

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 2

шифт

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Вокруг птичьей кормушки в одной плоскости с ней по двум окружностям с одинаковой скоростью летают синица и снегирь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой кормушка (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Синица движется по часовой стрелке, а снегирь – против. В начальный момент времени синица и снегирь находятся в точках $M_0(\sqrt{3}; 3)$ и $N_0(6; -2\sqrt{3})$ соответственно. Определите координаты всех положений снегиря, в которых расстояние между птицами будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a, \\ 3bx + (a-b)y = 1 \end{cases}$$

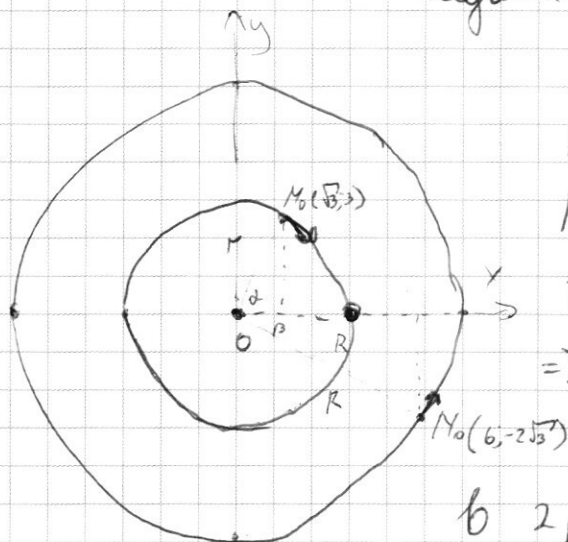
имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2|x+1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 7000. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 7 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10, \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача № 1



$$R = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = 2\sqrt{3}$$

$$R = \sqrt{36 + 12} = 4\sqrt{3}$$

Замечая, что $R = 2r$ и $v_1 = v_2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ угловая скорость будет

в 2 раза больше у внешней (малая

окружность). Т.к. окружности концентрические, радиусы будут наименьшие когда O, M (внешняя), N (внутренняя) лежат на одной прямой.

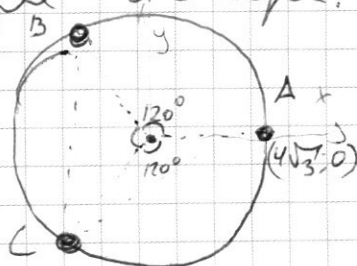
$$\tan \alpha = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

$$\tan \beta = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \beta = 30^\circ$$

$\alpha = 2\beta \Rightarrow$ первая внутренняя

пройдет на оси OX (точка $(4\sqrt{3}; 0)$). Далее, т.к. угловая скорость внешней в 2 раза больше, она до мед. внешней пройдет $\frac{2}{3}$ круга, а внутренняя $\frac{1}{3}$. То есть далее внутренняя будет проходить сдвигаясь на $\frac{1}{3}$ окруж. от внешней.

где внешняя.

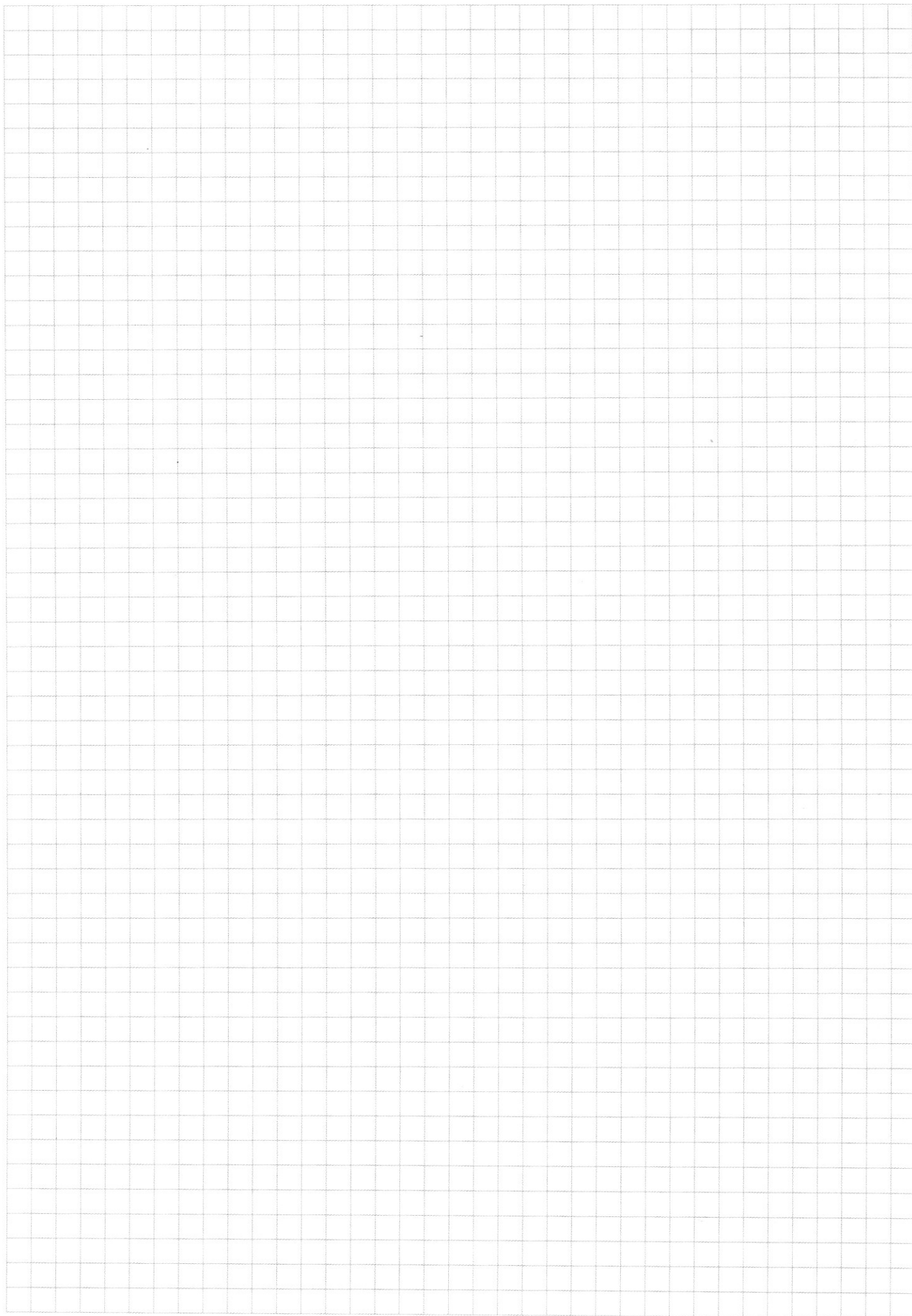


$$A(4\sqrt{3}; 0)$$

$$B(4\sqrt{3} \cdot \cos 120^\circ, 4\sqrt{3} \cdot \sin 120^\circ) = B(-2\sqrt{3}; 6)$$

$$C(4\sqrt{3} \cdot \cos 120^\circ, -4\sqrt{3} \cdot \sin 120^\circ) = C(-2\sqrt{3}; -6)$$

$$\text{Путь: } (4\sqrt{3}; 0), (-2\sqrt{3}; 6), (-2\sqrt{3}; -6)$$



☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №2

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a \\ 3bx + (a-b)by = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(a-b)x + 6y - a = 0 & (1) \\ 3bx + (a-b)by - 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

1) Если $b=0$, то $(2) \Leftrightarrow 0=1$, что не верно и решений нет.

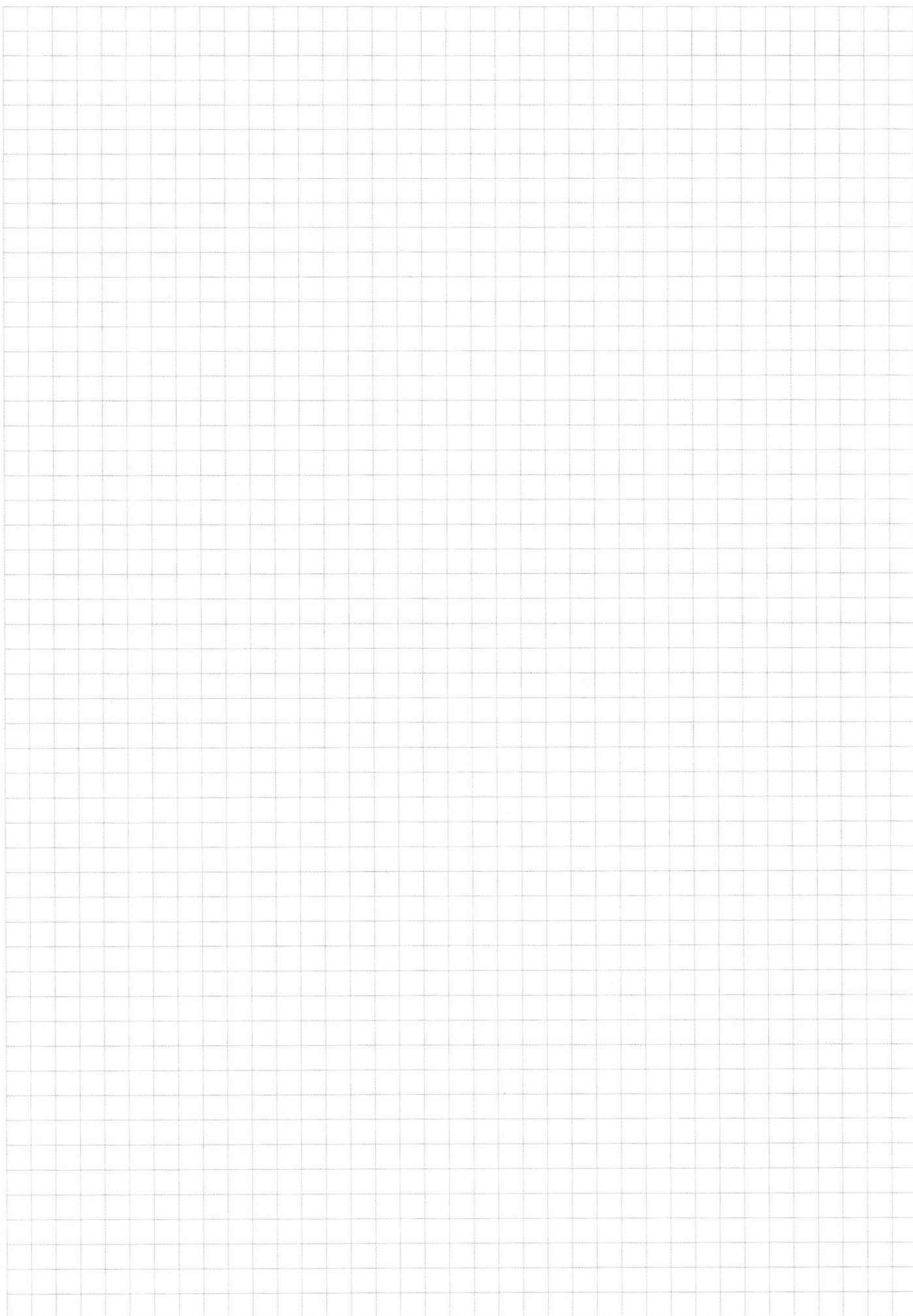
2) Если $b \neq 0$. Заметим, что (1) и (2) задают прямую. Значит система может иметь бесконечно много решений только если эти прямые совпадают. $a \neq 0$, т.к. тогда второе у (1) свободный член 0, а у (2) -1 $\Rightarrow$ они точно не совпадают. Тогда поделим (1) на a .

$$\begin{cases} 2 \frac{a-b}{a} x + \frac{6}{a} y - 1 = 0 \\ 3bx + (a-b)by - 1 = 0 \end{cases} \text{ свободные члены совпадают, значит для совпадения прямых надо чтобы коэффициенты совпадали.}$$

$$\begin{cases} \frac{2(a-b)}{a} = 3b \\ \frac{6}{a} = (a-b)b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 2b - 3ab = 0 \\ a - b = \frac{6}{ab} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{12}{ab} = 3ab \\ a - b = \frac{6}{ab} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 b^2 = 4 \\ a - b = \frac{6}{ab} \end{cases} \begin{matrix} 1) \begin{cases} ab = 2 \\ a - b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b+3) \cdot b = 2 \\ a = b+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \\ a = \frac{3 - \sqrt{17}}{2} \\ b = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2} \\ a = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \end{cases} \\ 2) \begin{cases} ab = -2 \\ a - b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b-3) \cdot b = -2 \\ a = b-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -2 \\ b = 2 \\ a = -1 \end{cases} \end{matrix}$$

Ответ: $\searrow$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: $(\frac{3-\sqrt{12}}{2}; \frac{-3-\sqrt{12}}{2})$, $(\frac{3+\sqrt{12}}{2}; \frac{-3+\sqrt{12}}{2})$, $(-2; 1)$, $(-1; 2)$

Задача 103

$$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$$

при $x=-5$ ~~не подходит~~ 0,
~~даже $x+5$~~

$$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = (x+5)(x-2)$$

$$\begin{cases} x^3-16x+25 = -125+80+25 < 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -5 \text{ не подходит в ОДЗ} \end{cases}$$

$$\sqrt{x^3-16x+25} = 2(x-2)$$

$$(x \geq 2), \text{ т.к. } 2(x-2) \geq 0$$

$$x^3-16x+25 = 4(x-2)^2$$

$$\sqrt{x^3-16x+25} \geq 0$$

$$x^3-4x^2+9=0$$

$$(x-3)(x^2-x-3)=0$$

$$x=3 \text{ или } x^2-x-3=0$$

$$D=13$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Но $\frac{1-\sqrt{13}}{2} < 2 \Rightarrow$ не подходит в ОДЗ.

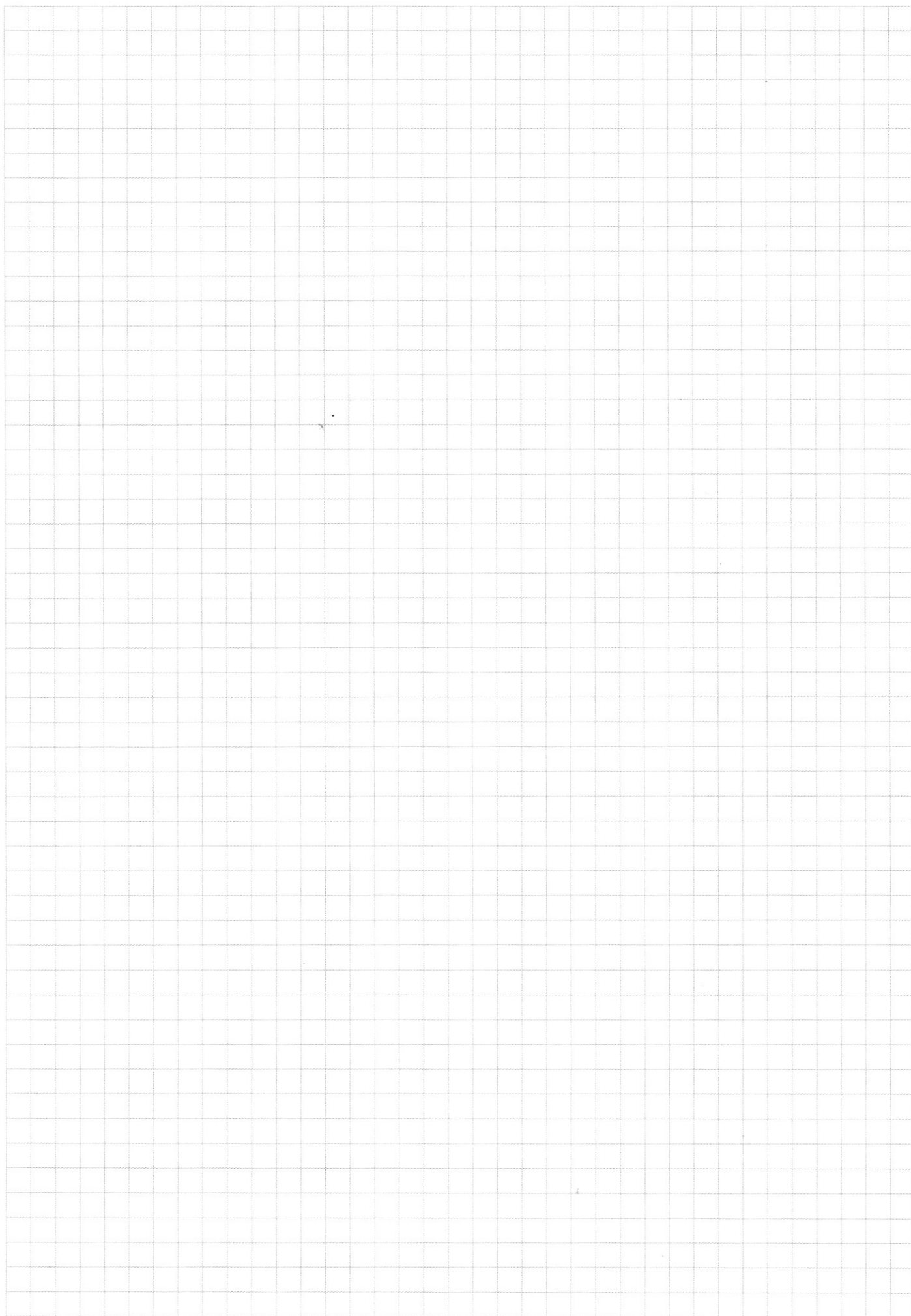
$x=3$ подходит, т.к. $27-16 \cdot 3+25=4 > 0$

Проверим $x = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$; $\frac{1+13\sqrt{13}+3\sqrt{13}+39}{8} - \frac{16+16\sqrt{13}+25}{2} =$

$$= \frac{-24-48\sqrt{13}}{8} + 25 = 22 - 6\sqrt{13} > 0, \text{ т.к. } 22 > 6\sqrt{13}, \text{ т.к.}$$

$$22^2 = 484 > (6\sqrt{13})^2 = 468$$

Ответ: $x \in \{3; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\}$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №5

$$\underline{7000 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 7}$$

Известно, что нисе в сумме не будет

Из этого следует, что в нашем числе ровно 3 пятерки и
ровно одна семерка. Как можно получить 2^3 ?

1) 8. цифр

Тогда набор: 5, 5, 5, 7, 8, 1, 1, 1

2) 4. 2.

Тогда набор цифр: 5, 5, 5, 7, 4, 2, 1, 1

3) 2. 2. 2

Тогда набор цифр: 5, 5, 5, 7, 2, 2, 2, 1

4) Более вариантов нет, т.к. если мы возьмем 6, то появится
новый множитель 3, которого нет в 7000.

Подсчитаем кол-во комбинаций всех наборов (поэлементно).

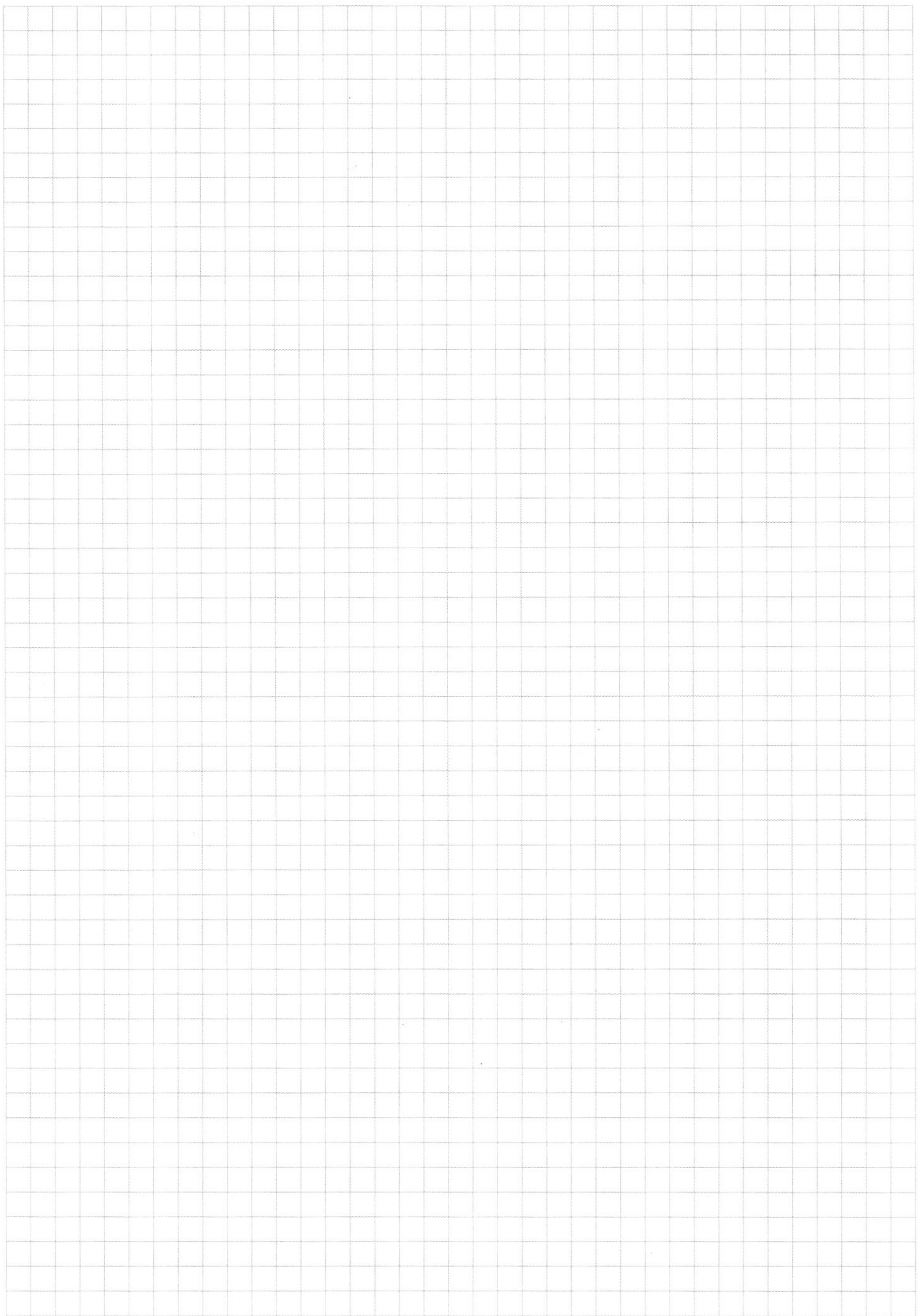
$$1) \frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{6} = 140 \cdot 8 = 1120$$

$$2) \frac{8!}{3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2} = 420 \cdot 8 = 3360$$

$$3) \frac{8!}{3! \cdot 3!} = 1120$$

$$1120 \cdot 2 + 3360 = 2240 + 3360 = 5600$$

Ответ: 5600



☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2 |x+1| + 1 \geq 0$$

$$(\sqrt{6}x^2 - |x+1|)^2 = 2\sqrt{6}$$

$$5 - 2\sqrt{6}$$

$$(5 - 2\sqrt{6})x^2 |x+1| \geq 0$$

$$(\sqrt{6}x^2 - |x+1| - \sqrt{(5-2\sqrt{6})(x+1)})(\sqrt{6}x^2 - |x+1| + \sqrt{(5-2\sqrt{6})(x+1)}) \geq 0$$

$$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$$

$$125 - 80x + 25$$

$$(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = 2(x+5)(x-2)$$

$$(x-5)^2$$

$$x^3 - 6x - x^2$$

$$(x+5)^2((x-5)^2 + (x+2)(x^2-3x)) = 4(x-5)^2(x+2)(x^2-3x)$$

$$(x+5)^2((x-5)^2 + (x+2)(x^2-3x)) = 4(x-5)^2(x+2)^2$$

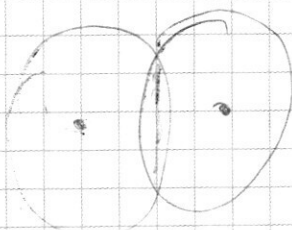
$$((x-5)^2 + (x+2)(x^2-3x)) = 2(x-2)$$

$$x^3 - 16x + 25 - 4(x-2)^2 = 0$$

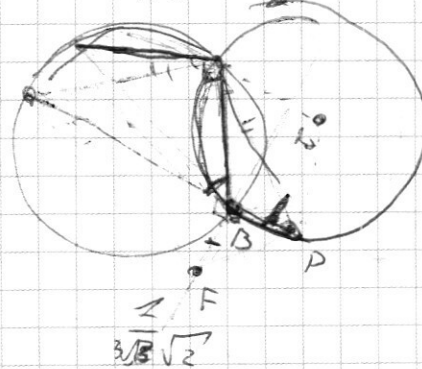
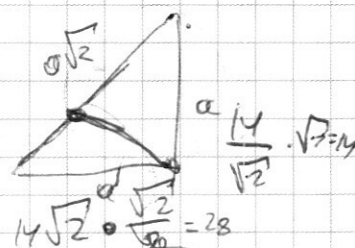
$$x^3 - 4x^2 + 9 = 0$$

$$(x-3)(x^2-x-3) = 0$$

$$x=3 \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$



$$\angle 45 - \frac{45 \cdot 2}{4} =$$



Задача № 4

$$6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2 / |x+1| + 1 \geq 0$$

Решим уравнение $6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2 / |x+1| + 1 = 0$, далее используем метод интервалов

$$1) \quad x+1 \geq 0$$

$$x \geq -1$$

$$6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)(6x^3 + x^2 - 3x - 1) = 0$$

$$(x-1)(2x+1)(3x^2 - x - 1) = 0$$

$$x=1 \quad \text{или} \quad x=-0,5 \quad \text{или} \quad 3x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{6}$$

Все эти корни удовлетворяют условию $x \geq -1$

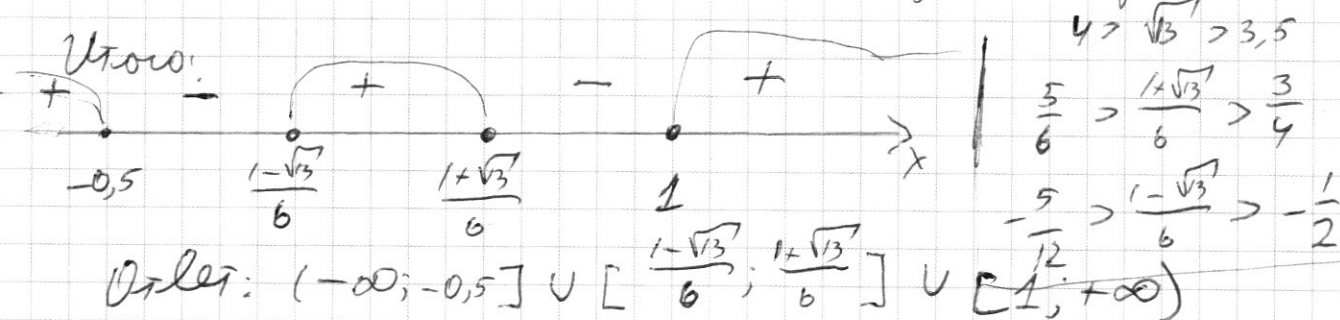
$$2) \quad x+1 < 0$$

$$x < -1$$

$$6x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 2x + 1 = 0$$

при $x=-1$ значение выражения равно $6-5+6-2+1=6 > 0$

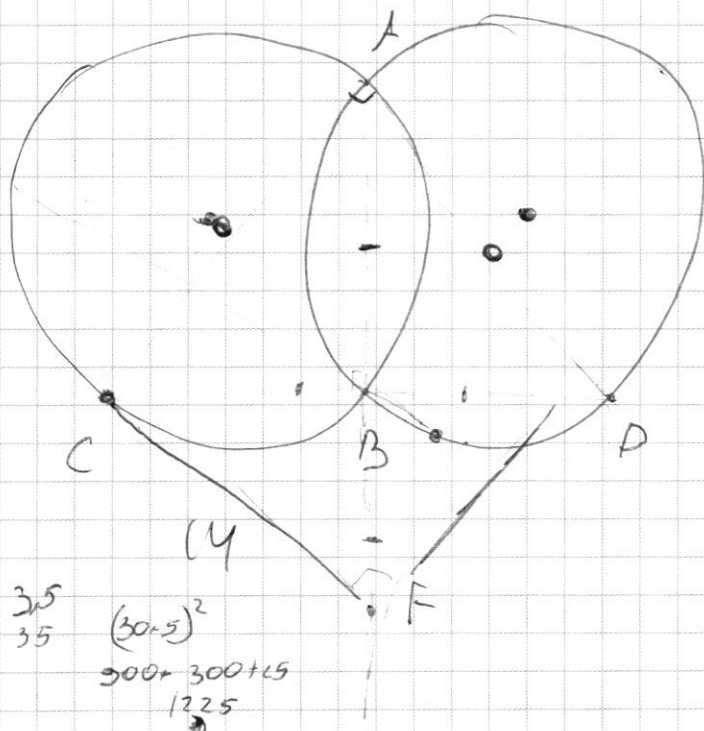
при $x < -1$ значение только увеличится, ведь $6x^4$ растет быстрее чем убывает $5x^3$, а $6x^2$ растет быстрее чем убывает $2x$, следовательно значение не может быть равно нулю. Значит корней меньше -1 у этого уравн. нету!



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6) $2000 = 2 \cdot 3500 = 4 \cdot 1750 = 8 \cdot \underline{550}875$

$$(x+5)(x^2-5x)$$



$$805 \cdot 175 =$$

$$2^3 \cdot 5^2 \cdot 35 =$$

$$= 2^3 \cdot 5^3 \cdot 7$$

$$2 \cdot 2^2 \cdot 3$$

8/42/222
140.8

$5557 +$

8111 / 92112221

$$\frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1120$$

$$\frac{8!}{2 \cdot 3!} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2} = 3360$$

11820

2240

3360

5600

7) $|x+y+5| + |x-y+5| \leq 10$

$$(x+y, s)^2 + (x-y, s)^2 + |(x, s)^2 - y^2| \leq 100$$

72
22
20
44
484

22 6 $\sqrt{3}$
484 > 468

$$22 - 6\sqrt{13}$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ 13 \\ \hline 108 \\ 36 \\ 468 \end{array}$$

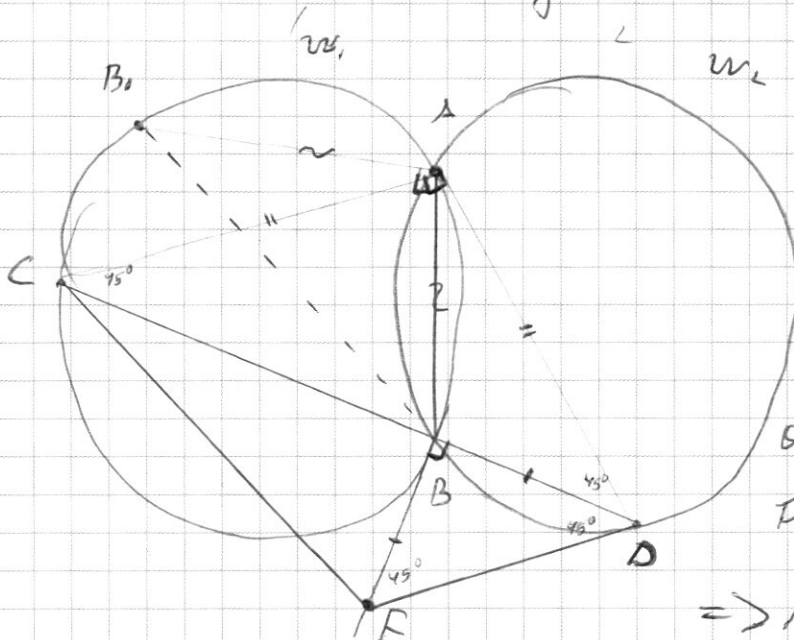
4) $6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2 \mid x+1 \mid +1 \geq 0$

$$(x-1) \mid (x-1)^2 - 5x^3 \mid 46x^4 \geq 0$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^3 - 16\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) + 15 = (x+1)(x+1-5x^2) + 6x^4 \geq 0$$

$$1 + \sqrt{5} + 3\sqrt{3} + 39 - \frac{16 + 16\sqrt{3}}{2} + 25 = \frac{-24 - 6\sqrt{3} + 15}{15\sqrt{3}} = \frac{-24 - 48\sqrt{3}}{8} + 25$$

Задача №6



$$\angle ACB = \angle ADB = 45^\circ, \text{ т.к.}$$

они опираются на
равные хорды (AB) в
одинаковых окружностях. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow AC = AD \text{ (по тр. кат.)}$$

$$\triangle CAD \sim \triangle FBD \text{ (по 2м углам)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{FD}{CD} \Rightarrow \triangle DAB \sim \triangle DCF \text{ по 2м сторонам и}$$

углу между ними, причем (попр. подобие $\frac{FD}{BD} = \sqrt{2}$)

То есть: $CF = AB \cdot \sqrt{2}$, которое по условию на 90° откл. А

Рассмотрим R_A . w_2 , очевидно, перейдет в w_1 , все

их радиусы равны и $AC = AD$. Пусть $B_1 \rightarrow B_2$.

$B_1 \in w_1$, т.к. $w_2 \rightarrow w_1$, а $B \in w_2$. $\angle B_1AB = 90^\circ$ и
и $AB_1 = AB$.

B_1B - диаметр w_1 , т.к. $\angle B_1AB = 90^\circ \Rightarrow B_1B = 14$.

$$AB = \frac{B_1B}{\sqrt{2}} = \frac{14}{\sqrt{2}}$$

$$CF = AB \cdot \sqrt{2} = B_1B = 14$$

Ответ: 14.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$-6^3 - 6b + 4 = 0$
 $+ 6(6^3 + 6) = 14$

$-2bx + 6y = 0$
 $3bx - 6^2 y = 1 = 0$
 $8^2 - 3b + 2 = 0$

$(1, 0)$
 $(\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}, \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2})$
 $\alpha b - 6^2 = 6$

$(4\sqrt{3}, 0)$
 $(\cos 120^\circ \cdot 4\sqrt{3}, \sin 120^\circ \cdot 4\sqrt{3})$
 $3ab = 2(\alpha - b)$
 $\alpha - b = \frac{2}{3}$

$2(\alpha - b)x + 6y = \alpha$
 $3bx + (\alpha - b)6y = 1$

$\frac{4}{3\sqrt{3}} = \frac{12 - 4\sqrt{3}}{-24} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{3}$
 $b^2 + 3b - 2 = 0$
 $\alpha - b = 1$
 $\frac{2}{\alpha} = 3b$
 $b = \frac{2}{3\alpha}$
 $\alpha - \frac{2}{3\alpha} = 1$
 $3\alpha^2 - 2 = 3\alpha$
 $3\alpha^2 - 3\alpha - 2 = 0$
 $D = 33$

$3ab = 2(\alpha - b)$
 $\alpha - b = \frac{2}{3}$
 $3ab = 2$
 $\alpha - b = 1$

$b = \frac{2}{3\alpha}$
 $\alpha - \frac{2}{3\alpha} = 1$
 $3\alpha^2 - 2 = 3\alpha$
 $3\alpha^2 - 3\alpha - 2 = 0$
 $D = 33$

$$6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1 \geq 0 \quad x \geq -1$$

$$(x-1)(6x^3 + x^2 - 3x - 1) = 0$$

$$-\frac{1}{2}$$

$$-0,25 + 0,25 + 1,5 - 1$$

$$(x-1)(2x+1)\left(3x^2 - x - 1\right) = 0$$

$$p=13$$

$$6x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 2x + 1 = 0 \quad x \leq -1$$

$$6 - 5 + 6 - 2 + 1$$

$$4 > \sqrt{13} > 3,5$$

$$\frac{5}{6} > \frac{1+\sqrt{13}}{6} > \frac{4,5}{60} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{5}{12} - \frac{25}{60} > \frac{1-\sqrt{13}}{6} > -\frac{1}{2}$$

$$x+y+5$$

$$x+y+5$$

$$2x+1 \leq 0$$

$$2x \leq 0$$

2)