

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Вокруг птичьей кормушки в одной плоскости с ней по двум окружностям с одинаковой скоростью летают синица и снегирь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой кормушка (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Синица движется по часовой стрелке, а снегирь – против. В начальный момент времени синица и снегирь находятся в точках $M_0(\sqrt{3}; 3)$ и $N_0(6; -2\sqrt{3})$ соответственно. Определите координаты всех положений снегиря, в которых расстояние между птицами будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a, \\ 3bx + (a-b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2|x+1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 7000. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 7 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10, \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169. \end{cases}$$

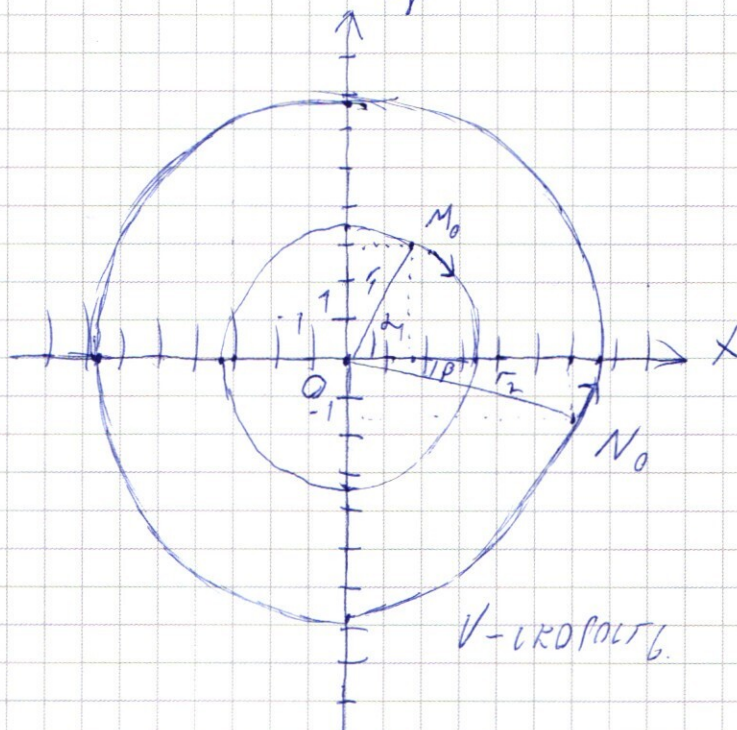
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задатка 27

ДАННАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ:

Т.к. все траектории
кривые, по Теореме
Пикара-Гордана можно найти
радиусы окружностей.

Путь Γ_1 - Равнины вокруг
Нолти, по которой летит
линия; Γ_2 - по которой
летит смелый. Тогда:



$$r_1 = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{12}.$$

$$r_2 = \sqrt{6^2 + (1-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{48} \quad \Rightarrow \quad \frac{r_2}{r_1} = \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{12}} = \sqrt{4} = 2. \text{ Далее}$$

Можно найти отношение периодов обращения спутника- t_1

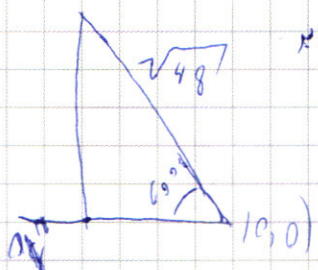
и индукция - T_2 . $\frac{T_2}{T_1} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_2}{2 \cdot \pi \cdot r_1} = \frac{r_2}{r_1} = 2$, т.е. за один оборот

Сколько единиц сделает 2, ~~заканчивая~~ ~~буква~~ ~~з~~ ~~прямая~~. Кратчайшее расстояние будет тогда, когда прямая, проходящая через 2-х птиц пройдет через точку $(0, 0)$. Определим начальные положения птиц (исходя из 2).

$$\tan \angle, (\angle = 2 \times 0.4) = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \Rightarrow \angle = 60^\circ$$

$$\tan \beta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \beta = 30^\circ$$

угловые скорости связаны как: $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{t_2}{t_1} = 2$. Значит: пока шестерня пройдёт 30° , шестерня - 60° , первый раз они встретятся на оси Ox , ил координаты будут $(\sqrt{12}; 0)$; $(\sqrt{48}; 0)$. Далее, когда шестерня окажется на оси Oy , шестерня будет на оси Ox справа от $(0; 0)$, и ро $\omega_1 = 2\omega_2$, значит вторая точка будет составлять угол 120° с осью Ox . Найдем координаты (шестерня):



координата $x = \frac{\sqrt{48} \cdot \cos 60^\circ}{2} = \frac{\sqrt{48}}{2} = \sqrt{12}$
 $y = \frac{\sqrt{48} \cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{\sqrt{48} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{144}}{2} = 6$

аналогично для шестерни: $x = \frac{\sqrt{12}}{2}$; $y = \frac{\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}}{2} = 3$.

Далее аналогично они встретятся через 120° . В этот момент шестерня пройдет от оси Ox (последняя проходившая) 60° , найдем координаты:

~~$x = \frac{\sqrt{48}}{2}$~~ ; ~~$y = 6$~~

аналогично для шестерни: $y = -3$; $x = -\frac{\sqrt{12}}{2} = -\sqrt{\frac{12}{4}} = -\sqrt{3}$

Следующая встреча снова будет на оси Ox , значит новых координат не будет. (ш-шестерня; ш-шестерня)

- Отоб: 1: ш $(\sqrt{48}; 0)$, ш $(\sqrt{12}; 0)$ 2: ш: $(-\sqrt{12}; 6)$, ш $(-\sqrt{3}; 3)$, 3: ~~ш $(-\sqrt{12}; -6)$~~ ; ш $(-\sqrt{12}; -6)$; ш $(-\sqrt{3}; -3)$.

Задача 3

$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$; $x^2+3x-10 = (x+5)(x-2)$

$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} - (x+5)(x-2) = 0$

$(x+5)(\frac{1}{2}\sqrt{x^3-16x+25} - x + 2) = 0$
 (шестерня шестерня шестерня)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x + 5 = 0 \Rightarrow x_1 = -5$$

$$\left[\frac{1}{2} \sqrt{x^2 - 16x + 25} - x + 2 = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 16x + 25} = 2x - 4 \right] \quad | \cdot 2$$

$$x^3 - 16x + 25 = 4x^2 - 16x + 16$$

$$x^3 - 4x^2 + 9 = 0$$

$$x_2 = 3$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 4x^2 + 9 & x - 3 \\ \hline x^3 - 3x^2 & x^2 - 3 \\ \hline -x^2 + 9 & \\ -x^2 + 9 & \\ \hline x^2 - 3x & \end{array}$$

$$(x-3) \mid (x^2-3) = 0$$

$$x \neq 0, 3$$

$$x_2 = -\sqrt{3}, x_3 = \sqrt{3}$$

$$\text{Ответ: } x_1 = -5; x_2 = -\sqrt{3}; x_3 = \sqrt{3}$$

Задача 5

$7000 = 700 \cdot 5 \cdot 2 = 14 \cdot 2^2 \cdot 5^3 = 7 \cdot 2 \cdot 5^3$. Значит число можно
содержать эти цифры и 1, поскольку и 7.

$$\text{Всего таких чисел: } \frac{8!}{3! 3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3} = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 8 =$$

$$= 30 \cdot 56 = 1680$$

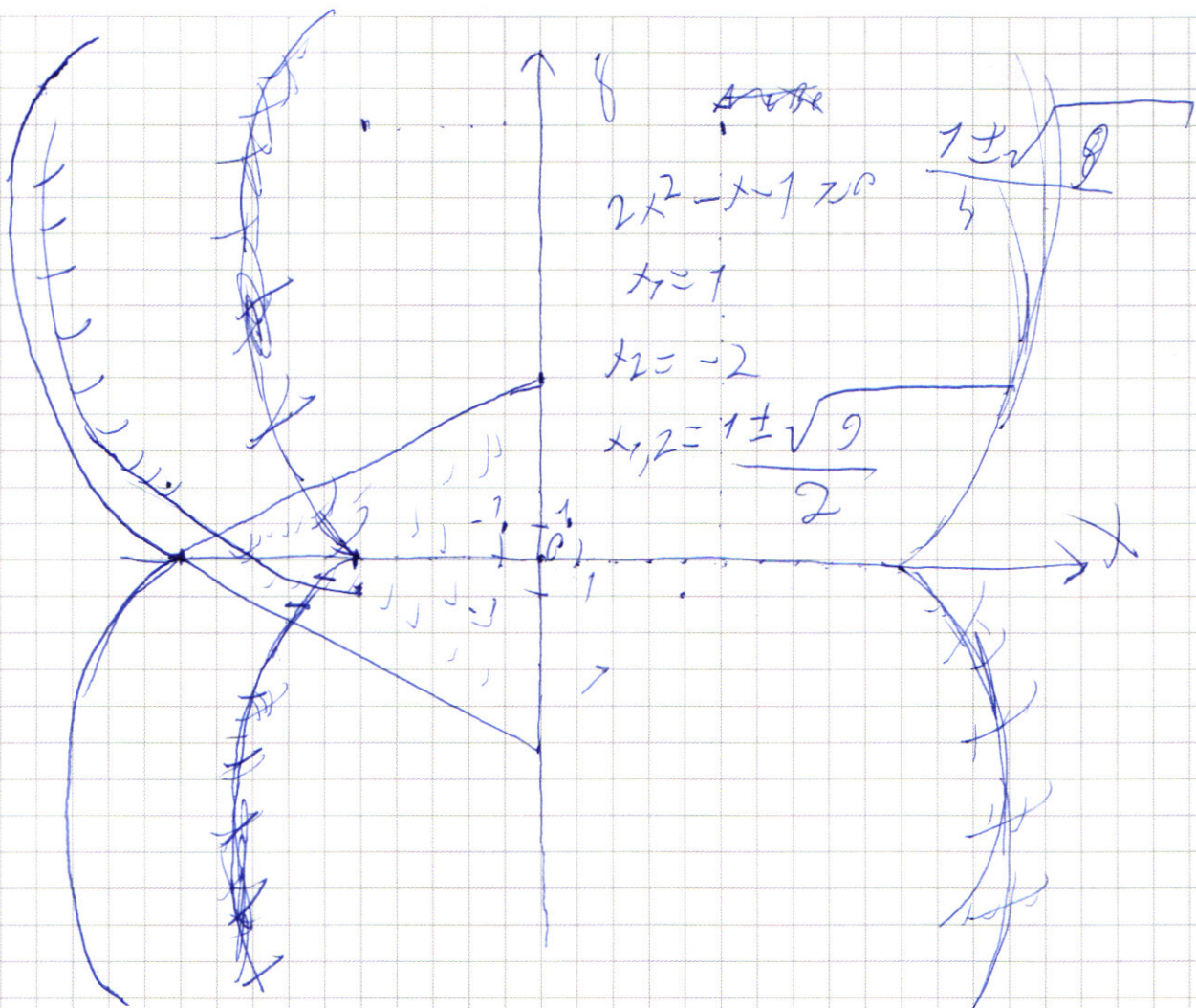
$$\text{Ответ: } 1680.$$

Задача 7

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10 \\ (x+1-5)^2 + (y+1-12)^2 = 169 = 13^2 \end{cases}$$

изобразил график:

(сир. стр.)



Точками $(0; 5)$ $(0; -5)$ $(-10; 0)$ — не являются
 незначительные округления — с погрешностью, ответ: -10

~~$\sqrt{13} \approx 3,5$~~

~~$\sqrt{13} = 3,5$~~

Задача 4

$$(x^4 + x^2 + 2x - 5x^2) / (x+1) + 1 = 0$$

$$(x^4 - 5x^2) / (x+1) + (x+1)^2 = 0$$

$$(x+1)^2 = (x+1)^2$$

~~$5x^2 / (x+1) \leq 6x^4 + (x+1)^2$~~

~~$6x^4 + (x+1) / (x+1) - 5x^2 = 0$~~

$$6x^4 + (x+1)^2 - 3x^2 / (x+1) - 2x^2 / (x+1) = 0$$

Продолжение — страница 6

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2

$$\begin{cases} 2(a-1)x + 6y = a \\ 3(1 + (a-1)y) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(a-1)x + 3y = a \\ 6(3x + (a-1)y) = 1 \end{cases}$$

Задача 6

Дано:

$$K(O; R); L(O; R_1) \sim 7$$

$$L(O; R) \cap L(O; R_1) = A, B$$

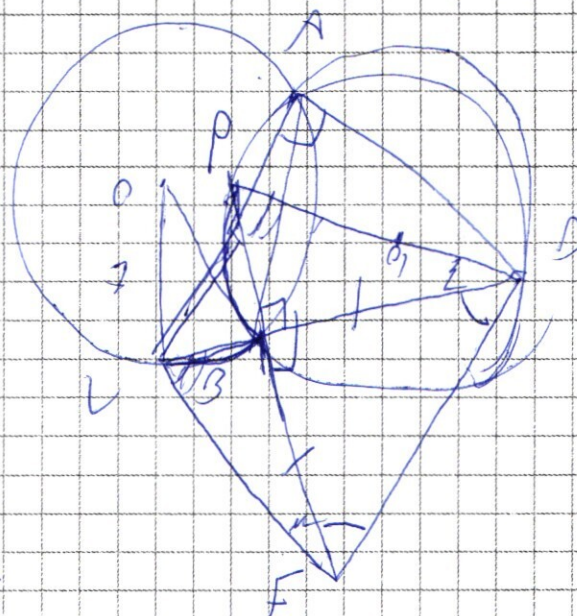
$$\angle CAD = 90^\circ$$

$$C \in L(O; R); D \in L(O; R_1)$$

$$BF = ED$$

$$CF = ?$$

Решение:



$$\angle PBD = 90^\circ \Rightarrow O_1 \in PD; \angle PAA = 90^\circ; \angle A \cap FD = P.$$

$$BF = DP; \angle FBD = 90^\circ \Rightarrow \angle BFD = \angle BDF = 45^\circ$$

$$\angle C = \angle PBD; \angle CFB = \angle PDB; \angle PDB = \angle BFD \Rightarrow \angle CFB = \angle BFD; \angle CFB = \angle BFD \Rightarrow CF = PD = 14$$

$$\text{Ответ: } CF = 14$$

$$3x^2(2x^2 - 1x + 1) - 1x + 1(2x^2 - 1x + 1) \neq 0$$

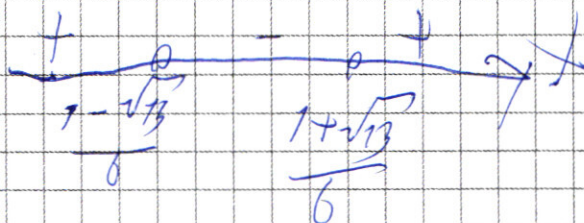
$$(2x^2 - 1x + 1)(3x^2 - 1x + 1) \neq 0$$

$$2x^2 - 1x + 1 \neq 0$$

$$\begin{cases} 2x^2 - x - 1 \neq 0 & x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4} & x_1 = 1 & x_2 = -\frac{1}{2} \\ 2x^2 + x + 1 \leq 0 & D < 0 \end{cases}$$

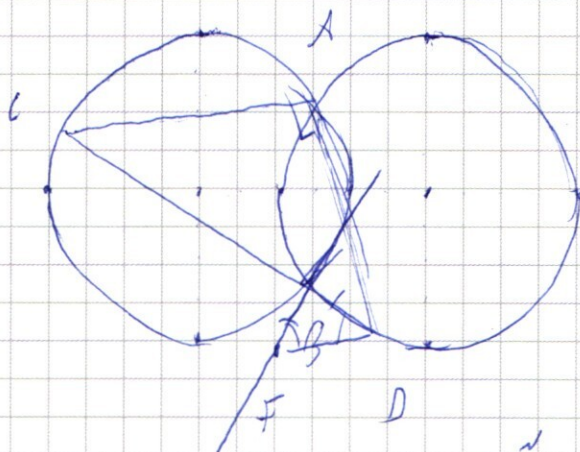
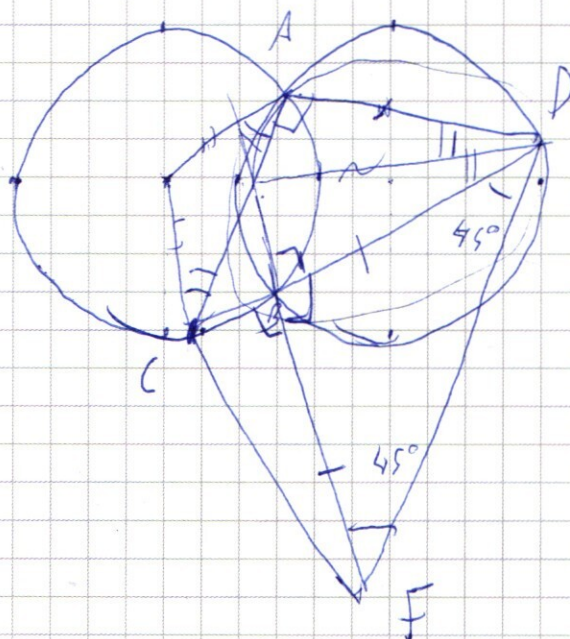
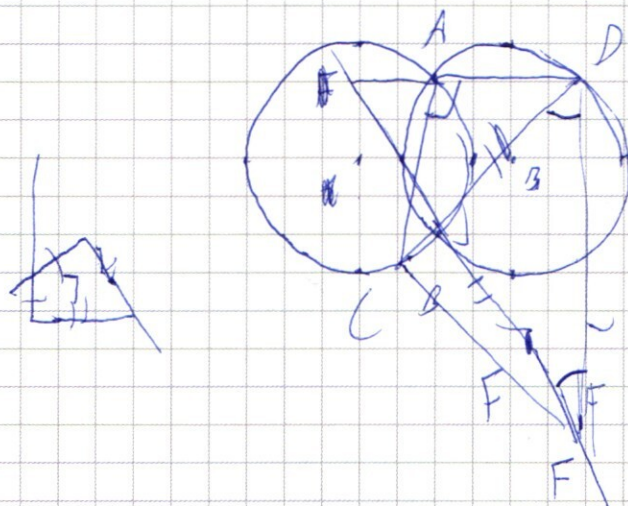
$$3x^2 - 1x + 1 \neq 0$$

$$\begin{cases} 3x^2 - x - 1 \neq 0 & x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+12}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{6} \\ 3x^2 + x + 1 \leq 0 & D < 0 \end{cases}$$



$$\text{Ответ: } (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1 - \sqrt{13}}{6}; \frac{1 + \sqrt{13}}{6}) \cup (1; \infty)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = 1 \\ 3bx + (a-b)y = 1 \end{cases}$$

$$2(a-b)x + 3y = Q$$

$$6(a-b)y + 3x = 1$$

$$b = \frac{1}{(a-b)y + 3x}$$

$$Q = 2(a-b)x + 3y$$

$$\frac{2(a-b)x + 3y}{a} = 6((a-b)y + 3x)$$

$$2(px + 3y)(py + 3x) = p^2xy + 3x^2p + 3y^2p + 3xy = \frac{9}{6}$$

$$\frac{Q}{a} = \frac{2(a-b)x + 3y}{(a-b)y + 3x} = \frac{px + 3y}{y + 3x}$$

$$2(px + 3y) = Q$$

$$px + 3y = \frac{Q}{2}$$

$$3y^2p + 3xy = \frac{9}{6}$$

$$y = -1(x+5)$$

$$y = x+5$$

$$|x+y+5| + |x-y+5| \leq 10$$

$$x+y+5 + x-y+5$$

$$x-y+5 \geq 0$$

$$x \geq y-5$$

$$y \leq 0 \mid x$$

$$+Adp$$

$$-x-y-5 - x+y-5 \leq 10$$

$$-2x \leq 20$$

$$2x \geq -20$$

$$x \geq -10$$

$$x \geq -10$$

$$-x-y-5 + x-y+5 \leq 10$$

$$-2y \leq 10$$

$$2y \geq -10$$

$$y \geq -5$$

$$y = -1(x+5)$$

$$1(x+y+5)$$

$$|x+y+5| + |x-y+5| \leq 10$$

$$y = x+5$$

$$y = -1(x+5)$$

$$y \geq 0$$

$$6x^4 + |x+1|^2 - 3x^2|x+1| - 2x^2|x+1|$$

$$2x^2 / (2x^2 - |x+1| + |x+1|)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2(a-b)x + 3y = a$$

$$6(3x + 4(a-b)) = 1$$

$$b=2; a=1$$

$$2(-x + 3y) = 1$$

$$2(3x - y) = 1$$

$$a \rightarrow 3y; 3x \rightarrow 0.8$$

$$2x^2 / 3x^2 - 2(x+1)$$

или

$$x^2(6x^2 - 5x^3 - 5x^2) + 1(x+1)^2$$

$$x^2(1-5x)$$

$$-x + 3y = 3x - y$$

$$4x = 4y$$

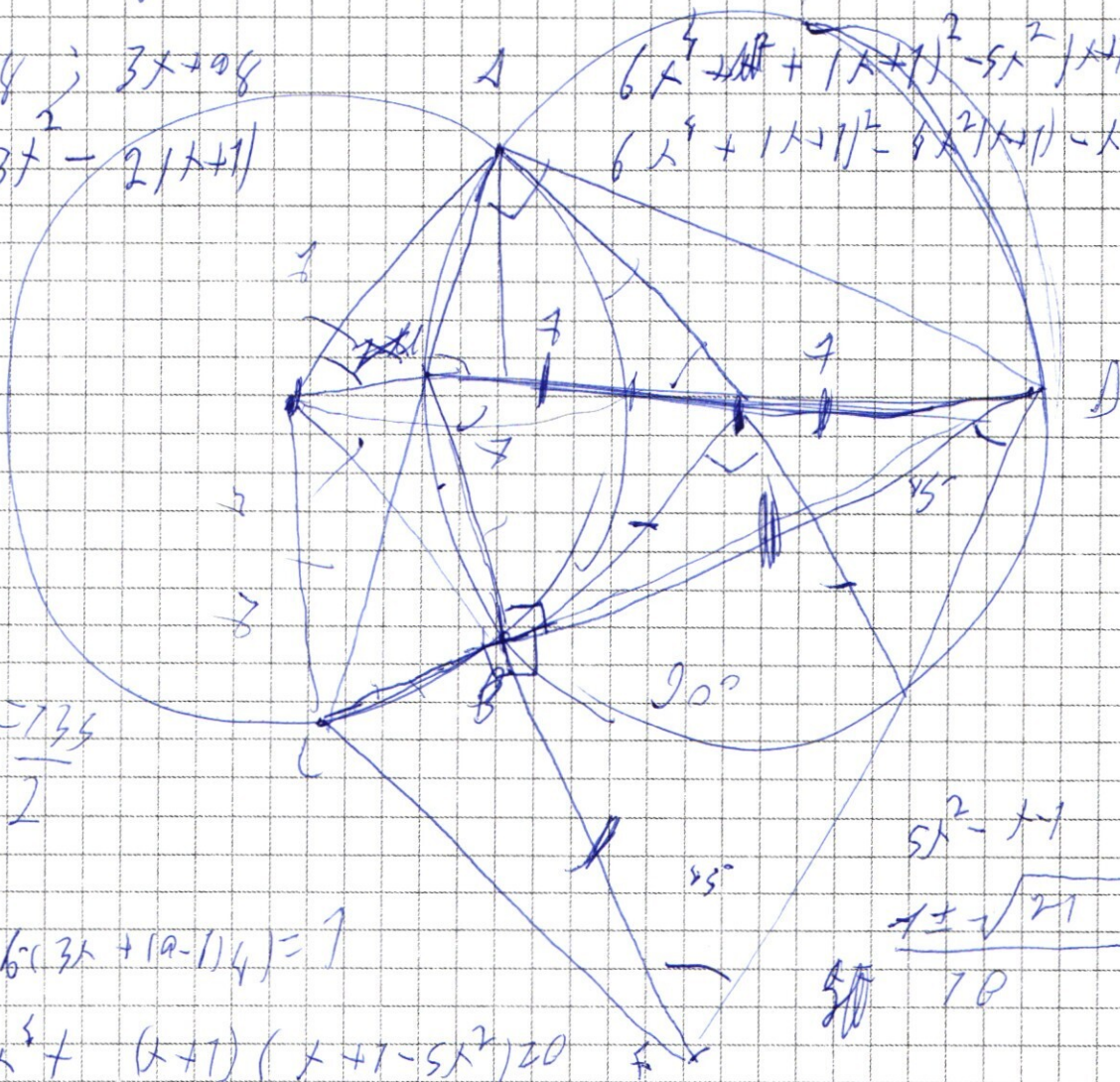
$$x=y$$

$$6x^4 + (x+1)^2 - 5x^2(x+1) = 0$$

$$(x+1)(x+1-5x^2) = 0$$

$$6x^4 + (x+1)^2 - 5x^2(x+1) = 0$$

$$6x^4 + (x+1)^2 - 5x^2(x+1) - x^2(x+1) = 0$$



$$180 - 85 = 95$$

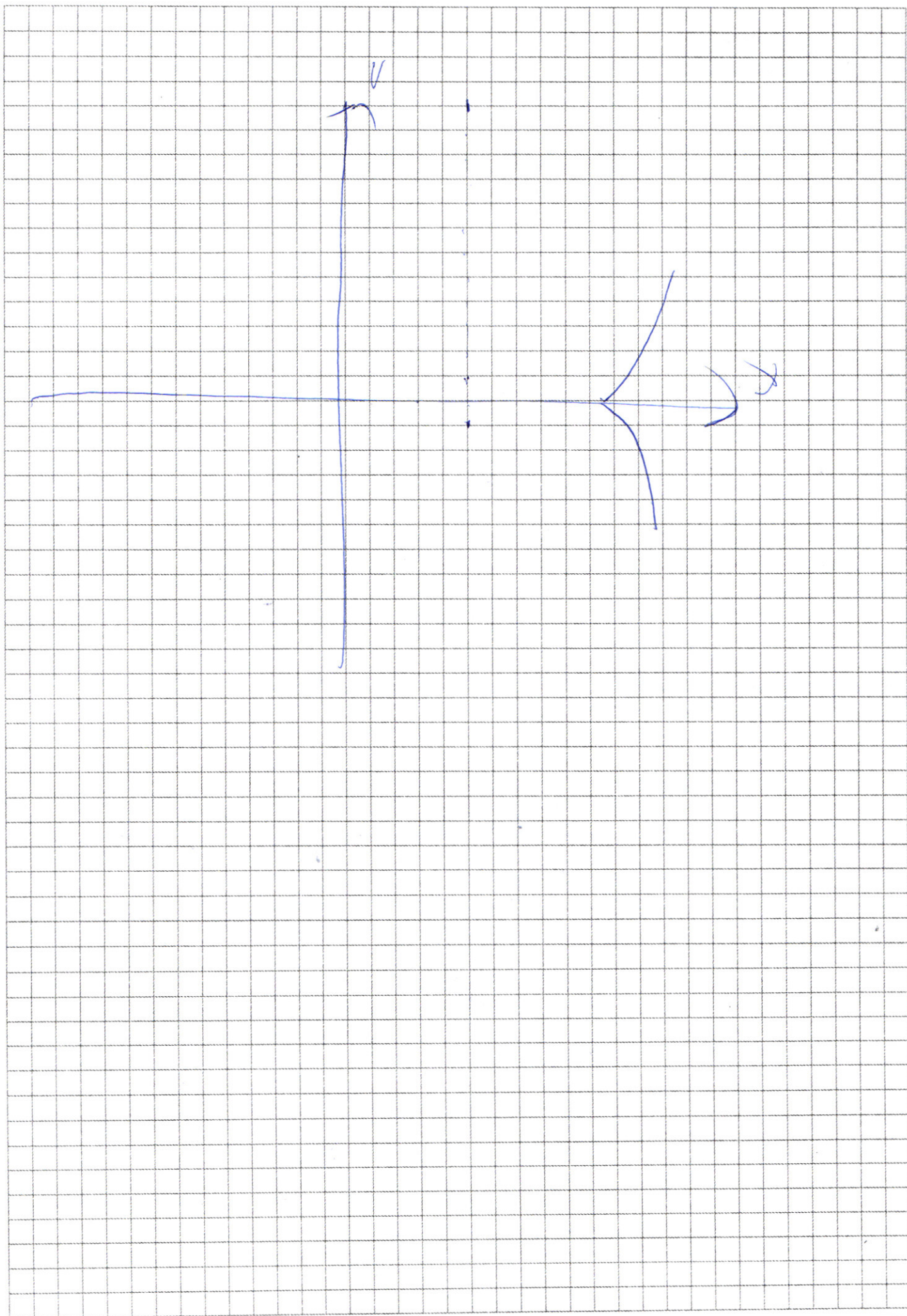
$$6(3x + (a-1)y) = 1$$

$$6x^4 + (x+1)(x+1-5x^2) = 0$$

$$5x^2 - x - 1$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{10}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{10}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$6x^9 + x^2 + 7x - 5x^2 \mid x+1 \mid + 770$$

$$x^2(x^2+1-5|x+7|) =$$

$$6x^5 - 5x^2 / x+1 + (x+1)^2 / 0$$

$$x^2(x^2 - 5/x + 1) + (x+7)^2 \cdot 20$$

$$5x^4 + (x+1)^2 \geq 5(x+1)$$

$$p(x^2 + 2x + 1)$$

6 + 9 = 15

$$-2 \frac{2}{x^2} (x^2 - 5x + 1) + (x+1)^2 \frac{2}{x^3}$$

$$-x-5$$

$$\sim (1, 4, 5)$$

$$x^2(16x^2 - 51x + 11) \geq -(x+1)^2$$

$$6x^2 - 5|x+1| \geq -|x+1|^2$$

$$x^2 + \frac{(x+1)^2}{x^2}$$

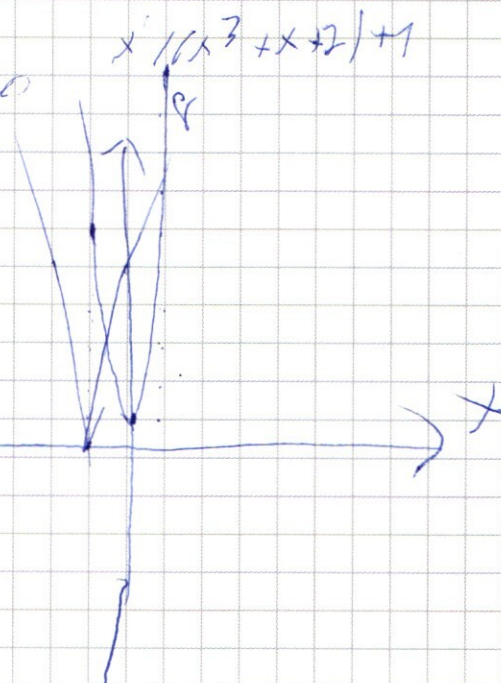
$$5(x+1) \leq \frac{6x^2 + (x+1)^2}{x^2}$$

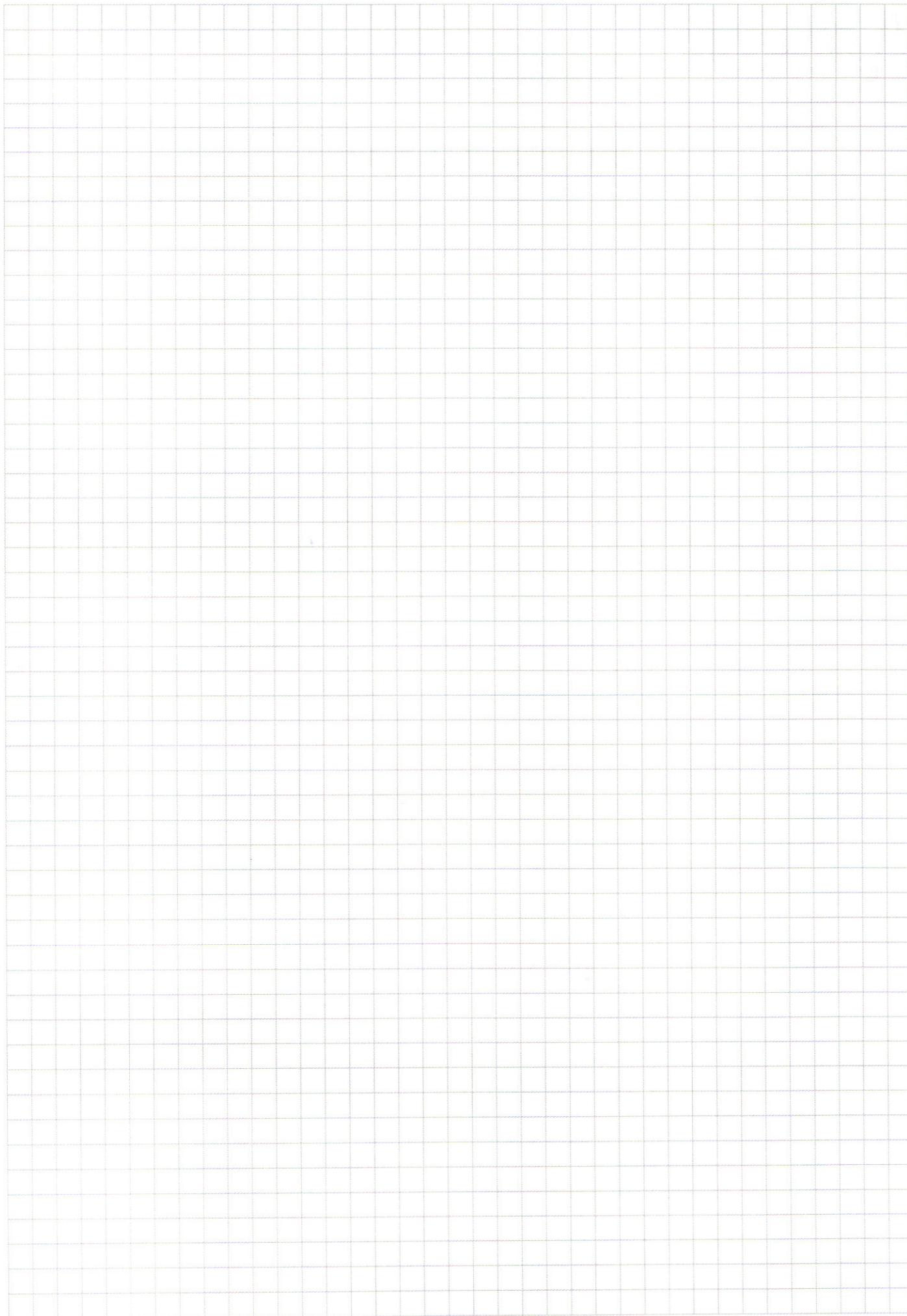
$$5 \text{ V} \rightarrow 1 \text{ } \Omega$$

$$(x+1)^2 = |x+1|^2$$

$$(x^9 + (x+1)(x+1 - 5x^2)) \cdot 0$$

$$1(x+1) - 5x^2 \geq \frac{-6x^4}{1(x+1)} - 1(x+1)$$





ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$t_1 = \frac{2\pi r_1}{v}$
 $t_2 = \frac{2\pi r_2}{v}$
 $\frac{t_2}{t_1} = 2$

$r_1 = \sqrt{12}$
 $r_2 = \sqrt{36+12} = \sqrt{48}$
 $\frac{r_2}{r_1} = 2$

$\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 30^\circ$; $\omega_1 = 2\omega_2$

$\frac{\sqrt{48}}{2} = \sqrt{\frac{48}{4}} = \sqrt{12}$

$2(x+1) + 3y = 9$
 $6(3x + 4(1-x)) = 1$
 $6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2(1+x) + 120$
 $6x^4 + (1+x)^2 - 5x^2(1+x) = 0$
 $x^2(6x^2 - 5(1+x)) + (1+x)^2 = 0$
 $6x^2 - 5(1+x)$

$x = \frac{5 \pm \sqrt{195}}{2}$

$x = \frac{5 \pm \sqrt{195}}{2}$

$$6x^2 - 5(x+1) \geq -\frac{(x+1)^2}{x^2}$$

$$-5(x+1) \geq -\frac{(x+1)^2}{x^2} - 6x^2$$

$$5(x+1) \leq \frac{(x+1)^2}{x^2} + 6x^2$$

$$2 \quad 8 - 32 + 25 = 1 \quad \begin{array}{r} 3 \\ 4 \quad 16 \\ 5 \\ \hline 80 \\ + 25 \\ \hline 105 \end{array} \quad 125 \quad 80 + 25$$

$$3) 27 - 48 + 25 =$$

$$x^2 + 3x - 10 = (x+5)(x-2)$$

$$x_1 = -5, x_2 = 2$$

$$\frac{1}{x}(x+5)\sqrt{x^3 - 11x + 25} - (x+5)(x-2) = 0$$

$$x(x^2 - 4^2) + 5^2 = 5x(x-2)(x+2)$$

$$(x+5)\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^3 - 11x + 25} - x + 2\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{x(x-2)(x+2) + 25} - x + 2 = 0$$

$$\sqrt{\dots} = 2x - 4$$

$$8 - 16 + 25 = 17$$

$$27 - 36 + 9 = 0$$

$$x^3 - 11x + 25 = 4x^2 - 16x + 16$$

$$x^3 - 4x^2 + 9 = 0 \quad x^2(x-4) + 9 = 0$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 4x^2 + 9 \\ x^3 - 8x^2 \\ \hline 3x^2 + 9 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 + 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 4x^2 + 9 \\ x^3 - 3x^2 \\ \hline -x^2 + 9 \end{array} \quad \begin{array}{r} x-3 \\ x^2-3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 190 \\ 5 \\ \hline 700 \end{array}$$

$$x^2 + 9 - 3x - 9 = x^2 - 3x$$

$$\begin{array}{r} 3500 \quad 5 \\ 7 \\ \hline 700 \quad 5 \\ 5 \\ \hline 700 \quad 5 \\ 5 \\ \hline 700 \quad 5 \end{array}$$

$$(x-3) \left(\frac{x^2-3x}{x^2-3x} \right) = (x-3) \left(\frac{x^2-3}{x(x-3)} \right)$$

$$x^3 - 3x - 3x^2 + 9$$

$$\begin{array}{r} 700 \quad 5 \\ 5 \\ \hline 700 \quad 5 \\ 5 \\ \hline 700 \quad 5 \end{array}$$

$$7000 = 3500 \cdot 2 = 700 \cdot 5 \cdot 2 = 700 \cdot 5^2 \cdot 2 = 28 \cdot 5^3 \cdot 2 = 14 \cdot 2^2 \cdot 5^3 = 7 \cdot 2^3 \cdot 5^3$$

$$\begin{array}{r} 285178 \\ 123 \quad 123 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 32 \\ 175 \\ 1 \quad 175 \\ 1 \quad 175 \\ \hline 625 \\ 5000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7 \quad 56 \\ 30 \\ \hline 16 \quad 80 \end{array}$$