

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Муравей двигается по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0(-1; \sqrt{3})$ и $N_0(2\sqrt{3}; 2)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a, \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

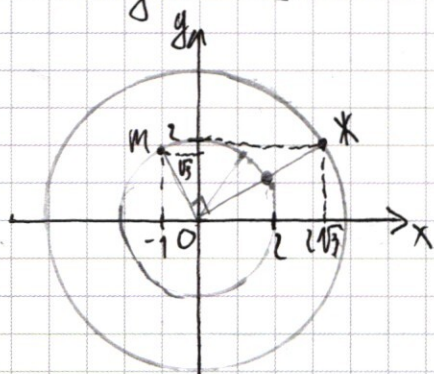
3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6, \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Сначала посчитаем радиусы окружностей муравья и жука: $R_m = \sqrt{1^2 + 3} = 2$ и $R_j = \sqrt{4 \cdot 3 + 4} = 4$.

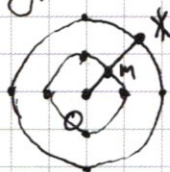


Пусть v - их скорости, а φ_1 и φ_2 - на сколько они повернутся за t муравья и жука соответственно:

$$\varphi_m \cdot R_m = v \cdot t = \varphi_j \cdot R_j$$

$\varphi_m = 2 \varphi_j$, а значит если бы жук двигался по окружности

муравья, то он двигался бы со скоростью в два раза меньше.



Заметим, что расстояние между ними будет минимальным, когда J будет на луче OM, а значит нас интересует дуга внутри на окружности муравья:

на окружности муравья:

$$\tan \angle MOY = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ значит } \angle MOY = \frac{\pi}{6}, \text{ а } \tan \angle YOJ = \sqrt{3}, \text{ значит } \angle YOJ = \frac{\pi}{3}.$$

(или J-наименьшие положения муравья и жука).

$$\angle MOJ = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}. \text{ Значит наименьшее расстояние}$$

$$(\text{на окр. муравья}) \text{ между ними: } \frac{\pi}{2} \cdot 2 = \pi.$$

П.к. скорость муравья в два раза больше, то

и путь он пройдет в два раза больше, значит

$$\text{он пройдет } \frac{2}{3} \pi \text{ и повернется на } \varphi_m \text{ и } \varphi_m \cdot 2 = \frac{2}{3} \pi \quad \varphi_m = \frac{\pi}{3}$$

$$1400 = 7 \cdot 200 = 7 \cdot 2^3 \cdot 5^2$$

Циклы: 7, 8, 5, 5

$$\begin{array}{r} 75 \\ 8 \\ \hline 700 \\ 1400 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times 30 \\ \hline 1680 \end{array}$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2 |x-1| + 1 \geq 0$$

$$|x-1| = x-1 \quad |x-1| = 1-x$$

$$x \geq 1:$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2 \cdot (x-1) + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^3 + 3x^2 + 1 \geq 0$$

$$x^4 - x^3 + 2x^2 + x^2(x-1)^2 + (x-1)^2 \geq 0$$

$$x^4 - x^3 + 2x^2 + (x-1)^2(x^2+1) \geq 0$$

$$x^2(x^2+1) - x^2(x-1)$$

$$x^2(x^2-x+2)$$

$$x \in [1; +\infty)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 7, 8, 5, 5, 1 \\ 7, 2, 5, 5, 1 \\ 7, 7, 7, 5, 5, 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} \\ \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2} \\ \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} \end{array} \right.$$

$$x^2 - x + 2 \leq 0$$



$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 2$$

~~2x^2~~

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x^3 < x \\ x^2 < \frac{1}{2} \\ |x| < \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times 12 \\ \hline 672 \\ 3360 \end{array}$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2(1-x) + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2 + 3x^3 + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + x - 2x^2 + 3x^3 - 2x + 1 \geq 0$$

$$2x^2(x^2-1) + 2x(x^2-1) + x^3 + 1 \geq 0$$

$$2x(x^2-1)(x+1) + (x+1)(x^2-x+1) \geq 0$$

$$2x^3 - x + (x-1)^2 < 0$$

$$(x+1)(2x^3 - 2x + x^2 - x + 1) \geq 0$$

$$(x+1)(2x^3 + x^2 - 3x + 1) \geq 0$$

$$2x^3 + x^2 - 3x + 1 < 0$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times 12 \\ \hline 112 \\ 56 \\ \hline 672 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times 15 \\ \hline 280 \\ 560 \\ \hline 840 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 (продолж.)

Значит их 1-ое место встречи образует угол
 $\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{3}$ со осью x и значит первые координаты
их встречи: $x = 2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 1$ и $y = 2 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

Следующее место их встречи будет когда пук
повернется на ~~$\frac{2}{3}\pi$~~ $\frac{2}{3}\pi$ (или $\frac{4}{3}\pi$), то есть это
место встречи будет на оси x и координаты $x = -2$, а $y = 0$.

Следующее место их встречи будет когда пук
повернется ещё на $\frac{2}{3}\pi$, то есть на координатах $x = 1$, а $y = -\sqrt{3}$.

А далее место их встречи совпадет с изначальным.

Чтобы вычислить координаты «реального» пук
нам нужно домножить их на 2.

Ответ: $(2; 2\sqrt{3})$, $(-4; 0)$, $(2; -2\sqrt{3})$.

№2

$$\begin{cases} 3(a+b) \cdot x + 12y = a \\ 4bx + (a+b) \cdot by = 1 \end{cases} \quad | b \neq 0, \text{ иначе } 0 = 1, \text{ что } \neq 1.$$

если $a+b \neq 0$:

$$\begin{cases} y = -\frac{(a+b)}{4} \cdot x + \frac{a}{12} \\ y = -\frac{4}{(a+b)} \cdot x + \frac{1}{b(a+b)} \end{cases}$$

Для того, чтобы было бесконечно много решений
нужно, чтобы эти две прямые совпадали:

№4

Если $x \geq 1$:

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2 \cdot (x-1) + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^3 + 3x^2 + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^3 + 3x^2$$

$$x^4 - x^3 + 2x^2 + x^2(x-1)^2 + (x-1)^2 \geq 0$$

$$x^2(x^2 - x + 2) + (x(x-1))^2 + (x-1)^2 \geq 0$$

Ветви параболы $x^2 - x + 2$ идут вверх, а её вершина $\frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2} > 0, \text{ значит } x^2(x^2 - x + 2) + (x(x-1))^2 + (x-1)^2 \geq 0$$

при $x \geq 1$ $x \in [1; +\infty)$.

№5

Заметим, что $1400 = 4 \cdot 2^3 \cdot 5^2$, значит набор цифр может быть таким: 1) 4, 8, 5, 5, 1, 1, 1, 1.

2) 4, 2, 4, 5, 5, 1, 1, 1.

3) 4, 2, 2, 2, 5, 5, 1, 1.

1: $\frac{8 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 9}{2}$ (1 вариант автоматически $\frac{1}{2}$ из-за перестановок 5).

2: $\frac{8 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 5}{2}$

3: $\frac{8 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 2}$ ($\frac{1}{3!}$ из-за перестановок 2)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№? (продолжение)

$$\begin{cases} -\frac{(a+b)}{4} = -\frac{4}{(a+b)} \\ \frac{a}{12} = \frac{1}{b(a+b)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+b)^2 = 16 \\ a \cdot b \cdot (a+b) = 12 \end{cases}$$

либо:

$$\begin{cases} a+b=4 \\ a \cdot b \cdot (a+b)=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=4 \\ a \cdot b=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=4 \\ a \cdot (4-a)=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=4 \\ a^2 - 4a + 4 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=4 \\ (a-3) \cdot (a-1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}$$

Еще $a+b=0$:

$$\begin{cases} 12y=a \\ ybx=1 \end{cases}$$

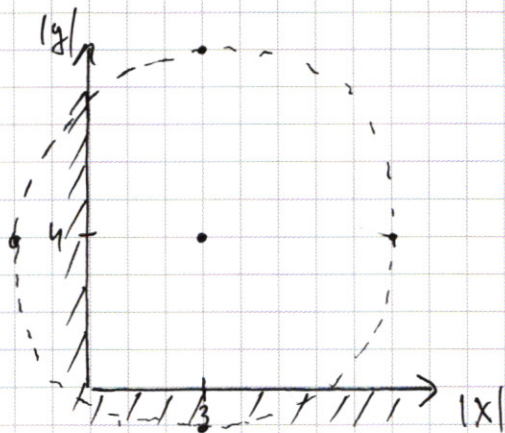
$$\begin{cases} 12y=-b \\ ybx=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{b}{12} \\ x = \frac{1}{yb} \end{cases} \quad (b \neq 0)$$

Здесь решение
одно.

№ 4

$$\begin{cases} |x-3+y| + |x-3-y| \leq 6 \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25 \end{cases}$$



Если $x-3 \geq y$
 $x \leq 6$

если $y > x-3 \geq -y$
 $y \leq 6$

если $y > x-3$
 $x \geq 6$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 (продолжение)

Ответ: $a=3$ и $b=1$; $a=1$ и $b=3$; $a=-2+\sqrt{7}$ и $b=-2-\sqrt{7}$; $a=-2-\sqrt{7}$ и $b=-2+\sqrt{7}$.

№3

$$(x+3) \cdot \sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$$

$$(x+3) \cdot \sqrt{x^3-x+10} = (x+3) \cdot (x+2) \quad \text{если } x \neq -3$$

$$\sqrt{x^3-x+10} = x+2$$

$$x^3-x+10 = x^2+4x+4$$

$$x^3-x^2-5x+6=0$$

$$(x-2)(x^2+x-3)=0$$

$$x=2 \text{ или } x^2+x-3=0$$

$$D=1+12=13$$

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$$

$$\text{Или } x_2 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2} < \frac{-1-3}{2} = -2$$

А значит $x+2 < 0$, но $\sqrt{x^3-x+10} \geq 0$, значит

x_2 не подходит.

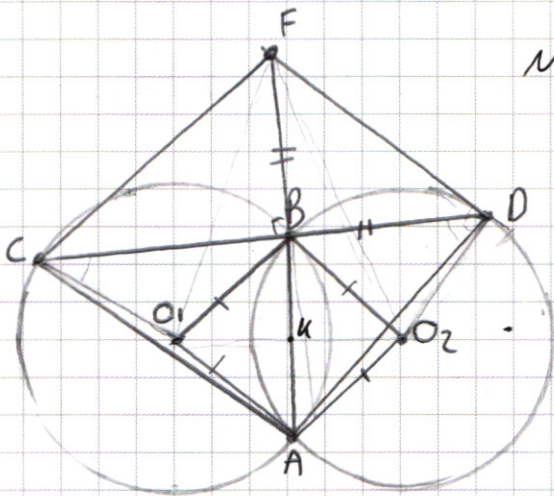
Ответ: $x=-3$; $x=2$; $x = \frac{\sqrt{13}-1}{2}$.

л5 (продолжение).

Знаемтi всео вярвантств:

$$647 + 840 + 3360 + 1680 = 5880.$$

Итого: всего 5880 мамных учел.



NB

Заметим, что $AO, BO_2 -$

параллелограмм ($O, B = A O_2$ и $B O_2 = O, A$).

Zusamm $\text{CBO}_2\text{H} = \text{CBO}_2\text{H}$.

$$\angle ACB = \frac{1}{2} \angle BO_1A = \frac{1}{2} \angle BO_1A = \angle CDA.$$

$$\text{Maximum } \angle ACD = \angle CDA = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

и $\angle BO_1A = 90^\circ$, значит

BO, AO_2 - квадрат,

значит $\angle OKB = \angle OCK = 90^\circ$, значит $CD \parallel O_1O_2$ и $O_1C = O_2D$.

значит O, CrO_2 -равновесная траекция, значит

$$\angle O, CB = \angle BDO_2, \text{ а значит } \angle CO, B = 180^\circ - 2\angle O, CB = 180^\circ - 2\angle BDO_2 =$$

$$= \angle B O_2 D \text{ u } \angle O_1 = O_1 B = B O_2 = O_2 D, \text{ значит } \angle C O_1 B = \angle B O_2 D$$

ис folgt строгам и узлы между ними. Знают

$CB = BD$, а т.к. $\triangle CAB$ — равноб. , то $CB = BD = BF = AB$.

$$AB^2 = m^2 + n^2$$

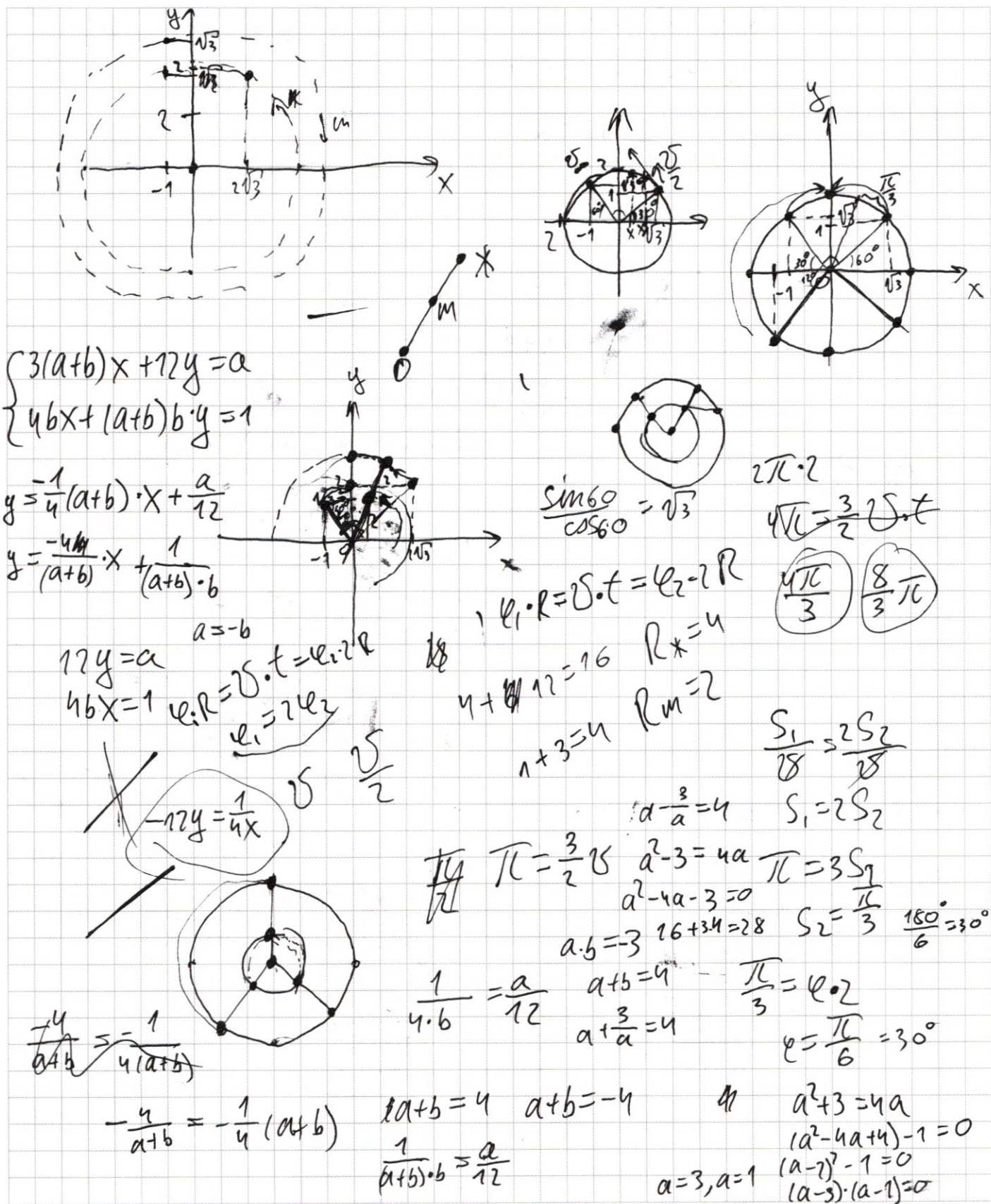
$$AB = \sqrt{2} \text{ m}$$

$$CF^2 = CB^2 + BF^2 = 2AB^2$$

$$CF = \sqrt{2} AB = 2\sqrt{2} = 18$$

Ambern: $CF=18$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



1x79

$$(x+3) \cdot \sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$$

$$x^3-x+10 \geq 0$$

$$x(x^2-1) \geq -10$$

$$x \cdot (x-1)(x+1) \geq -10$$

$$\begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad 1 \\ -1 \quad 0 \quad 1 \end{array}$$

$$x^2+5x+6 =$$

$$= x^2+6x+9-3-x =$$

$$= (x+3)^2 - (3+x) =$$

$$= (x+3) \cdot (x+3-1) = (x+3) \cdot (x+2)$$

$$x = -3 \vee$$

$$\sqrt{x^3-x+10} = x+2$$

$$x^3-x+10 = x^2+4x+4$$

$$x^3-x^2+6 = 5x$$

$$x^3-x^2-5x+6 = 0$$

$$8-4-10+6$$

$$\begin{array}{r|l} x^3-x^2-5x+6 & x-2 \\ -x^3+2x^2 & \\ \hline x^2-5x+6 & \\ -x^2+2x & \\ \hline -3x+6 & \\ -3x+6 & \\ \hline 0 & \end{array} \quad \begin{array}{l} x^2+x-3 \\ x^2+x-3 \end{array}$$

$$(x-2) \cdot (x^2+x-3) = 0$$

$$x=2$$

$$x^2+x-3=0$$

$$x=-3$$

$$D = 1+12=13$$

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \approx 2 - \frac{1+3}{2} = -2$$



черновик



чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|x-3-y| + |x-3+y| \leq 6$$

$$(|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25$$

$$x^2 - 6|x| + y^2 - 8|y| = 0$$

$$x^2 \leq 6|x|$$

$$|x|^2 \leq 6|x|$$

$$y > x = 0$$

$$|x| \leq 6$$

$$x^2 \leq 6|x|$$

$$x-3+y$$

$$x^2 - 6x + y^2 - 8y = 0$$

$$x-3-y$$

$$x-3 > y$$

$$x-1=1$$

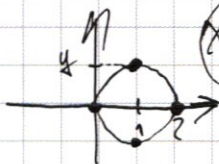
$$x-1 \neq -1$$

$$x-3 > -y$$

$$x-3 > -y$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

$$x-3 \geq -y$$



$$x-3-y$$

$$y \geq 0$$

$$x-3 \geq y$$

$$\begin{cases} x \leq 6 \\ y \leq 3 \end{cases}$$

$$y < 0$$

$$x-3 \geq -y$$

$$y > x-3 \geq -y$$

$$y+3-x+x-3+y \leq 6$$

$$\begin{cases} y \leq 3 \\ 6 > x \end{cases}$$

$$-y > x-3$$

$$-y > 3$$

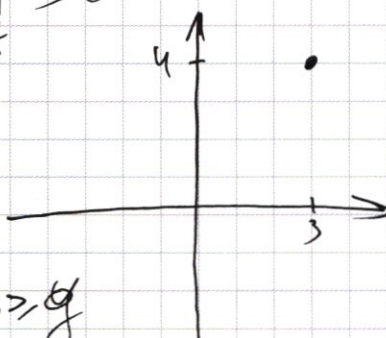
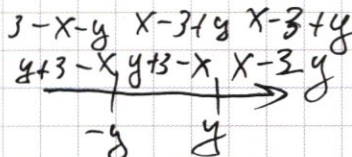
$$y < -3$$

$$3-x-y+y+3-x \leq 6$$

$$3-x \leq 3$$

$$x \geq 6 \text{ не подходит}$$

$$\text{т.к. } x \text{ отриц.}$$

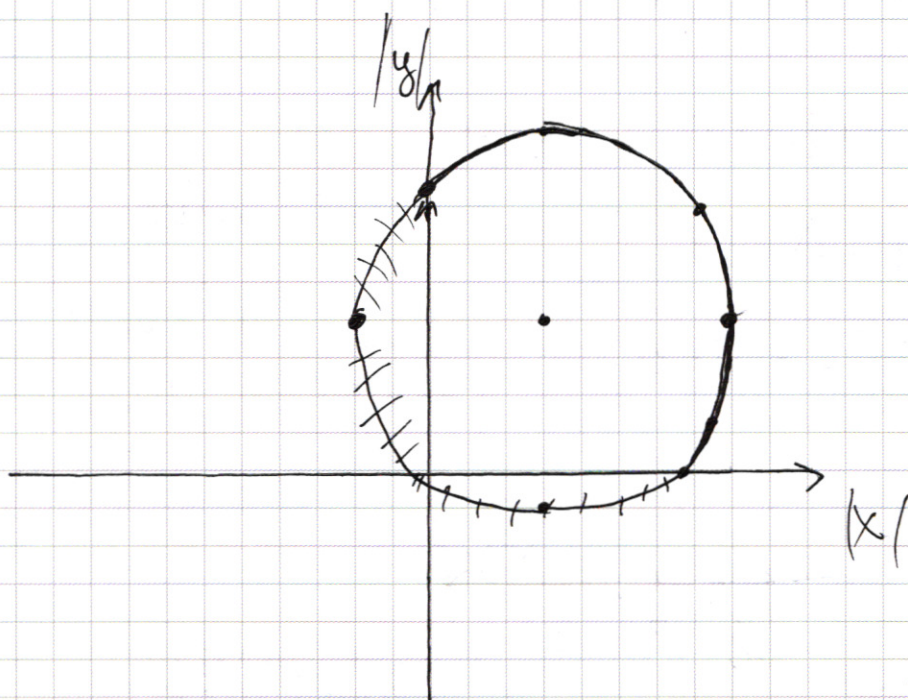


$$x-3 \leq 3$$

$$x \leq 6$$

$$x-3 \geq y$$

$$y \leq 3$$



$$|a-b| \geq |a| - |b|$$

$\begin{array}{c} b-a \quad a-b \\ | \quad | \\ \hline 0 \quad b \quad a \end{array}$

am

~~1/2~~ $|x-3| - |y| + |x-3| + |y|$