

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Муравей двигается по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0(-1; \sqrt{3})$ и $N_0(2\sqrt{3}; 2)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a, \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6, \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$$

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = (x+3)(x+2)$$

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} - (x+3)(x+2) = 0$$

$$(x+3)(\sqrt{x^3-x+10} - (x+2)) = 0$$

$$\begin{cases} x^3-x+10 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+3=0 & (1) \\ \sqrt{x^3-x+10} - (x+2) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad x+3=0$$

$$x = -3$$

Проверяем радикал:

$$(-3)^3 - (-3) + 10 = -27 + 3 + 10 = -14 < 0 \Rightarrow -3 -$$

посторонний корень

$$(2) \quad \sqrt{x^3-x+10} - (x+2) = 0$$

$$\sqrt{x^3-x+10} = x+2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-x+10 = (x+2)^2 & (a) \\ x \neq -2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(a) \quad x^3-x+10 = x^2+4x+4$$

$$x^3-x^2-5x+6=0$$

Подбираем корень, явл. делит. члена

$$x=1 \quad 1-1-5+6 \neq 0$$

$$x = -1$$

$$-1 - 1 + 5 + 6 \neq 0$$

$$x = 2$$

$$8 - 4 - 10 + 6 = 0 \Rightarrow 2 - \text{корень многочлена}$$

$$x^3 - x^2 - 5x + 6$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - 5x + 6 & x - 2 \\ \underline{x^3 - 2x^2} & x^2 + x - 3 \\ -x^2 - 5x & \\ \underline{-x^2 - 2x} & \\ -3x + 6 & \\ \underline{-3x + 6} & \\ 0 & \end{array}$$

$$x^2 + x - 3 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 1 + 12 = 13$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$$

Получили корни: 2 , $\frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$, $\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$.

Проверим их, что $x + 2 \geq 0$:

$$2 + 2 \geq 0 \Rightarrow 2 - \text{корень}$$

$$\frac{-1 + \sqrt{13}}{2} + 2 = \frac{-1 + \sqrt{13} + 4}{2} = \frac{\sqrt{13} + 3}{2} \geq 0 \Rightarrow \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} -$$

корень

$$\frac{-1 - \sqrt{13}}{2} + 2 = \frac{-1 - \sqrt{13} + 4}{2} = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} = \frac{\sqrt{9 - \sqrt{13}}}{2} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} - \text{нест. корень}$$

Ответ: 2 , $\frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$.

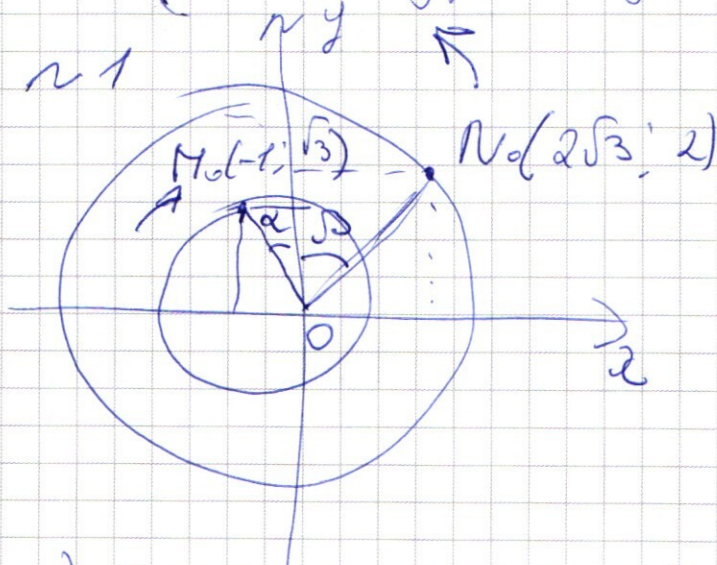
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6 & (1) \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25 & (2) \end{cases}$$

(2) $(|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25$

$$|x|^2 - 6|x| + 9 + |y|^2 - 4|y| + 16 = 25$$

$$|x|^2 - 6|x| + |y|^2 - 4|y| = 0$$



$$\begin{aligned} M_{ox} &= -1 \\ M_{oy} &= \sqrt{3} \\ N_{ox} &= 2\sqrt{3} \\ N_{oy} &= 2 \end{aligned}$$

1) Найдем радиус ω муравья

$$R_M = \sqrt{M_{ox}^2 + M_{oy}^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$$

2) Найдем радиус ω жука

$$R_N = \sqrt{N_{ox}^2 + N_{oy}^2} = \sqrt{12 + 4} = 4$$

3) Т.к. $\frac{R_N}{R_M} = 2 \Rightarrow$ скорость жука в 2 раза больше скорости муравья $\Rightarrow$ 1 поворот жука за время t в 2 раза больше 1 поворота муравья за время t .

4) Найдем текущее расстояние между M_0 и N_0 : оно равно:

$$R = \sqrt{(M_{0x} - N_{0x})^2 + (M_{0y} - N_{0y})^2} = \sqrt{(-1 - 2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3} - 2)^2} = \\ = \sqrt{(1 + 2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3} - 2)^2} = \sqrt{1 + 4\sqrt{3} + 12 + 3 - 4\sqrt{3} + 4} = \\ = \sqrt{20} = R_{MN}$$

5) До m косинусов найдем $\angle$ между M_0O и N_0O : $\angle M_0ON_0 = \alpha + \beta$ R_{MO} и R_{NO}

$$R_{MN}^2 = M_0R_{MO}^2 + R_{NO}^2 - 2R_{MO}R_{NO}\cos(\alpha + \beta) \\ \cos(\alpha + \beta) = \frac{R_{MO}^2 + R_{NO}^2 - R_{MN}^2}{2R_{MO}R_{NO}} = \frac{4 + 16 - 20}{2 \cdot 2 \cdot 4} = 0 \Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$$

(для рассмотрения ориентации 2α)

6) В н.з. мы выяснили, что $\angle$ поворота α за время t в 2 раза $> \angle$ поворота β управы за время t . Пусть $\alpha - \angle$ пов. го впереди у управы, $\beta - \angle$ пов. го впереди у акула

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 90 \\ 2\alpha = \beta \end{cases}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$\beta = 60^\circ$$

В итоге, кратчайшее расстояние будет, когда начало управы и акула будут на одной прямой.

6) Можно заметить, что $\angle$ акула

и акула между осью OY и OX на отрезке с концами в $(0,0)$ и текущем пол. акула $= \frac{R_{MO}}{R_{NO}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ этот $\angle = 60^\circ$, а в т. 5 мы выяснили, что $\beta = 60^\circ \Rightarrow$ управы и акула встретятся на оси OY в начале оси

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ок. Знаем радиус и у точки поворота координаты точки встречи. $(0; 4)$.

7) После 1 встречи муравей и жук движутся на том же расстоянии от начала координат, но по другую сторону от оси OX , это будет координата $(0; -4)$.

Ответ: $(0; 4)$ $(0; -4)$.

12

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a & (1) \\ 4bx + (a+b)by = 1 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad 12y = a - 3(a+b)x$$

$$y = \frac{a}{12} - \frac{(a+b)x}{4}$$

$$(2) \quad (a+b)by = 1 - 4bx \quad b \neq 0, \text{ иначе}$$

$$y = \frac{1 - 4bx}{(a+b)b} = \frac{1}{(a+b)b} - \frac{4x}{(a+b)} \quad 0 = 1$$

Рассмотрим как две функции.

они линейные, следовательно $y = kx + b$

Итак, данная система имеет бесконечное количество решений, нужно, чтобы эти 2 прямые (граф. лин. ф-ий) совпадали, а именно

$$\begin{cases} k_1 = k_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4}{(a+b)b} = \frac{a+b}{4} \\ \frac{a}{12} = \frac{1}{(a+b)b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+b)^2 b = 16 & (a) \quad b \neq 0 \text{ (уже доказано)} \\ ab(a+b) = 12 & (b) \quad a+b \neq 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

поделим ~~(a)~~ на (b): $0 = 16$
 $0 = 12$

$$\frac{a+b}{a} = \frac{4}{3}$$

$$3a + 3b = 4a$$

$$3b = a$$

$$a = 3b$$

подставим в (b)

$$3b^2(4b) = 12$$

$$12b^3 = 12$$

$$b^3 = 1 \quad b = 1 \quad a = 3$$

Ответ: $a = \frac{1}{3}; \quad b = 1.$

~ 4

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| - 1 + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + (x-1)^2 - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^2|x-1| + |x-1|^2 \geq 0$$

Замена: $t = |x-1|$

$$2x^4 - 3x^2t + t^2 \geq 0$$

$$(x^2 - t)(2x^2 - t) \geq 0$$

обр. замена:

$$|x-1| = t$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(x^2 - |x - 1|)(2x^2 - |x - 1|) \geq 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x \geq 1 \\ (x^2 - x + 1)(2x^2 - x + 1) \geq 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left[\begin{array}{l} x < 1 \\ (x^2 + x - 1)(2x^2 + x - 1) \geq 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

$$(1) (x^2 - x + 1)(2x^2 - x + 1) \geq 0$$

$$x^2 - x + 1 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 1 - 4 = -3 < 0 \Rightarrow \emptyset$$

П.к. у ф-ии $y = x^2 - x + 1$ ветви вверх:

$$\Rightarrow x^2 - x + 1 > 0 \text{ при } x \in \mathbb{R}$$

$$2x^2 - x + 1 = 0$$

$$x^2 + 2x^2 - x + 1 = 0$$

$$\geq 0$$

$$(y \neq 0)$$

$$\Rightarrow x \in [1; +\infty)$$

$$\Rightarrow 2x^2 - x + 1 > 0$$

$$\text{при } x \in \mathbb{R}$$

$$(2) (x^2 + x - 1)(2x^2 + x - 1) \geq 0$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 1 + 4 = 5$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$2x^2 + x - 1 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D =$$

$$(x+1)(2x-1) \geq 0$$

$$(x+1)(x-0,5) \geq 0$$

$$\left(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)(x+1)(x-0,5) \geq 0$$

$$2 < \sqrt{5} < 3$$

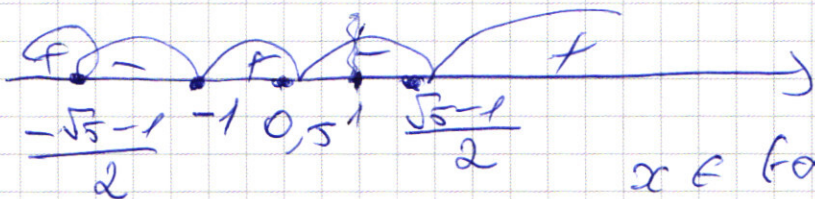
$$-3 < -\sqrt{5} < -2$$

$$1 < \sqrt{5}-1 < 2$$

$$-4 < \sqrt{5}-1 < -3$$

$$0,5 < \frac{\sqrt{5}-1}{2} < 1$$

$$-2 < \frac{-\sqrt{5}-1}{2} < -1,5$$



$$x \in (-\infty; \frac{\sqrt{5}-1}{2}] \cup [-1; 0,5] \cup [\frac{\sqrt{5}-1}{2}; +\infty)$$

берём ту часть, кот. < 1

$$x \in (-\infty; \frac{\sqrt{5}-1}{2}] \cup [-1; 0,5]$$

(1) $\cup$ (2)

$$x \in (-\infty; \frac{\sqrt{5}-1}{2}] \cup [-1; 0,5] \cup [1; +\infty)$$

Ответ: $(-\infty; \frac{\sqrt{5}-1}{2}] \cup [-1; 0,5] \cup [1; +\infty)$.

15

$$1400 = 200 \cdot 7 = 25 \cdot 8 \cdot 7 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 1^4 \cdot 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^1$$

(м.к. цифр, 8)

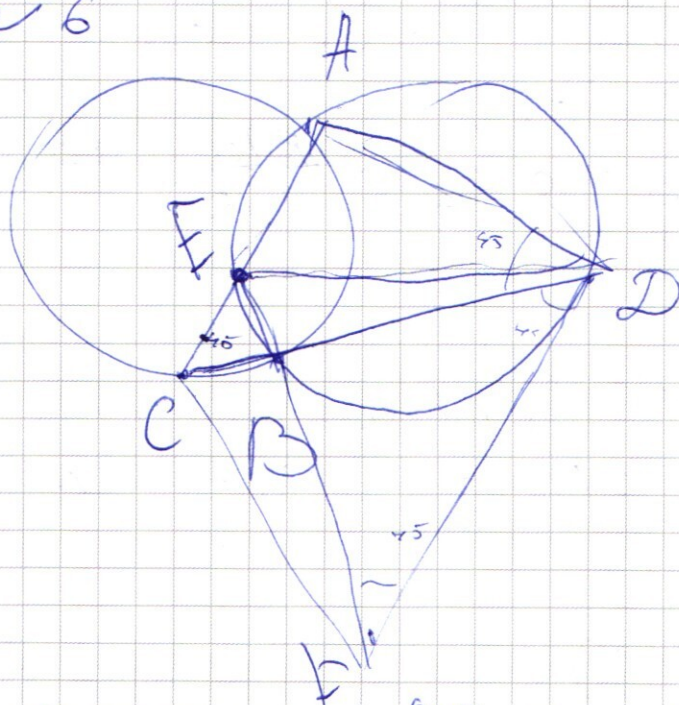
$$\text{кол-во} = \frac{8!}{2!3!2!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 2} =$$

$$= 60 \cdot 56 = 3360$$

Ответ: 3360.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6



Решение
Решение

EB, F лежат
на 1 прямой

СВД - по уму.
на 1 пр.

1) Пусть AC пр. перес. на левую
и в т. E. Р.к. $\angle EAD = 90^\circ$, а от виса: $\Rightarrow$
2) $\angle ACB = \angle ADB$ (виса и опир.
на одну и ту же дугу), $\Rightarrow$ ED - диам.
 $\angle CAD = 90^\circ$ (по опир. на дугу)

$\Rightarrow \triangle CAD$ - равноб. прямоуг. $\Rightarrow \angle ECB = 45^\circ$

3) $\triangle FBD$ - прямоуг. равноб. $\Rightarrow$

(BF = BD по уму.)

$\angle EBD = 90^\circ$ (виса и опир. на
диаметр)

$\Rightarrow \angle BFD = \angle BDF = 45^\circ$

4) Рас. $\triangle EFB$ и $\triangle DFE$:

$$\angle ECB = 45^\circ (\text{н. 2}),$$

$$\angle BFD = 45^\circ (\text{н. 3}),$$

$$CD \perp BF = 90^\circ (\text{по укл.}),$$

$$\angle EBD = 90^\circ (\text{внутр. и внеш. на прям.}$$

$$ED (\text{н. 1}), \text{ а } C, B, D \text{ по укл. чек-}$$

$$\text{на 1 пр.} \Rightarrow \angle ECB = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle CEB \sim \triangle BFD \text{ по } 2\angle \Rightarrow \frac{EB}{FB} = \frac{CB}{BD}$$

5) Так $\triangle CBF$ и $\triangle EBD$:

$$\angle EBD = 90^\circ (\text{н. 3}),$$

$$\angle CBF = 90^\circ (\text{EBF и CBD - пря-}$$

мые и пер. $\Rightarrow \angle EBD = \angle CBF$ как

$$\frac{EB}{FB} = \frac{CB}{BD} (\text{н. 4})$$

$$\Rightarrow \triangle CBF \sim \triangle EBD \text{ по } 2 \text{ кат. и } 2 \text{ пр.}$$

См. и с помощью мм $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{CF}{ED} = \frac{BD}{BF}, \text{ а } BD = BF (\text{по укл.}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CF = ED.$$

$$ED - \text{диаметр. (н. 1)} \Rightarrow = 2r = 18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CF = 18.$$

Ответ: 18.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3(a+b)x + 12y = a$$

$$4bx + (a+b)by = 1$$

$$3(a+b)x = a - 12y$$

$$(a+b)by = 1 - 4bx$$

$$\frac{3x}{by} = \frac{a - 12y}{1 - 4bx}$$

$$\begin{cases} y = \frac{a - 3(a+b)x}{12} \\ y = \frac{1 - 4bx}{(a+b)b} \end{cases}$$

$$\frac{a - 3(a+b)x}{12} = \frac{1 - 4bx}{(a+b)b}$$

$$ab(a+b) - 3(a+b)^2x = 12 - 48bx$$

$$48bx - 3(a+b)^2x = 12 - ab(a+b)$$

$$2x^4 + |x-1|^2 - 3x^2|x-1| \geq 0 \quad (x^2 - |x-1|)(2x^2 - |x-1|) \geq 0$$

$$x \geq 1$$

$$\text{Если } x \geq 1$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^3 + 3x^2 + 1 \geq 0 \quad (x^2 - x + 1)(2x^2 - x + 1) \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$\text{Если } x < 1:$$

$$(x^2 + x - 1)(2x^2 + x - 1) \geq 0$$

$$2x^4 + |x-1|^2 - 3x^2|x-1| \geq 0$$

$$x - 1 = t$$

$$2x^4 - 3x^2 + t^2 \geq 0$$

$$(x^2 - t)(2x^2 - t) \geq 0$$

$$1400 = 1^2 \cdot 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$$

$$122 \quad 1238$$

$$11222 \quad 557$$

$$128$$

$$12222$$

$$8$$

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

$$\frac{4!}{3!} = 4$$

$$\frac{2!3!2!}{2!3!2!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{2 \cdot 3 \cdot 2}$$

$$\frac{12222}{3!} = 20$$

$$3(a+b)x + 12y = a$$

$$4bx + (a+b)by = 1$$

$$y = \frac{1 - 4bx}{(a+b)b}$$

$$= \frac{1}{(a+b)b} - \frac{4x}{(a+b)b}$$

$$y = \frac{a - 3(a+b)x}{12(a+b)} = \frac{a}{12} - \frac{(a+b)}{4}x$$

$$\frac{a}{12} = \frac{1}{(a+b)b}$$

$$\frac{a}{12} = \frac{1}{(a+b)b}$$

$$\begin{aligned} x &= x+1 \\ y &= x-1 \end{aligned}$$

$$(a+b)^2b = 16$$

$$ab(a+b) = 12$$

$$(4b)^2b = 16$$

$$16b^3 = 16$$

$$b^3 = 1$$

$$b = 1$$

$$\frac{a+b}{a} = \frac{4}{3}$$

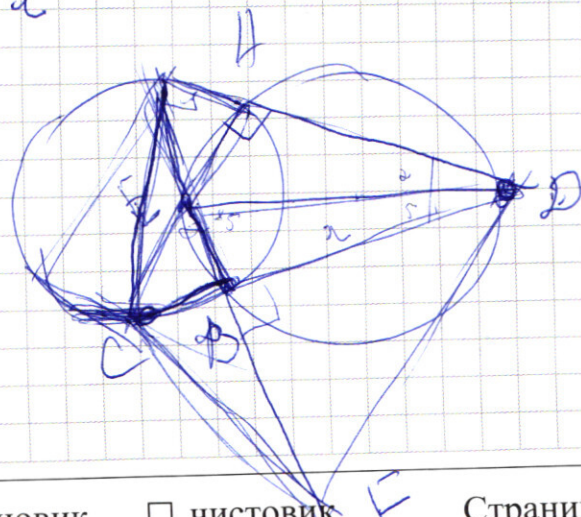
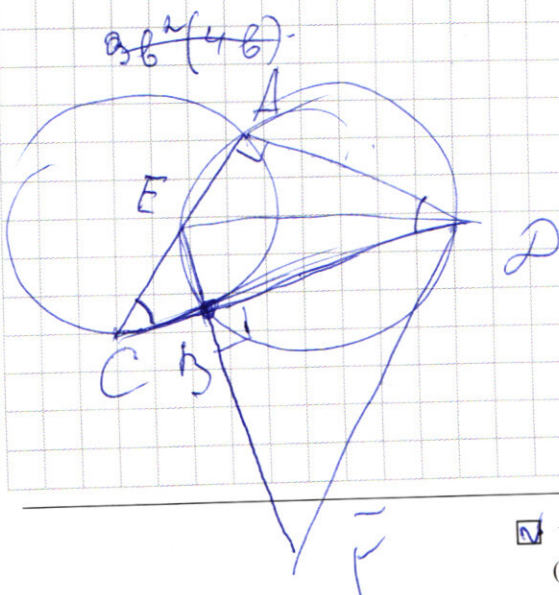
$$3a + 3b = 4a$$

$$a = 3b$$

$$a = \frac{4}{3} \quad b = 1$$

$$4x + 12y = \frac{4}{3}$$

$$4x +$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r|l} 1400 & 2 \\ 700 & 2 \\ 350 & 2 \\ 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & 1 \end{array}$$

$$1400 = 1 \cdot 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$$

Если $x \geq 0, y \geq 0$

$$x \geq x-3 = t$$

$$|t-y| + |t+y| \leq 6$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^2|x-1| + |x-1|^2 \geq 0$$

$$2x^4 - (3x^2 - 1)|x-1| \geq 0$$

$$x^4 - 2x^2|x-1| + |x-1|^2 + x^4 - x^2|x-1| \geq 0$$

$$(x^2 - |x-1|)^2 + x^2|x-1| \geq 0$$

$$|x|^2 - 6|x|$$

$$|x|^2 - 6|x| + |y|^2 - 4|y| = 0$$

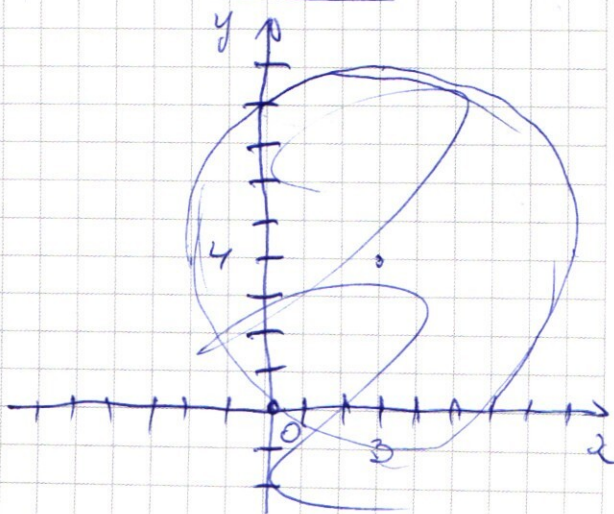
$$|t-y| + |t+y| \leq 6$$

$$x \geq y$$

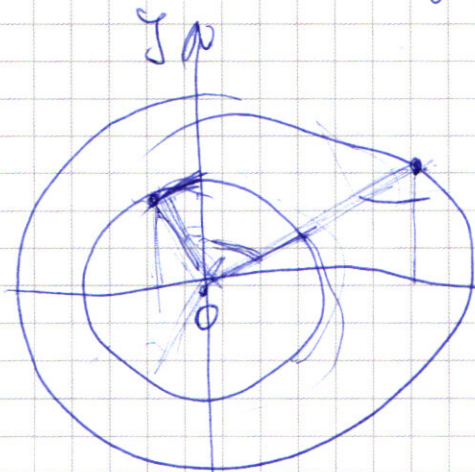
$$|t| + |y| = 6$$

$$x = y + 3$$

$$|y - x + 3| + |-x - y + 3| \leq 6$$



$$\begin{aligned} 3(a+b)x + 12y &= a \\ 4bx + (a+b)6y &= 1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} s^2 &= 4 + 16 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos \alpha \\ s^2 &= 20 - 16 \cos \alpha \end{aligned}$$

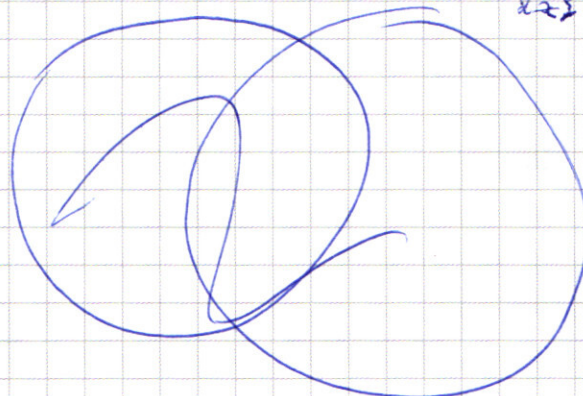
$$\begin{aligned} x &\geq y+3 \\ 2 &\geq y+3 \\ x &\leq 6 \end{aligned}$$

$$x \geq 4$$

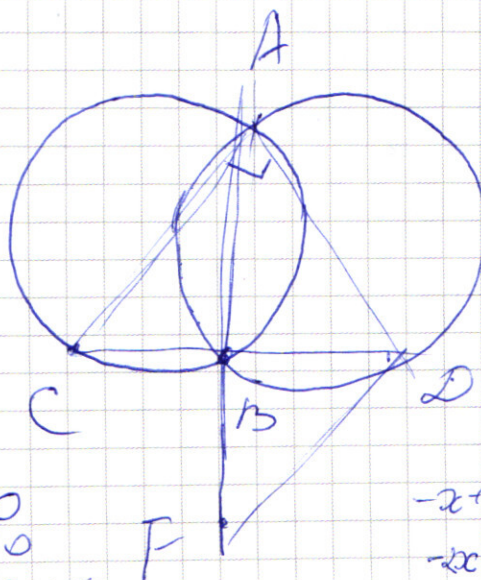
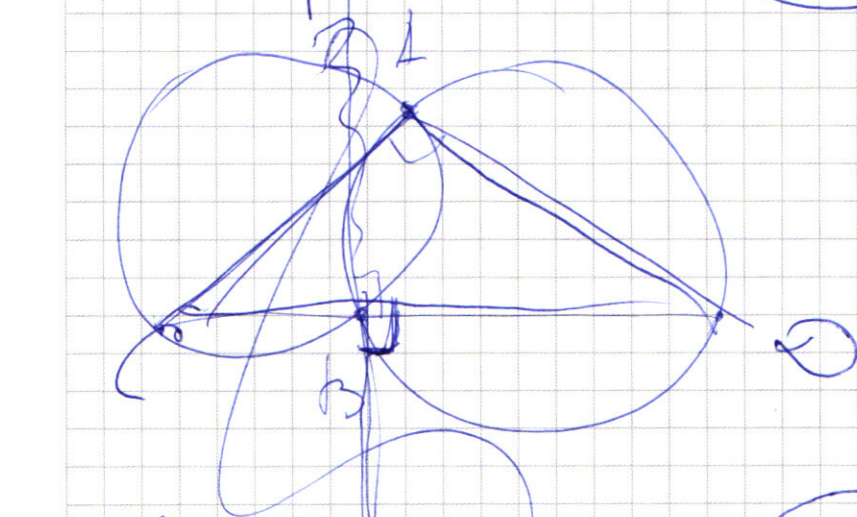
$$R_1 = 2$$

$$R_2 = 4$$

$$\begin{aligned} (y-3) + (y-3)/6 \\ y \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x-3-y &\geq 0 \\ 2-3+y &\geq 0 \\ 2x-6 &\leq 6 \\ x &\leq 6 \\ x-3-y &\geq 0 \\ x-3-y &\leq 0 \end{aligned}$$



$$2-3-y - 2+3-y \leq 6$$

$$\begin{aligned} -2y &\leq 6 \\ y &\geq -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2-3-y &\leq 0 \\ x-3+y &\geq 0 \\ -2+3+y &\leq 6-3+y \leq 6 \\ y &\leq 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2+3+y - 2+3-y &\leq 6 \\ -x &\leq 0 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$