МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0;0)$. Муравей двигается по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0\left(-1;\sqrt{3}\right)$ и $N_0\left(2\sqrt{3};2\right)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b, при каждой из которых система уравнений
$$\begin{cases} 3(a+b)x+12y=a, \\ 4bx+(a+b)by=1 \end{cases}$$
имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10}=x^2+5x+6$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4+x^2-2x-3x^2|x-1|+1\geqslant 0$.

5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD=90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF=BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

7. [6 баллов] Решите систему
$$\begin{cases} |x-3-y|+|x-3+y|\leqslant 6, \\ (|x|-3)^2+(|y|-4)^2=25. \end{cases}$$

© МФТИ, 2020

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №3

$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$

$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} - (x+2)(x+3) = 0$

$(x+3)\left(\sqrt{x^3-x+10} - (x+2)\right) = 0$

$x=-3$ или $\sqrt{x^3-x+10} = x+2$

$x^3-x+10 = x^2+4x+4,\ x \geq -2$

$x^3-x^2-5x+6=0$

2 - корень

подели на $x-2$

$x=-3$

не подходит

т.к. $-27+3+10<0$

а это под корнем

$$\begin{array}{l|l} x^3-x^2-5x+6 & x-2 \\ \hline -\ x^3-2x^2 & x^2+x-3 \\ \quad x^2-5x & \\ -\ x^2-2x & \\ \quad -3x+6 & \\ -\ -3x+6 & \\ \quad 0 & \end{array}$$

$(x-2)(x^2+x-3)=0$

$x=2$ или $x^2+x-3=0$

$D=13$

$x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

но $\frac{-1-\sqrt{13}}{2} < -2 \Rightarrow$ не подходит

$\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ подходит (≥ -2)

Ответ $x=2,\ x=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$

Задача №4.

$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$

$2x^4 + (x-1)^2 - 3x^2|x-1| \geq 0$

Заметим что это выраж. можно представить 2-мя способами:

$\overset{\geq 0}{x^2}(2x^2 - 3|x-1|) + \overset{\geq 0}{(x-1)^2} \geq 0$

или $\underset{\geq 0}{2x^4} + \underset{\geq 0}{|x-1|}(|x-1| - 3x^2) \geq 0$

Заметим что если мы докажем то что $\forall x$ выполн.

$\left[\begin{array}{l} 2x^2 - 3|x-1| \geq 0 \\ |x-1| - 3x^2 \geq 0 \end{array}\right.$

то тогда любой x явл. реш. неравенства

пусть $x \geq 1$

тогда $|x-1| = x-1$

и ~~$2x^2 - 3x + 3 \geq 0$ $\forall x$ (парабола, ветви ↑, $y_0 > 0$)~~

$\overset{\geq 0}{x^2}(2x^2 - 3|x-1|) + \overset{\geq 0}{(x-1)^2}$

Заметим что если $2x^2 - 3|x-1| \geq 0$ то и все выраж. ≥ 0

если $x \geq 1$

то $2x^2 - 3x + 3 \geq 0$ $\forall x$ (парабола, ветви ↑, $y_0 > 0$)

$\Rightarrow x \geq 1$ - реш.

если $x \leq 1$

$2x^2 + 3x - 3 \geq 0$

корни выраж. это $\frac{-3 \pm \sqrt{33}}{4}$ $\Rightarrow$ т.к. у параболы $2x^2 + 3x - 3$ ветви ↑

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\Rightarrow x \in \left(-\infty; \frac{-3-\sqrt{33}}{4}\right] \cup \left[\frac{-3+\sqrt{33}}{4}; 1\right]$ явл. реш.

$\Rightarrow x \in \left(-\infty; \frac{-3-\sqrt{33}}{4}\right] \cup \left[\frac{-3+\sqrt{33}}{4}; +\infty\right)$ явл. реш.

~~№2~~ №5.

если мы разложим 1400 на пр. множ-тели то получим $1400 = 7 \cdot 2^3 \cdot 5^2$

Тогда т.к. все цифры в числе целые и меньше 10 то в восьмизначном числе произв. цифр которого 1400 могут быть такие цифры.

1) 7, 8, 5, 5, 4 единицы

Таких чисел $\frac{8!}{4! \cdot 2!}$

2) 7, 4, 2, 5, 5, 3 единицы

таких чисел $\frac{8!}{2! \cdot 3!}$

3) 7, 5, 5, 3 двойки, 2 единицы

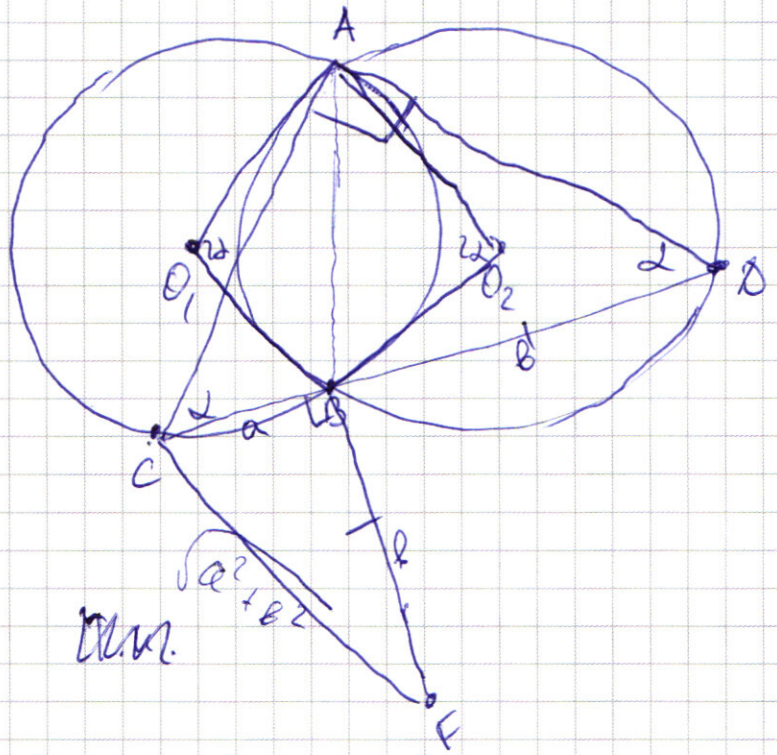
Таких чисел $\frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 2!}$ Т.о. всего сп. $\frac{8!}{4! \cdot 2!} + \frac{8!}{2! \cdot 3!} + \frac{8!}{3! \cdot 2^2} = \frac{7 \cdot 8!}{2 \cdot 4!} = 5880$

~~таким образом всего способов $\frac{8!}{4!} + \frac{8!}{2!} + \frac{8!}{2^2} = \frac{8!}{4}$~~

Ответ: 5880

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№6.



$R = 9$

O_1AO_2B - ромб (у окр. равные рад.

] $\angle AO_1B = \angle AO_2B = 2\alpha$

тогда $\angle ACB = \angle ADC = \alpha$ (вписанные)

$\Rightarrow \alpha = 45^\circ$ ($\angle CAD = 90^\circ$)

Также $AC = AD$

~~$2\alpha = 90^\circ \Rightarrow AB = \sqrt{2}R$ (т. Пифагора)~~

пусть $AD = AC = x$, $CB = a$, $BD = b$

тогда по т. косинусов

$$+\begin{cases} 2R^2 = x^2 + a^2 - 2ax\cos 45^\circ \\ 2R^2 = x^2 + b^2 - 2xb\cos 45^\circ \end{cases} \quad (1)$$

$$4R^2 = 2x^2 + \underbrace{a^2+b^2}_{CF^2} - 2x\cos 45^\circ \underbrace{(a+b)}_{\sqrt{2}x}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{CF = 4R^2 - 2x^2 - 2\sqrt{2}x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 4R^2 - 4x^2}$

~~Также из системы (1)~~

$\cancel{x^2 + a^2 + 2ax\cos 45^\circ}$

$CF^2 = 4R^2 - 2x^2 + 2x\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\cancel{\sqrt{2}}x = 4R^2$

$CF = 2R = 18$

Ответ: $CF = 18$

№2

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a & |:3 \\ 4bx + (a+b)by = 1 & |:b \end{cases}$$ (если $b=0$, то сист. не имеет реш.)

$$\begin{cases} (a+b)x + 4y = \frac{a}{3} \\ (a+b)y + 4x = \frac{1}{b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+b)(x+y) + 4(x+y) = \frac{a}{3} + \frac{1}{b} \\ (a+b)(x-y) + 4(y-x) = \frac{a}{3} - \frac{1}{b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+b+4)(x+y) = \frac{a}{3} + \frac{1}{b} \\ (a+b-4)(x-y) = \frac{a}{3} - \frac{1}{b} \end{cases}$$

Если $a+b+4 \neq 0$ и $a+b-4 \neq 0$, то мы можем на них поделить сложить выраж. - найти единственный x

$2x = f(\overset{\text{const}}{a,b})$ откуда находится ед. знач. x

y выражается как $y = g(\overset{\text{const}}{a,b}) - x$ тоже ед.

$\Rightarrow$ нужно рассм. случаи когда они 0

1) $a+b+4=0$

Тогда чтобы решений вообще было должно выл., что $\frac{a}{3}+\frac{1}{b}=0$

$$\begin{cases} a+b+4=0 \\ \frac{a}{3}+\frac{1}{b}=0 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{3}{b}$$

$b+4-\frac{3}{b}=0 \quad (b \neq 0)$

$b^2+4b-3=0$

$b = \frac{-4 \pm \sqrt{28}}{2} = -2 \pm \sqrt{7}$

если $b = -2+\sqrt{7}$, то $a = -b-4 = -2-\sqrt{7}$

если $b = -2-\sqrt{7}$, то $a = -2+\sqrt{7}$

2) $\begin{cases} a+b-4=0 \\ \frac{a}{3}-\frac{1}{b}=0 \end{cases}$

$\frac{3}{b}+b-4=0$

$b^2-4b+3=0 \quad \begin{cases} b=3;\ a=1 \\ b=1;\ a=3 \end{cases}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

при таких a и b
система принимает вид

$\begin{cases} x+y=const \\ \text{верное для всех } x,y \text{ веществ.} \end{cases}$ или $\begin{cases} x-y=const \\ \text{верное для всех } x,y \text{ цел.} \end{cases}$

=> система имеет беск. множеств.

Ответ $a=1$ и $b=3$; $a=3$ и $b=1$; $a=-2+\sqrt{7}$ и $b=-2-\sqrt{7}$;
$a=-2-\sqrt{7}$ и $b=-2+\sqrt{7}$

№1

Радиус окружности муравья $R_M=2$
Радиус окр. жука $R_N=4$ => кр. расстояние между такими окр. 2

Тогда ур. их окр. $x_M+y_M=4$
$x_N+y_N=16$

Заметим что т.к. $R_N=2R_M$, то
длина окр. муравья 2 раза меньше
=> пока жук идет один круг
муравей пройдет 2 => ~~пока~~
~~жук~~ жук движ. циклическое и когда муравей

пройдет 2 кр. все будет повторяться

Поймем что когда ~~и~~ муравей и жук находятся на одном луче из центра, то между ними кр. расстояние равное $R_x - R_m = 2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$ $\quad -5 \quad 6$

$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} - (x+2)(x+3) = 0$

$(x+3)\left(\sqrt{x^3-x+10} - x-2\right) = 0$

$x=-3 \qquad \sqrt{x^3-x+10} = x+2$

$x^3-x+10 = x^2+4x+4$

$x^3-5x-x^2+6=0$

$\cancel{-x^3+5x+x^2-6=0}$

$x^3-x^2-5x+6=0$

$\frac{1+12}{\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}}$

$\cancel{8-4-10+6}$

$(x^2+x-3)(x-2)$

$x^3+x^2-3x-2x^2-2x+6$

x^3-x^2-5x+6

$x^3-x^2-05x+6 \;\Big|\; \frac{x-2}{x^2+x-3}$

x^3-2x^2

x^2-5x

x^2-2x

$-3x+6$

$-3x+6$

-27

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$2\cdot 10^4 + 9^2 - 3\cdot 10^2\cdot 9$

$9+8$

$2x^4 + (x-1)^2 - 3x^2|x-1| \geq 0$

$2x^2+3x-1$

$x^2(2x^2 - 3|x-1|) + (x-1)^2 \geq 0$ $\quad -\frac{3}{4}$

$2\cdot\frac{9}{16} - \frac{3}{4} - 1$

$x < \frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$ $\quad 2x^2 \geq 3|x-1|$

$2x^4 + |x-1|(|x-1| - 3x^2)$ $\quad 3\cdot\frac{1}{6^2} - \frac{1}{6} + 1$

$\begin{cases} |x-1| \geq 3x^2 \\ 2x^2 \geq 3|x-1| \end{cases}$ $\quad x \geq 0$

$\frac{1}{6}$

$D = 9 - 4\cdot$

$\begin{cases} x-1 \geq 3x^2 \\ 2x^2 \geq 3x-3 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x^2 - x + 1 \leq 0 \\ 2x^2 - 3x + 3 \geq 0 \end{cases}$

1400

7 0 200

$7\cdot 5\cdot 4\cdot 10 =$

$= 7\cdot 5^2\cdot 2^3\cdot 1^2$

$\frac{8!}{2!}$

$2\cdot\frac{3^2}{4^2} - 3\cdot\frac{3}{4} + 3$

$\frac{18}{16} - \frac{9}{4} + 3$

$3\cdot 16 + 18 - 9\cdot 4$

$-x + 1 - 3x^2 \geq 0$

$3x^2 + x - 1 \leq 0$

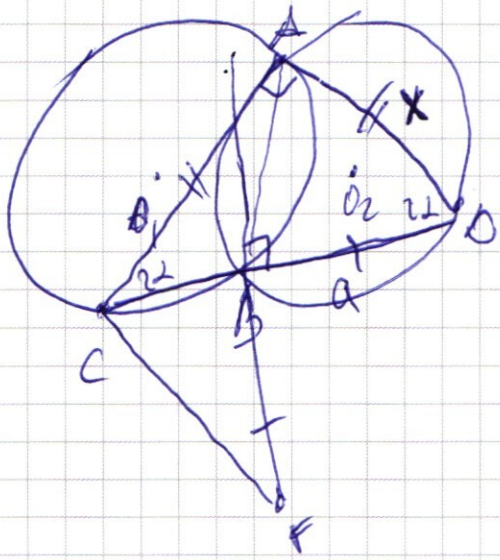
$-1 \pm \sqrt{13}$

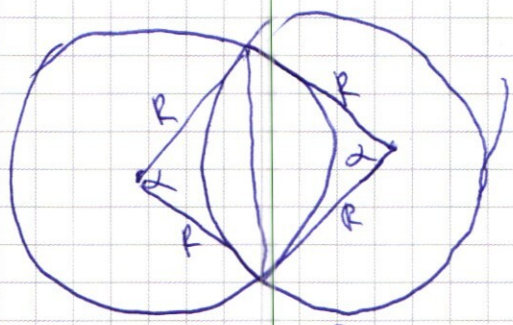
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

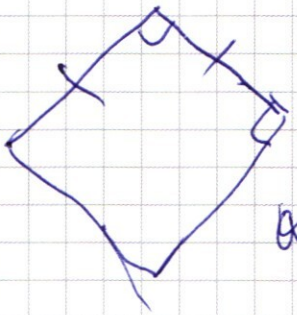
$2\alpha = 45^\circ$





$AB = 2R^2 - 2R^2\cos\alpha$

$\sqrt{2}R$



$\cancel{a = x^2 + 2R^2 - 2\sqrt{2}Rx}$

$a^2 + x^2 - 2ax\cos 45^\circ = 2R^2$

$\cancel{x^2} + a^2 - 2ax\cos 45^\circ = \cancel{x^2} + b^2 - 2bx\cos 45^\circ$

$\cancel{(a-b)}(a+b) = 2x\cos 45^\circ\cancel{(a-b)}$

$2x^2 = 4x^2\cos 45^\circ$

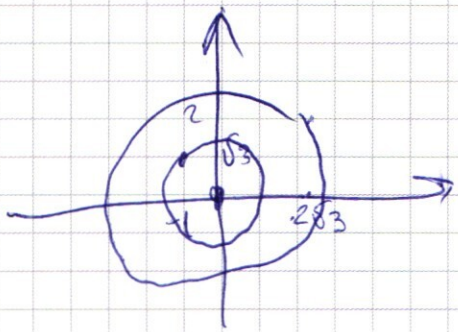
☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$x_M^2 + y_M^2 = 4$

$x_N^2 + y_N^2 = 16$

M: 2

N: ~~4 3 2 4~~ 4

$y =$

$x \le +1$

$$\begin{cases} 2x^2 + 3x - 3 \ge 0 \\ 3x^2 + x - 1 \le 0 \end{cases}$$

$$\frac{-3 \pm \sqrt{33}}{4}$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}$$

$$\frac{-1 + \sqrt{13}}{6} > \frac{-3 + \sqrt{33}}{4}$$

$$-2 + 2\sqrt{13} > -9 + 3\sqrt{33}$$

$$7 + 2\sqrt{13} > 3\sqrt{33}$$

49
12
98
490
588

$$\frac{8! + 8! \cdot 4 + 8! \cdot 2}{4! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 8!}{2 \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 7}{2} = 5 \cdot 6 \cdot 7^2 \cdot 4$$

$20 \cdot 49 \cdot 6 =$
$= 120 \cdot 49$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

(ДЕ)

$$\begin{cases} 3((a+b)x + 4y) = a \\ b(4x + (a+b)y) = 1 \end{cases}$$

$$3(kx+4y) = \frac{a}{3}$$

$$b(ky+4x) = \frac{1}{b}$$

$$\frac{3}{b} \quad \begin{cases} (a+b)x + 4y = \frac{a}{3} \\ (a+b)y + 4x = \frac{1}{b} \end{cases}$$

2) $(a+b-4)(x-y) = \frac{a}{3} - \frac{1}{b}$

1) $(a+b)\overset{1}{(x+y)} + 4\overset{t}{(x+y)} = \frac{a}{3} + \frac{1}{b}$

$$x-y = \frac{ab-3}{3b} \cdot \frac{1}{a+b-4}$$

$$(a+b)t + 4t = \frac{a}{3} + \frac{1}{b}$$

$$t = \frac{ab+3}{3b} \cdot \frac{1}{a+b+4}$$

$\frac{1}{b} = \frac{a}{3}$ $\quad a = \frac{3}{b}$

$b = \frac{3}{t}$

$$\begin{cases} 3(a+b) = 4b \\ (a+b)b = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} 3t = 4b \\ tb = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{4b^2}{3} = 12 \\ b^2 = \frac{12 \cdot 3}{4} = 9 \end{cases}$$

$b = 3$
$t = \frac{4 \cdot 3}{3} = 4$

$b = 3$
$a = 1$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

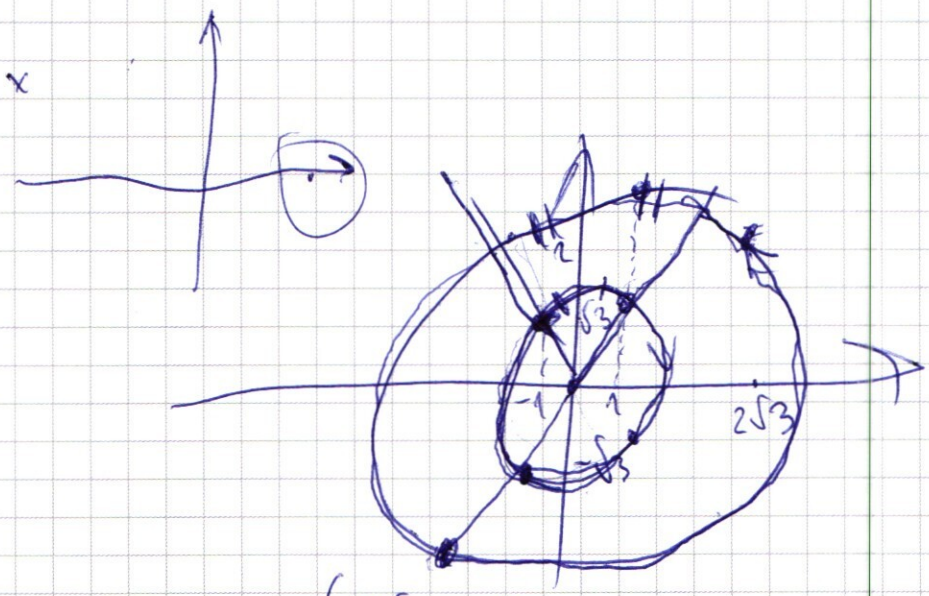
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

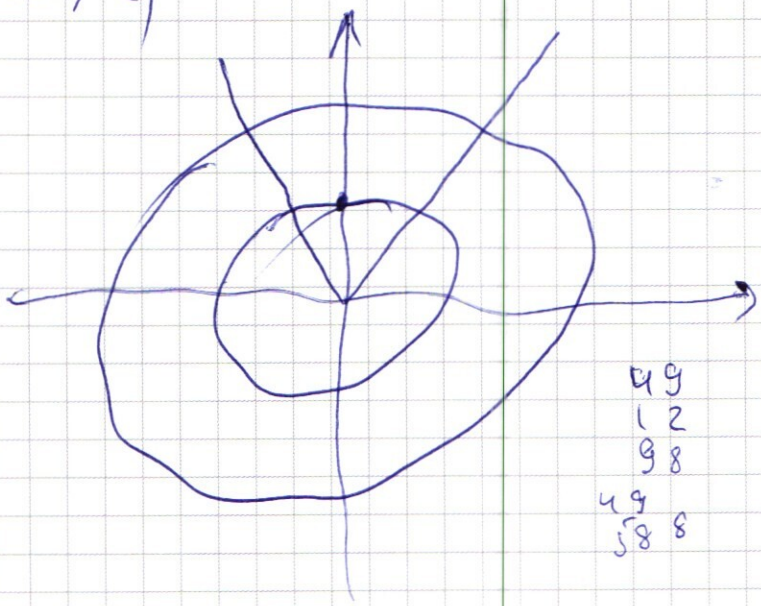
$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \le 6 \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25 \end{cases}$$



$(-2\sqrt{3}; -2)$

1 11

3·2·1



49
12
98
49
588

56776

49·120

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)