

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра-
боты без вложенного задания не проверяются.

- ✕ 1. [4 балла] Вокруг птичьей кормушки в одной плоскости с ней по двум окружностям с одинаковой скоростью летают синица и снегирь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой кормушка (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Синица движется по часовой стрелке, а снегирь – против. В начальный момент времени синица и снегирь находятся в точках $M_0(\sqrt{3}; 3)$ и $N_0(6; -2\sqrt{3})$ соответственно. Определите координаты всех положений снегиря, в которых расстояние между птицами будет кратчайшим.

- ✕ 2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a, \\ 3bx + (a-b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$.
- ✕ 4. [6 баллов] Решите неравенство $6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2|x+1| + 1 \geq 0$.
- ✕ 5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 7000. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 7 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10, \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Найдём радиусы окружностей пику.

$$R_{M_0} = \sqrt{x_{M_0}^2 + y_{M_0}^2} = \sqrt{(3)^2 + 3^2} = \sqrt{12}$$

проекция
радиус вектора из т.О.

$$R_{N_0} = \sqrt{x_{N_0}^2 + y_{N_0}^2} = \sqrt{6^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{48}$$

Угловая скорость полёта ω отн-но точки О:

$$\omega_{M_0} = \frac{v}{\sqrt{12}}$$

$$\omega_{N_0} = \frac{v}{\sqrt{48}}$$

линейная скорость относительно нач. угл.
их полёта. $\omega_d = \omega_{M_0} + \omega_{N_0} = 3 \frac{v}{\sqrt{48}}$

Кратчайшее расстояние будет, когда радиус-векторы

пику наложатся друг на друга.

$$\text{Найдём угол } \alpha. \alpha = \beta + \delta = \arctan\left(\frac{y_{M_0}}{x_{M_0}}\right) + \arctan\left(\frac{-y_{N_0}}{x_{N_0}}\right) =$$

$$= \arctan\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right) + \arctan\left(\frac{+2\sqrt{3}}{6}\right) = \arctan(\sqrt{3}) + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) =$$

продолжение на шесте π

$$= 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ. \text{ Это угол } 270^\circ \text{ по мед. обходу.}$$

Когда они в медующий раз встретятся, то угол M/U или
изменится на 270° . Скорость смирн втрое меньше относитель-
ной скорости. Значит. он пройдет угол 90° . Его коорди-
наты станут: $(2\sqrt{3}; 6)$ (поменяются местами и
у одной из координат знак)

Следующее сближение будет при относительном повороте 360° .

Смирн сместится на 120° . Его коорд. станут: $(-\sqrt{48}; 0)$.

И ещё через 120° : $(2\sqrt{3}; -6)$. Далее они зайдутся, т.к. $360^\circ:120^\circ$

Ответ: $(2\sqrt{3}; 6); (-\sqrt{48}; 0); (2\sqrt{3}; -6)$

№ 2.

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a & (1) \\ 3bx + (a-b)y = 1 & (2) \end{cases}$$

Бесконечное множество решений будет у системы при наличии хотя бы одного значения у одной из переменных и бесконечного множества значений у другой.

(1): $y = \frac{a - 2(a-b)x}{6}$ (3) - это означает, что если x принимает беск. мн-во значений, то и y тоже и наоборот.

Значит найдем такие a и b , что x примет бесконечное мн-во значений, тогда и y будет тоже иметь беск. мн-во значений.

(3) $\rightarrow$ (2): $3bx + \frac{a - 2(a-b)x}{6} \cdot b = 1$

$$3bx + \frac{(a-b)ab}{6} - \frac{(a-b)^2 bx}{3} = 1$$

$$x \left(3b - \frac{(a-b)^2 b}{3} \right) = 1 + \frac{(b-a)ab}{6}$$

x примет беск. мн-во значений при:

$$\begin{cases} 3b - \frac{(a-b)^2 b}{3} = 0 & (4) \\ 1 + \frac{(b-a)ab}{6} = 0 & (5) \end{cases}$$

(4): $9b = (a-b)^2 b$

$9 = (a-b)^2 ; b \neq 0$

$a-b = \pm 3$

$b = \begin{cases} a+3 \\ a-3 \end{cases}$

$\left(\begin{array}{l} b=0: (4): 0=0 - \text{верно} \\ (5): 1 \neq 0 - \text{не верно} \end{array} \right) \Rightarrow b \neq 0 \text{ точно}$

(5): $-6 = (b-a)ab$

$-6 = 3a \cdot (a+3) \quad -6 = -3 \cdot a \cdot (a-3)$

$3a^2 + 9a + 6 = 0 \quad | :3 \quad -3a^2 + 9a + 6 = 0 \quad | :3$
 $a^2 + 3a + 2 = 0 \quad a^2 - 3a - 2 = 0$

Соответствующие

$a = \begin{cases} -1 \\ -2 \\ \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases} \quad b = \begin{cases} 2 \\ 1 \\ \frac{a \pm \sqrt{17}}{2} - 3 \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases}, \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases}, \begin{cases} a=\frac{3+\sqrt{17}}{2} \\ b=\frac{3+\sqrt{17}}{2} \end{cases}, \begin{cases} a=\frac{3-\sqrt{17}}{2} \\ b=\frac{3-\sqrt{17}}{2} \end{cases}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

-5

54

№7

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+6| \leq 10 \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 69 \end{cases} \quad \text{②}$$

$$\text{②: } x^2 + y^2 - 10|x| - 24|y| = 0$$

$$x^2 - 10|x| = 24|y| - y^2$$

~~хххх~~

$$|x|(|x| - 10) = -|y|(|y| - 24)$$

$$x \in [-10, 10]$$

$$x \in [-10, 10]$$

$$y \in (-\infty; -24] \cup [24; +\infty)$$

$$y \in [-24, 24]$$

$$x=y=0$$

$$2y = 9$$

$$y = -4,5$$

$$x = -0,5$$

$$-15 \quad -5$$

$$-10 \quad 0$$

$$|y| \leq 5$$

$$(x+5)(x-2)$$

$$\sqrt{x^2 - 16x + 25} =$$

$$\begin{cases} x+y = -15 \\ x-y = -5 \end{cases}$$

$$y = -5$$

$$x = -10$$

№1 (продолжение).

До сближения остаётся угол 90° . То есть при относительном изменении угла м/у ~~пр~~ ^(навстречу друг другу) лучами на 90° , центр сдвинется на угол 30° , т.е. окажется на ОХ. Первая пара координат: $(\sqrt{48} = 4\sqrt{3}; 0)$. Следующее сближение будет при относительном ~~рав~~ перемещении на 360° . Значит центр пролетит 120° . Его новые координаты: $(-2\sqrt{3}; 6)$. Ещё при сдвиге на 120° координаты станут: $(-2\sqrt{3}; -6)$.

№ N'_0 - это позиция. Далее координаты записываются, т.к. при сближении.

$360^\circ : 120^\circ = 3$ (за 3 сближ. центр делает 1 круг)

Ответ: $(4\sqrt{3}; 0); (-2\sqrt{3}; 6); (-2\sqrt{3}; -6)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.

$$6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2|x+1| + 1 \geq 0$$

$$(x^2 + 2x + 1) - 5x^2|x+1| + 6x^4 \geq 0$$

$$(x+1)^2 - 5x^2|x+1| + 6x^4 \geq 0$$

$$|x+1|^2 - 5x^2|x+1| + 6x^4 \geq 0$$

$$|x+1|^2 - 5x^2|x+1| + 6,25x^4 - 0,25x^4 \geq 0$$

$$(|x+1| - 2,5x^2)^2 - 0,25x^4 \geq 0$$

$$||x+1| - 2,5x^2|^2 \geq 0,25x^4 \quad \text{извлечём корень из обеих частей}$$

(0,5x^2)^2 т.к. $||x+1| - 2,5x^2| \geq 0$ и $0,5x^2 \geq 0$

$$||x+1| - 2,5x^2| \geq 0,5x^2$$

II

$$\begin{cases} |x+1| - 2,5x^2 \geq 0,5x^2 \\ 2,5x^2 - |x+1| \geq 0,5x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x+1| \geq 3x^2 \\ |x+1| \leq 2x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x+1 \geq 3x^2 \\ -x-1 \geq 3x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - x - 1 \leq 0 \quad x \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{6}, \frac{1+\sqrt{13}}{6}\right) \\ 3x^2 + x + 1 \leq 0 \quad D < 0; \quad \emptyset \quad (3 > 0) \end{cases} \\ \begin{cases} x+1 \leq 2x^2 \\ -x-1 \leq 2x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\frac{1}{2}] \\ 2x^2 + x + 1 \geq 0 \quad U(1; +\infty) \end{cases} \end{cases}$$

глас. $D < 0$ $\Rightarrow$ выполн. при всех x . $(2 > 0)$ $\Rightarrow$ коэф. при x .

$$\begin{cases} x \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{6}, \frac{1+\sqrt{13}}{6}\right) \\ x \in (-\infty; -\frac{1}{2}] \cup (1; +\infty) \end{cases}$$

Ответ: $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}] \cup \left(\frac{1-\sqrt{13}}{6}, \frac{1+\sqrt{13}}{6}\right) \cup (1; +\infty)$

№5.

Запишем 7000, как произведение простых множителей:

$$7000 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 7.$$

$$2 \cdot 5 = 10 > 9 \text{ (т.е. не цифра)}$$

$$2 \cdot 7 = 14 > 9$$

$$5 \cdot 7 = 35 > 9$$

↓
Эти множители должны стоять по отдельной цифре и т.к.

~~все~~ простых множит. - 7, то нужна еще цифра 1.

Наши числа состоят из цифр: 1, 2, 2, 2, 5, 5, 5, 7

Способов выбрать ~~какую~~ цифру на 1-е место: 8, на II - 7,

III - 6 ... VIII - 1.

Значит, всего таких чисел (без учета перестановок 2 и 5)

8!. Кол-во перестановок 2 - 3!, 5 - тоже 3!
(их 3 штуки)

Значит, всего чисел:

$$\frac{8!}{(3!)^2} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 = 56 \cdot 20 = 1120$$

~~Итого~~

ОТВЕТ: 1120

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{3} \quad \text{корни: } 2; -5$$

$$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$$

$$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = (x+5)(x-2)$$

$$\sqrt{x^3-16x+25} = 2x-4; \quad x+5 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -5 \quad (1)$$

возводим в квадрат

$$x^3-16x+25 = (2x-4)^2; \quad x^3-16x+25 \geq 0 \quad (2)$$

$$x^3-4x^2-16x+16x+25-16=0$$

$$x^3-4x^2+9=0$$

$$x^2(x-4) = -9$$

$$x^2 > 0 \Rightarrow \text{т.к. } -9 < 0, \text{ то } x-4 < 0.$$

$$\begin{matrix} 4 \\ x < 4 \end{matrix}$$

~~На промежутке $x \in [0; 4]$ функция~~

Обозначим $f(x) = x^3 - 4x^2 + 9$

$$f'(x) = 3x^2 - 8x$$

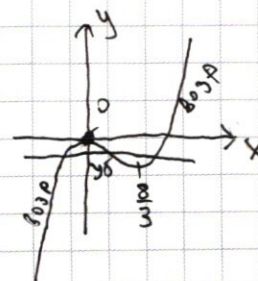
Найдем экстремумы $f(x)$ и нарисуем её график схематично:

$$f'(x) = 0 \text{ при } x = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

$$f\left(\frac{8}{3}\right) = -\frac{256}{27} < -9. \text{ Поэтому корней у уравнения } x = 3.$$

Подберём их: $x = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{7}{3} \\ 3 \end{bmatrix}$ и проверим с условиями выше (1) и (2).

Окончательно: $x = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{7}{3} \\ 3 \end{bmatrix}$ и ещё 1.



№7.

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10 & ① \end{cases}$$

$$\begin{cases} (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169 & ② \end{cases}$$

~~$$\begin{aligned} & |x|^2 - 10|x| + |y|^2 - 24|y| = 0 \\ & |x|(|x|-10) = -|y|(|y|-24) \end{aligned}$$~~

$$2: (|x|-5)^2 \leq 169$$

$$\downarrow$$

$$||x|-5| \leq 13$$

$$\downarrow$$

$$|x| \in [0; 18]$$

$$(|y|-12)^2 \leq 169$$

$$||y|-12| \leq 13$$

$$|y| \in [0; 25]$$

При этих значениях одной переменной значение второй
только найдется. То есть из этого следует, что

~~$$\begin{cases} |x| \in [0; 18] \\ |y| \in [0; 25] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [-18; 18] \\ y \in [-25; 25] \end{cases}$$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

[illegible]

abcd e f g h

Один из учаср - 7

$$\Rightarrow 2.5 \cdot 2.5 \cdot 2.5 \cdot 1.7$$
~~10.75-25~~

$$\text{Ans } \frac{8!}{3 \times 3 \times 3} = \frac{40320}{27} = 1493.33$$

N3.

$$y = 0:$$

$$5 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = -10$$

$$3 \cdot 10$$

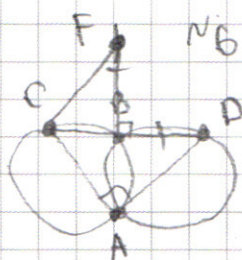
$$x=2 \quad 8-32+25$$

max 2 корня.

$$x^3 - 2x^2 + x - 2x^2 - x + 9$$

$$x^2 \cdot 1 + 2x \cdot (x-4) = 0$$

$$x^2 + 3x^2 - 8x = 0$$



$$\frac{1}{3} 3x^2 - 16 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

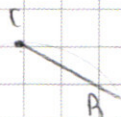
AB 57

$$27 - 48 + 25 = 52$$

$x=0$

$$x = 83$$

$$\frac{64}{9} \left(-\frac{4}{3} \right) = -\frac{256}{27}$$



$$(x+1)^2 + 6x^4 - 5x^2(x+1)$$

$$(x+1)^2 - 5x^2(x+1) + 6x^4 \geq 0$$

$$(3-2x) \sqrt{3+2x}$$

$$(x+1)^2 - 5x^2(x+1) + 6,25x^4 - 0,25x^4 \geq 0$$

$$(1x+1) - 2,5x^2)^2 - 0,25x^4 \geq 0$$

$$|x+1| - 2,5x^2 \geq 0,5x^2$$

$$|x+1| - 2,5x^2 \geq 0,5x^2 \quad (1)$$

$$2,5x^2 - |x+1| \stackrel{?}{\geq} 0,5x^2 \quad (2) \quad 1+13$$

⑨: $\begin{cases} |x+1| \geq 3x^2 \\ |x+1| \leq 2x^2 \end{cases}$

$$\begin{cases} x+1 \geq 3x^2 \\ x-1 \leq 3x^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{3x^2 - x - 1} \leq 0 \quad x \in \left(\frac{1 - \sqrt{13}}{6}, \frac{1 + \sqrt{13}}{6} \right)$$

$$\begin{cases} x+1 \leq 2x^2 \\ -x-1 \leq 2x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - x - 1 \geq 0 & x \in [-2, \frac{1}{2}) \cup \\ 2x^2 + x + 1 \geq 0 & -\infty, 1+3i \end{cases}$$