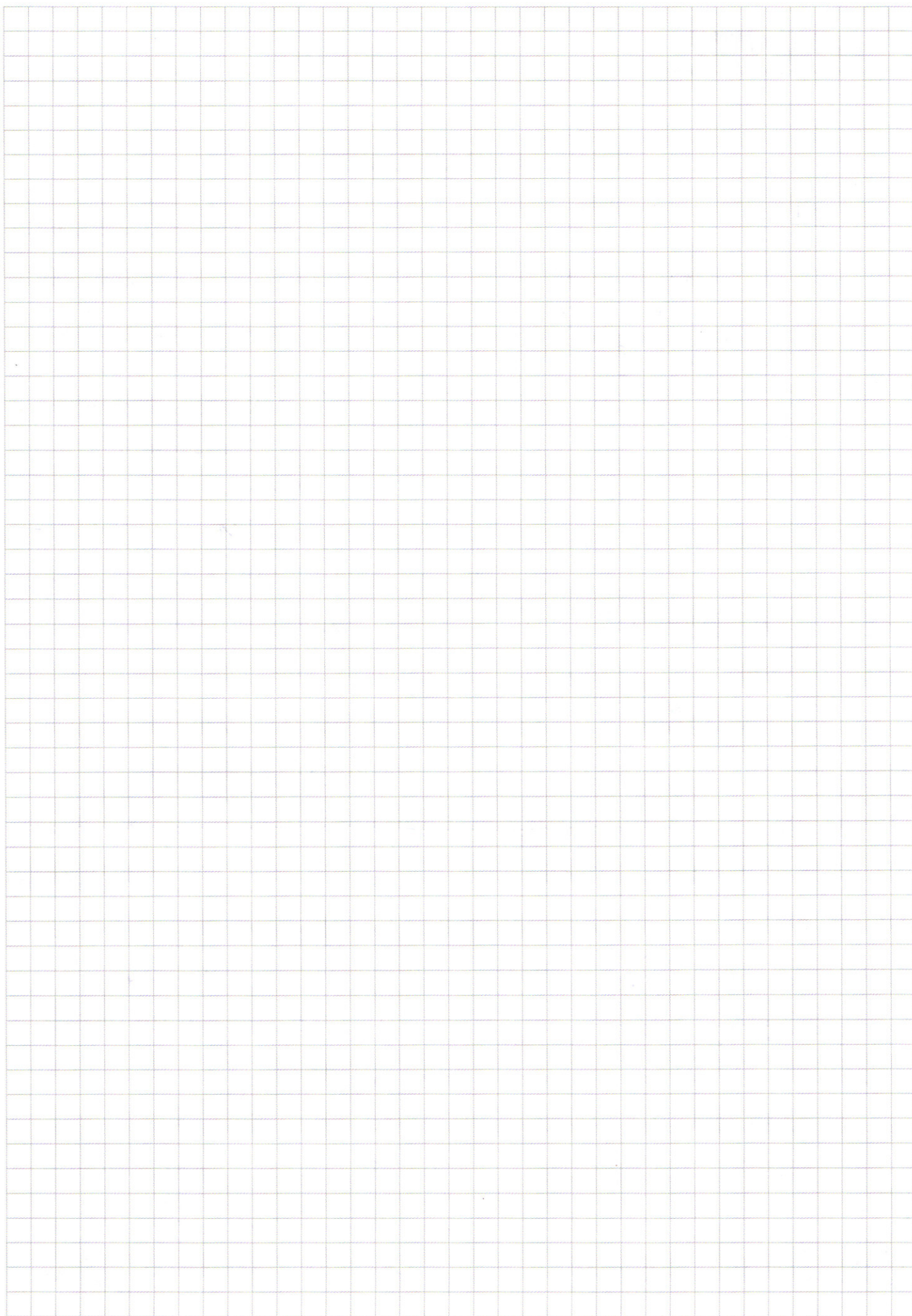
$$\begin{cases} a^2 - 2ax + 10y + x^2 + y^2 = 0, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = 169 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

У1

Угол, на который отклонён
щенок в начальный мо-
мент времени, состав-
ляет $\frac{\pi}{3}$ (поскольку
его тангенс
равен $\frac{1}{\sqrt{3}}$ тангенс
равен $\sqrt{3}$, исходя из условия
Обозначим α угол поворота ко-
тёнка по часовой стрелке относительно
начального положения. В момент кратчайшего расстояния
между животными (очевидно, что кратчайшее расстояние будет
тогда, когда котёнок и щенок расположатся на прямой, со-
державшей радиусы ^{обеих} концентрических окружностей од-
новременно). В силу того, что скорость щенка ~~будет~~ больше
По теореме Пифагора, окружность щенка имеет радиус 4, окру-
жность котёнка (по усл.) имеет радиус 6. Зная радиусы окружностей и от-
ношение скоростей, мы можем найти отношение их угловых
скоростей: $\frac{\omega_{ш}}{\omega_{к}} = \frac{v_{ш}/R_{ш}}{v_{к}/R_{к}} = \frac{v_{ш}}{v_{к}} \cdot \frac{R_{к}}{R_{ш}} = 2 \cdot \frac{6}{4} = 3$. Другими слова-
ми, пока котёнок повернётся на α по часовой стр., щенок
повернется на 3α против часовой. При этом прямая,
соединяющая их, проходит через начало координат (ис-
ходя из того, что при кратчайшем расстоянии прямая,
соединяющая их, содержит радиусы конц. окружностей). Тангенс



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

образами, когда они повернутся на α и 3α , их радиус-векторы совпадут. Из этого имеем: $\alpha + 3\alpha + \frac{\pi}{3} = \pi \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$. Тогда по-
лучим для удобства дальнейших расчётов будем использовать угол поворота котёнка относительно общепринятого начала отсчёта угла поворота (в нашем случае, точка $(6; 0)$). Такой угол составит $\frac{5\pi}{6}$. Выходя из кно это, положение котёнка в этот момент имеет координаты $(6\cos\frac{5\pi}{6}; 6\sin\frac{5\pi}{6}) = (-3\sqrt{3}; 3)$. Однако это не единственная точка, где пройдёт кратчайшее расстояние. Пусть до следующей «встречи» котёнок пройдёт по часовой ещё угол β . Щенок за это время пройдёт угол 3β . Поскольку они двигались в разные стороны, и при «встрече» их радиус-векторы снова совпадут, в сумме β и 3β дадут полный поворот, т.е. 2π . $\beta + 3\beta = 2\pi$, $4\beta = 2\pi$, $\beta = \frac{\pi}{2}$. То есть до след. «встречи» котёнок пройдёт почти угол. В момент следующей «встречи» происходит аналогичная ситуация, то есть по аналогии угол до следующей «встречи» вновь будет $\frac{\pi}{2}$, потом вновь и т.д. Таких различных «встреч» произойдёт 4, а на момент пятой котёнок вернётся на место первой встречи, т.к. относительно неё мы повернулись на $4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi$, т.е. полный оборот. Таким образом, кно у кно 4 положения: $(6\cos\frac{5\pi}{6}; 6\sin\frac{5\pi}{6})$, $(6\cos(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2}); 6\sin(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2}))$, $(6\cos(\frac{5\pi}{6} - \pi); 6\sin(\frac{5\pi}{6} - \pi))$, $(6\cos(\frac{5\pi}{6} - 2 \cdot \frac{\pi}{2}); 6\sin(\frac{5\pi}{6} - 2 \cdot \frac{\pi}{2}))$. ($\frac{\pi}{2}$ последовательно вычитается, так как мы двигаемся по часовой, т.е. в отри-

цательном направлении по тринормальной оси-
ности).

$$(6 \cos \frac{5\pi}{6}; 6 \sin \frac{5\pi}{6}) \equiv (-3\sqrt{3}; 3)$$

$$(6 \cos(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2}); 6 \sin(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2})) \equiv (6 \cos \frac{\pi}{3}; 6 \sin \frac{\pi}{3}) \equiv (3; 3\sqrt{3})$$

$$(6 \cos(\frac{5\pi}{6} - \pi); 6 \sin(\frac{5\pi}{6} - \pi)) \equiv (3\sqrt{3}; -3)$$

$$(6 \cos(\frac{5\pi}{6} - \frac{3\pi}{2}); 6 \sin(\frac{5\pi}{6} - \frac{3\pi}{2})) \equiv (-3; -3\sqrt{3})$$

Ответ: $(-3\sqrt{3}; 3), (3; 3\sqrt{3}), (3\sqrt{3}; -3), (-3; -3\sqrt{3})$.

№2

$$2x - by + z = 2b \Rightarrow z = by - 2x + 2b$$

$$\begin{cases} 2x - by + z = 2b \\ ax + 5y - cz = a \end{cases} \Rightarrow ax + 5y - bcy + 2cx - 2bc = a \rightarrow (a+2c)x + (5-bc)y = a+2bc \quad (I)$$

Уравнение (I) задаёт некоторую прямую.

В том случае, если ур. (I) справедливо для каких-
то x и y , то будет существовать соответствующее
им значение $z (z = by - 2x + 2b)$, а значит, система будет
иметь решение. Соответственно, нам необходимо под-
обрать такие целые a, b, c , что ур. (I) нефривально им
для каких x и y . При любых ненулевых коэффициен-
тах перед x и y уравнение (I) всегда задаст суще-
ствующую прямую. Если один из коэф. будет равен
нулю, а другой - нет, то прямая также будет существо-
вать (горизонтальная либо вертикальная). Значит, единствен-
ный подходящий случай - когда коэффициенты перед
 x и y одновременно равны нулю, а справа стоит не-
нулевое число:

$$\begin{cases} a+2c=0 \Rightarrow c=-\frac{a}{2} \\ 5-bc=0 \\ a+2bc \neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a+2(-\frac{a}{2}) \neq 0 \\ 5-b(-\frac{a}{2}) \neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a-a \neq 0 \\ 5+\frac{ab}{2} \neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 \neq 0 \\ 10+ab \neq 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{b \neq -10}$$

т.к. при $a=0 \Rightarrow c=0 \Rightarrow a+2bc=0$, то $a=0$ нам не по-
ходит, значит, можно на a сокра-
щать.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 1 \\ a, b, c \in \mathbb{Z} \\ 5 - bc = 0 \Rightarrow bc = 5, \end{cases}$$

b и c — целые числа. Данное уравнение выполняется в следующих случаях:

Ответ: подходящие тройки (a, b, c) :

$$(10, -1, -5); (-2, 5, 1); (2, -5, -1).$$

Проверка:

- $b=1, c=5$ — не удовл. $b \neq 1$ — не подходит
- $b=-1, c=-5 \Rightarrow a=-2c=10$
- $b=5, c=1 \Rightarrow a=-2$
- $b=-5, c=-1 \Rightarrow a=2$

$$(\sqrt{x^3 - 18x - 5} + 2)(x^3 - 4x^2 - 5x + 18) \leq 0$$

✓ Т.к. корень
всегда неотрица-
телен, а 2-поло-
жительное
число.

✓ Т.к. модуль
всегда неотри-
цателен.

$$\Rightarrow \begin{cases} x^3 - 4x^2 - 5x + 18 = 0 \text{ (I)} \\ x^3 - 18x - 5 \geq 0 \text{ (II)} \end{cases}$$

(условие существования
корня квадрат-
ного)

$x^3 - 4x^2 - 5x + 18 = 0$. $x=2$ является корнем данного многочлена.
Значит, исходя из Т. Безу, он делится без остатка на $(x-2)$.

Разделим в столбик:

$$\begin{array}{r} x^3 - 4x^2 - 5x + 18 \\ - (x^3 - 2x^2) \\ \hline -2x^2 - 5x + 18 \\ - (-2x^2 + 4x) \\ \hline -9x + 18 \\ - (-9x + 18) \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} x-2 \\ \hline x^2 - 2x - 9 \end{array} \rightarrow (x-2)(x^2 - 2x - 9) = 0$$

$$x^2 - 2x - 9 = 0$$

$$D = 4 + 36 = 40$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{40}}{2} = 1 \pm \sqrt{10}$$

Т.о. уравнение имеет корни $x=2, 1+\sqrt{10}, 1-\sqrt{10}$.
Для проверки существования корней квадратного подставим эти числа в неравенство (II).

$$1) x=2: 2^3 - 18 \cdot 2 - 5 = 8 - 36 - 5 < 0 \Rightarrow x \neq 2$$

$$2) x=1+\sqrt{10}: (1+\sqrt{10})^3 - 18 - 18\sqrt{10} - 5 = \underbrace{1+3\sqrt{10}+30+10\sqrt{10}}_{8+5\sqrt{10}} - 18 - 18\sqrt{10} - 5 = 8 - 5\sqrt{10}$$

$$5\sqrt{10} \hat{\sim} 8 \Rightarrow 8 - 5\sqrt{10} < 0 \Rightarrow x \neq 1+\sqrt{10}$$

$$250 \hat{\sim} 64$$

$$3) x=1-\sqrt{10}: (1-\sqrt{10})^3 - 18 + 18\sqrt{10} - 5 = \underbrace{1-3\sqrt{10}+30-10\sqrt{10}}_{8+5\sqrt{10}} - 18 + 18\sqrt{10} - 5 = 8 + 5\sqrt{10}$$

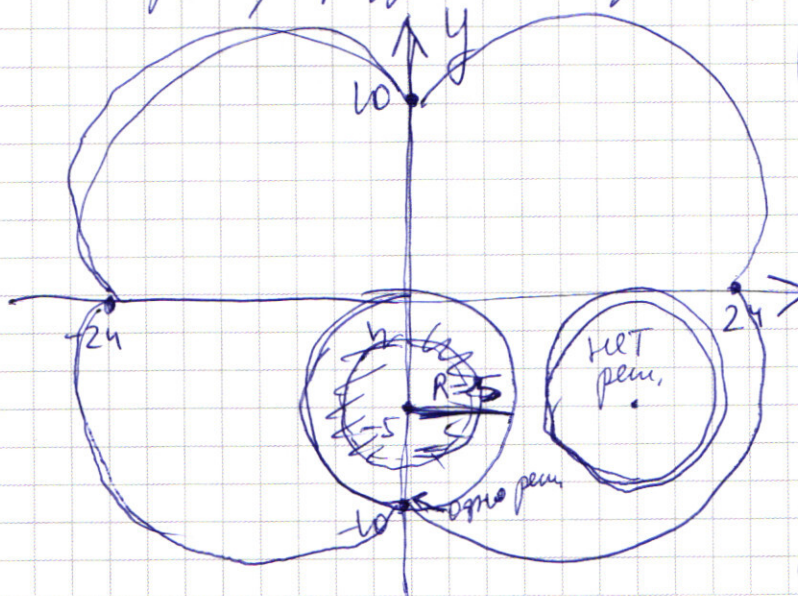
$$8 + 5\sqrt{10} > 0 \Rightarrow x = 1 - \sqrt{10}$$

Ответ: $x = 1 - \sqrt{10}$.

√7

$$x^2 - 24x + 10y + x^2 + y^2 = 0 \rightarrow \text{Выделим полный квадрат: } (x-12)^2 + (y+5)^2 = 5^2$$

$(x-12)^2 + (y+5)^2 = 13^2$ - без модулей данное уравнение задавало бы окружность с центром в $(12; -5)$ и радиусом 13, но из-за модулей ~~и~~ данное уравнение становится ~~разрешимым и симметричным~~ становится безразличным к изменению знака x и y , т.е. если ур. выполнено в (x_0, y_0) , то оно выполнено и в $(-x_0, y_0)$, и $(x_0, -y_0)$, и $(-x_0, -y_0)$. Т.е. окружность "отражается" во все 4 координатные четверти, образуя некоторый "цветок".



Окружность с параметром "плавают" вдоль оси абсцисс на высоте $y = -5$.

Таких образом, два решения будет в диапазоне от внешнего касания до внутреннего (плавание окр. по лепесткам)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

Внешнее касание: расстояние между центрами равно $R_1 + R_2$ (R_1 и R_2 — радиусы окружностей), внутреннее: расст. м-ду центрами равно $|R_1 - R_2|$.
Рассмотрим отр. полуось, т.к. картинка симметрична.

§ Нижняя граница:

$$-12 - a = R_1 + R_2 = 13 + 5 = 18$$

$$a = -30$$

Верхняя граница:

$$-12 - a = |R_1 - R_2| = 13 - 5 = 8$$

$$a = -20$$

Т.е. в левой полуоси $a \in (-30; -20)$. Из-за симметрии картинке также $a \in (20; 30)$.

Ответ: $a \in (-30; -20) \cup (20; 30)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\int (x-a)^2 + (y+\frac{\sqrt{7}}{5})^2 = 25$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-5)^2}$$

Нам подк.
всё от касание бисс
до к. внутр.

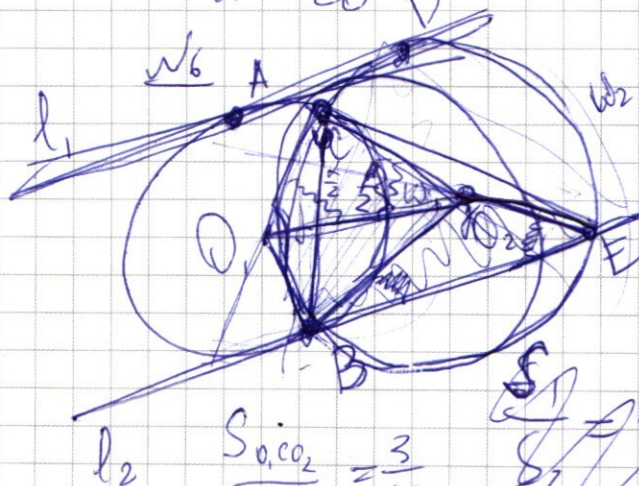
Хасама: $r = R_1 + R_2$ 0 p. 1 p. 2 p. 1 p.

~~12~~ $-12 - a = R_1 + R_2 = 13 + 5 = 18$ (X+12)

$$Q = -12 - 18 = -30$$

$$2) -12 - a = 13 - 5 = 8 \rightarrow a \in (-30; -20)$$

$$\alpha = -2\rho$$



$$\frac{S_{O, CO_2}}{S_{BO_2, E}} = \frac{3}{5}$$

8/7/8

$$\frac{R_1 \sin \phi}{R_2 \sin \phi} = \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{\sin \phi}{\sin \phi}$$

$$\cos 2R_1 - \frac{1}{2} R_1^2 \cos \alpha = \frac{1}{2} R_2^2 - \frac{1}{2} R_2^2 \cos \beta$$

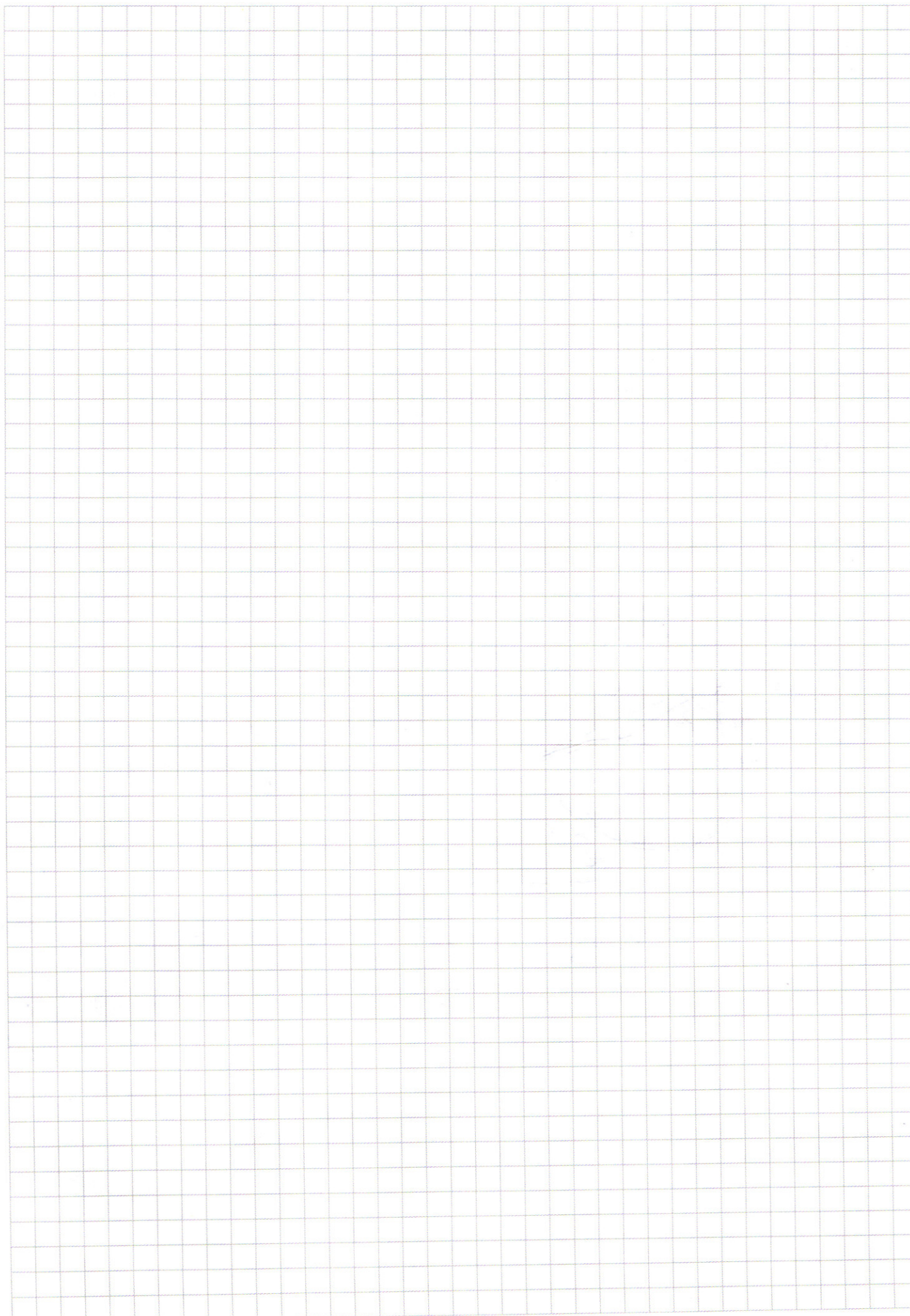
$$R_1^2 \cap R_2^2 \in R_1 \cos \alpha - R_2 \cos \beta$$

$$R_1^2(1 - \cos \alpha) = R_2^2(1 - \cos \beta)$$

$$\frac{1 - \cos 2}{1 - \cos \beta} = \frac{R_2^2}{R_1^2} \Rightarrow \frac{\sin^2 \frac{\beta}{2}}{\sin^2 \frac{\beta}{2}} = \frac{R_2}{R_1}$$

$$\frac{R_{BO, E}}{R_2} = \frac{BE \cdot \frac{1}{2 \sin \theta}}{BE \cdot \frac{1}{2 \sin \frac{\gamma}{2}}} = \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\sin \gamma} = \frac{1}{2 \cos \frac{\gamma}{2}}$$

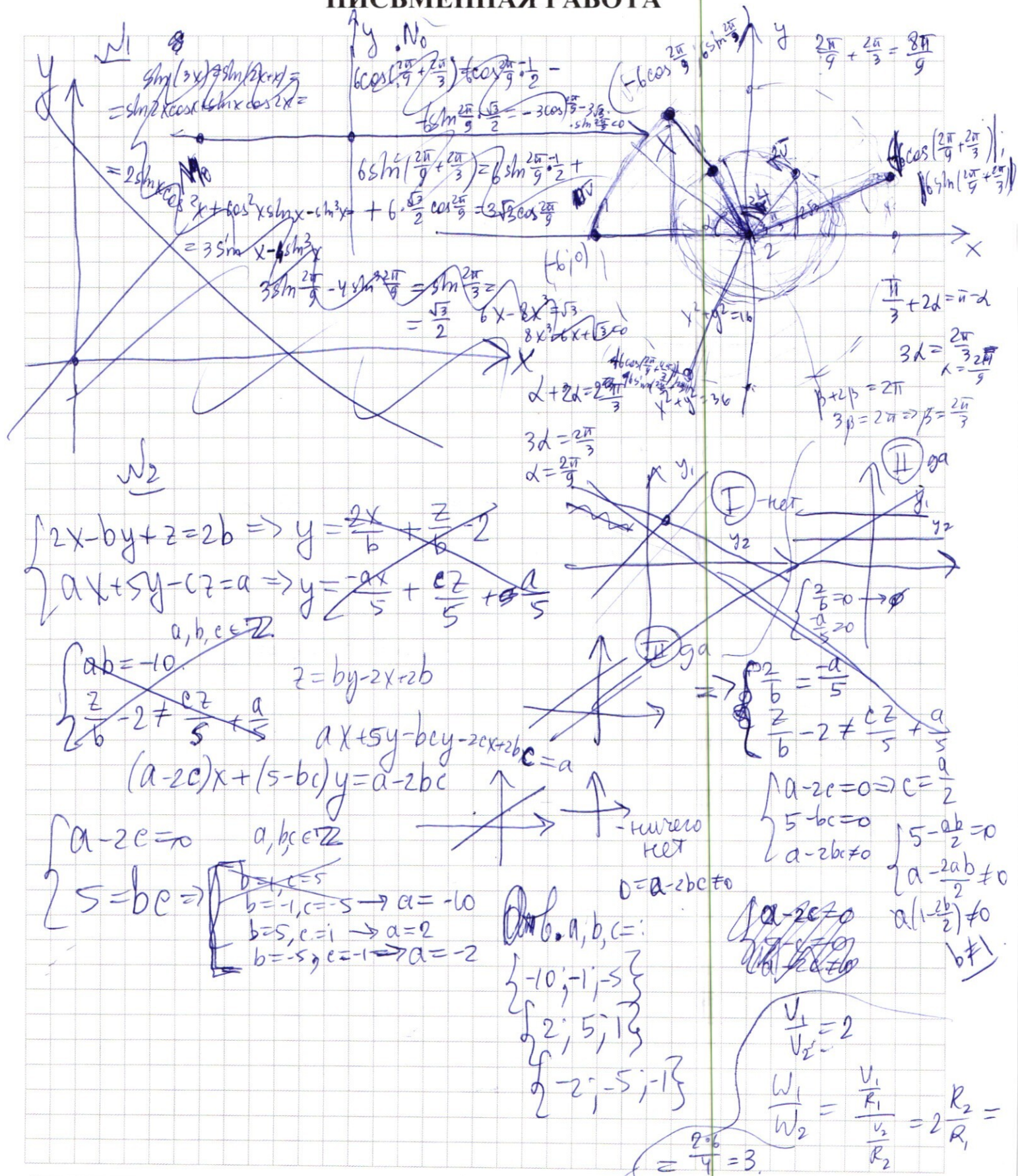
$$-6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -3\sqrt{3}$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\sqrt{x^3-18x-5+2} \cdot |x^3-4x^2-5x+18| \leq 0$$

$$\sqrt{x^3-18x-5+2} \cdot (x-2)(x-1-\sqrt{10})(x-1+\sqrt{10}) \leq 0$$

$$\sqrt{x^3-18x-5+2} \geq 0$$

$$x^3-4x^2-5x+18 \leq 0$$

$$x^3-4x^2-5x+18 \div x-2 = x^2-2x-9$$

$$x^2-2x-9 = 0$$

$$x = 1 \pm \sqrt{10}$$

$$x^3-18x-5 \geq 0$$

$$(x-2)(x-1-\sqrt{10})(x-1+\sqrt{10}) = 0$$

$$x = 2$$

$$x = 1 + \sqrt{10}$$

$$x = 1 - \sqrt{10}$$

$$(1+\sqrt{10})^3 - 18 - 18\sqrt{10} - 5 =$$

$$= 1 + 3\sqrt{10} + 30 + 10\sqrt{10} - 23 - 18\sqrt{10} =$$

$$= 8 - 5\sqrt{10} < 0$$

$$(1-\sqrt{10})^3 - 18 + 18\sqrt{10} - 5 =$$

$$= 1 - 3\sqrt{10} + 30 - 10\sqrt{10} - 18 + 18\sqrt{10} - 5 =$$

$$= 8 + 5\sqrt{10} > 0$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$x = 1 - \sqrt{10}$$

$$4x^4 + x^2 + 6x - 5x^3 \div x+3 + 9 = 0$$

$$x < -3$$

$$4x^4 + x^2 + 6x + 5x^3 + 15x^2 + 9 = 0$$

$$4x^4 + 5x^3 + 16x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$x > -3$$

$$4x^4 + x^2 + 6x - 5x^3 - 15x^2 + 9 = 0$$

$$4x^4 - 5x^3 - 14x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 5x^2 + 16x + 6 = 0$$

$$x^3 + \frac{5}{4}x^2 + 4x + \frac{3}{2} = 0$$

$$-\frac{1}{8} + \frac{5}{16} - 2 + \frac{3}{2} = \frac{3}{16} - \frac{1}{2} \neq 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4x^2 + 5x + 16 = 0$$

$$D = 25 - 64 < 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} > 0$$

$$4x^4 - 5x^3 - 14x^2 + 6x + 9 \div x-1$$

$$4x^3 - x^2 - 15x - 9$$

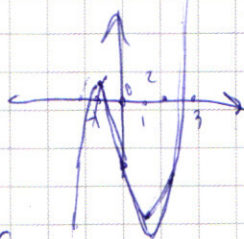
$$-x^3 - 14x^2$$

$$-x^3 + x^2$$

$$-15x^2 + 6x$$

$$-15x^2 + 15x$$

$$-9x + 9$$



$$\frac{-27}{2} - \frac{9}{4} + \frac{45}{2} - 9 =$$

$$= \frac{-54 - 9 + 90 - 36}{4} =$$

$$\frac{125}{2} - \frac{25}{4} - \frac{75}{2} - 9 =$$

$$= \frac{250 - 25 - 150 - 36}{4} =$$