

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Вокруг птичьей кормушки в одной плоскости с ней по двум окружностям с одинаковой скоростью летают синица и снегирь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой кормушка (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Синица движется по часовой стрелке, а снегирь – против. В начальный момент времени синица и снегирь находятся в точках $M_0(\sqrt{3}; 3)$ и $N_0(6; -2\sqrt{3})$ соответственно. Определите координаты всех положений снегиря, в которых расстояние между птицами будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a, \\ 3bx + (a-b)y = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2|x+1| + 1 \geq 0$.

5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 7000. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

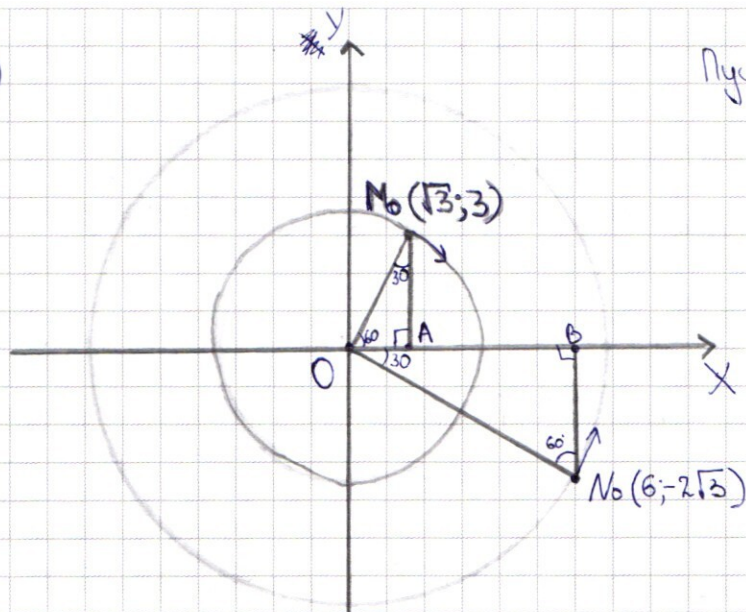
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 7 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10, \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1)



Пусть имеем плоскость XOY;

$$M_0(\sqrt{3}; 3); N_0(6; -2\sqrt{3})$$

A - проекция M_0 на OX;

B - проекция N_0 на OX.

① Проведен радиусы OM_0 и ON_0 . По г. Пифагора:

$$OM_0 = \sqrt{OA^2 + AM_0^2} = \sqrt{3 + 9} = 2\sqrt{3}$$

$$ON_0 = \sqrt{OB^2 + BN_0^2} = \sqrt{36 + 12} = 4\sqrt{3}$$

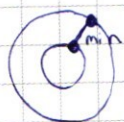
② $\triangle OM_0A \sim \triangle N_0OB$ по 3 сторонам ($\frac{OM_0}{ON_0} = \frac{OA}{OB} = \frac{M_0A}{N_0B} = \frac{1}{2}$)

③ $\angle OM_0A = 30^\circ$, т.к. $\frac{OA}{OM_0} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$ (катет против $\angle 30^\circ$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle M_0OA = 60^\circ$ (по т.о. $\angle$ в $\triangle$ -х) $\Rightarrow \angle BON_0 = 30^\circ$; $\angle ON_0B = 60^\circ$ (из п.2)

④ Расстояние между движущимися крайностями, когда они находятся на одной прямой и движутся по 1 стороне от $\perp$ к этой через O.

П.е.:



⑤ П.к. $OM_0 = \frac{1}{2} ON_0$, то если синуса пролетает $\lambda \cdot 2^\circ/\tau$, то косинус пролетает λ°/τ (где τ - единица времени).

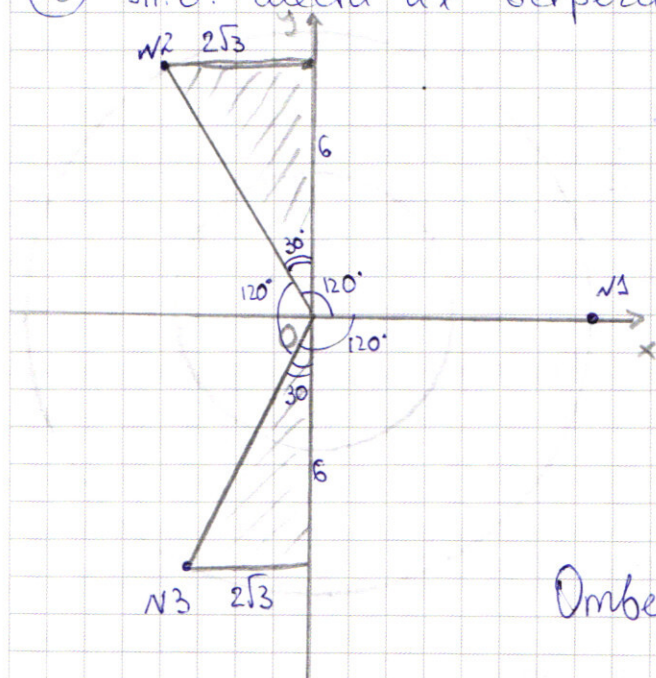
⑥ В нач. момент времени расстояние (угловое) между движущимися - 90° ($\angle M_0OA + \angle BON_0 = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$)

Тогда если t_1 - время первой встречи (от начального момента),
то: $t_1 = \frac{90}{\frac{\alpha}{2} + \frac{2\alpha}{2}} = \frac{30\tau}{\alpha}$

В момент времени t_1 ~~скажем~~ ^{скажем} окажется в г. $(4\sqrt{3}; 0)$,
т.к. пролетит 30° против час. стр: $\frac{30\tau}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\tau} = 30^\circ$

⑦ Далее между скамьей и скамьей - 360° и после
каждой встречи скамья будет пролетать $\frac{360}{\frac{\alpha}{2} + \frac{2\alpha}{2}} \cdot \frac{\alpha}{\tau} = 120^\circ$

⑧ П.о. места их встречи:



$N1: (4\sqrt{3}; 0)$

$N2: (-2\sqrt{3}; 6)$

$N3: (-2\sqrt{3}; -6)$

(Большее значение
голка лет т.к.
пролетит 120° скамья
будет находиться в
старшей точке)

т.к. заданных Δ -ки
равны ΔON_2 (по гипотенузе и ост. $\angle$)

Ответ: $(4\sqrt{3}; 0); (-2\sqrt{3}; 6); (-2\sqrt{3}; -6)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3) \quad \frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$$

$$\text{ОДЗ: } x^3-16x+25 \geq 0$$

$$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = (x+5)(x-2)$$

$$(1) \quad \begin{cases} x = -5 \\ \frac{1}{2}\sqrt{x^3-16x+25} = x-2 \end{cases}$$

П.к. $x = -5$ не принадлежит ОДЗ, то:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{x^3-16x+25} = x-2$$

$$\sqrt{x^3-16x+25} = 2x-4 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-16x+25 = (2x-4)^2 \\ 2x-4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3-16x+25 = 4x^2-16x+16 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3-4x^2+9 = 0 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-3)(x^2-x-3) = 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x^2-x-3 = 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \\ x_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \\ x \geq 2 \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{П.к. } \frac{1-\sqrt{13}}{2} < 2, \text{ то } (2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \\ x \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{П.о. имеем: } \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \end{cases},$$

$$\text{но } \frac{1+\sqrt{13}}{2} \notin \text{ОДЗ} \Rightarrow x = 3.$$

Ответ: 3

$$5) \quad 7000 = 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

Пятерки и семерки не могут входить число, состоящее из 1 цифры и являющиеся составными, как множитель
 $\Rightarrow$ пятёрки и семерки - это цифры восьмизначного числа в десятичной записи.

П.к. произведение цифр равно 7000, то кроме 7, 5 и 2 у цифр составных восьмизнач. числа других делителей нет.

П.о. возможны варианты цифр:

① $7, 5, 5, 5, 2, 2, 2, 1.$

~~кол-во способов: $N_1 = \text{кол-во способов выбрать } (N_5) \cdot \dots \cdot (N_1)$~~

Пусть кол-во способов составить 8-ми зп. число из данных цифр - N ; кол-во способов выбрать разряд для цифры k - N_k . Тогда:

$$N = N_5 \cdot N_2 \cdot N_7 \cdot N_1 = C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1 = \frac{8!}{3!5!} \cdot \frac{5!}{3!2!} \cdot 2 \cdot 1 = 1120 \text{ сп.}$$

② $7, 5, 5, 5, 2, 4, 1, 1.$

$$N = N_5 \cdot N_1 \cdot N_2 \cdot N_4 \cdot N_7 = C_8^3 \cdot C_5^2 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1 = \frac{8!}{3!5!} \cdot \frac{5!}{2!3!} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3360 \text{ сп.}$$

③ $7, 5, 5, 5, 8, 1, 1, 1.$

$$N = N_5 \cdot N_1 \cdot N_8 \cdot N_7 = C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1 = \frac{8!}{5!3!} \cdot \frac{5!}{2!3!} \cdot 2 \cdot 1 = 1120 \text{ сп.}$$

Общее кол-во способов = кол-во заданных чисел = $1120 + 3360 + 1120 = 5600$

Ответ: 5600 чисел.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

В) Пусть $M \in AB \cap \omega_2$; $K \in AB \cap \omega_1$ (см. рис)

Дано: $\text{окр } \omega_1 = \omega_2$

$\omega_1(O_1, r=7)$

$\omega_2(O_2, r=7)$

$C \in \omega_1; D \in \omega_2$

~~См. рис~~

$\omega_1 \cap \omega_2 = \{A, B\}$

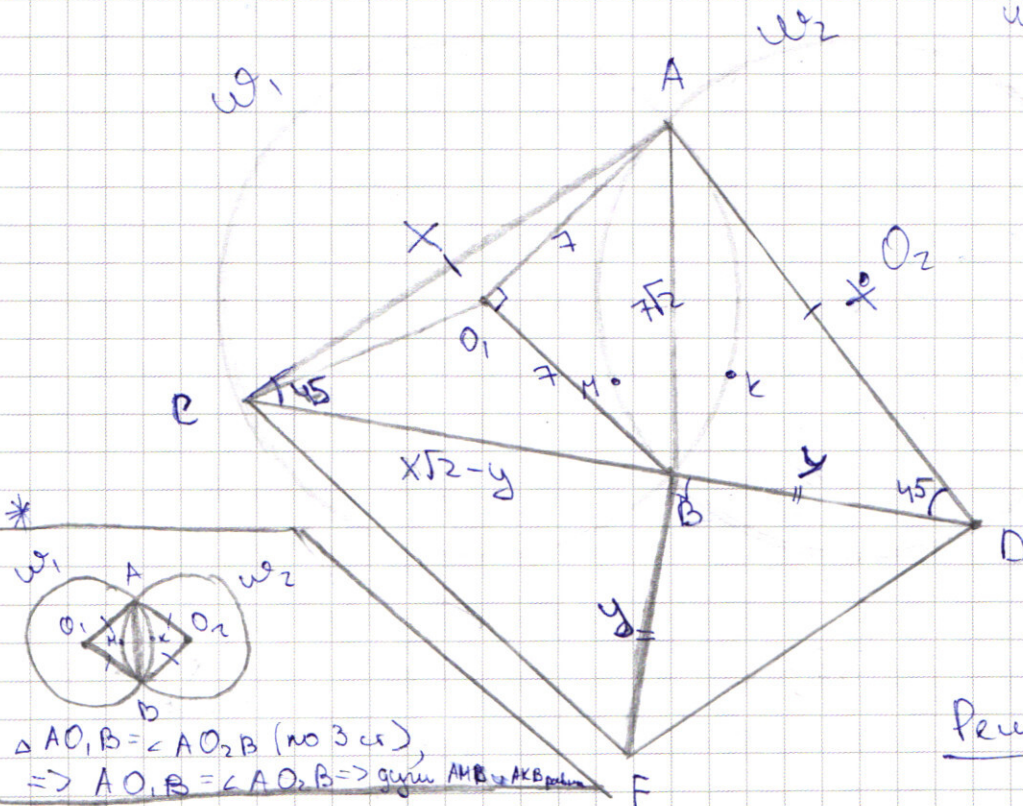
$B \in CD$

$BF \perp CD$

$BF = BD$

Найти: CF ?

Решение:



$\Delta AO_1B = \Delta AO_2B$ (по 3 к),
 $\Rightarrow \angle AO_1B = \angle AO_2B \Rightarrow \text{дуги } \overset{\frown}{AMB} = \overset{\frown}{AKB}$

1) ~~Решение~~ Заметим, что т.к. $\omega_1 = \omega_2$, то $\angle AMB = \angle AKB =$
 $= \angle ACB = \angle ADB$, как опр. на равные дуги, равных окр.

В т.к. $B \in ACD$, $\angle A = 90^\circ$, $\angle C = \angle D$, то $\angle C = \angle D = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$

2) $AC = AD$, т.к. $\angle ACD = \angle ADC$. Пусть $AC = AD = x$.

3) Пусть $BD = BF = y$.

4) П.к. $\angle CAD = 90^\circ$, $\angle A = 90^\circ$, то $CD = \sqrt{2} \cdot AC = x\sqrt{2}$

5) П.к. $\angle ADB = 45^\circ$, то $\angle AMB = 90^\circ$; $\angle AKB = \angle AMB = \angle AKB = 90^\circ$

6) $\angle AO_1B = \angle AKB = 90^\circ$; $O_1A = O_1B = r = 7 \Rightarrow AB = 7\sqrt{2}$

7) $CB = CD - BD = x\sqrt{2} - y$

8) В ΔCBF : ~~См. рис~~ $CF = \sqrt{CB^2 + BF^2}$, по т. Пифагора

$$6x^4 + x^2 + 2y - 5x^2 |x+1| + 1 \geq 0$$

1) $6x^4 + x^2 + 2y - 5x^2 - 5x^2 + 1 \geq 0$

$$6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2y$$

$$(x-1)(6x^3 + x^2)$$

$$(x-1)$$

$$\frac{6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2y + 1}{6x^4 - 6x^3} \Big| \frac{x-1}{6x^3 + x^2 - 3x - 1}$$

$$\frac{x^3 + 4x^2}{x^3 + x^2}$$

$$-3x^2 + 2y$$

$$-3x^2 + 3x$$

$$-x + 1$$

$$-1 =$$

$$x+y-5$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$CF = \sqrt{(x\sqrt{2} - y)^2 + y^2} = \sqrt{2x^2 + 2y^2 - 2 \cdot xy\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \frac{\sqrt{2}}{2}} = \\ = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos 45^\circ} \quad \textcircled{=}$$

9) Заметим, что $AB = \sqrt{AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cdot \cos \angle ADB}$, по
т. косинусов в $\triangle ADB$;

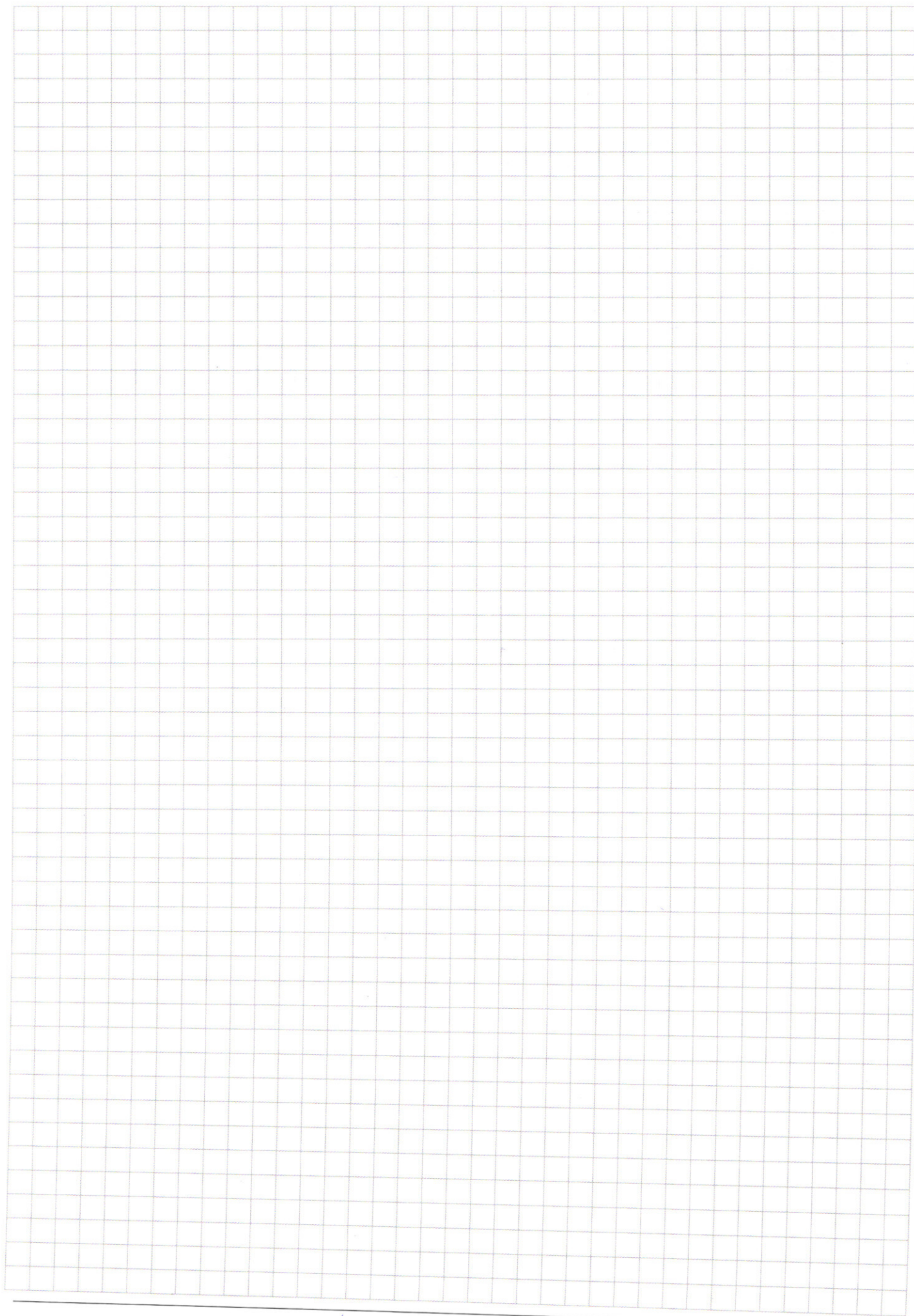
$$AB = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos 45^\circ}$$

Из п. 8 и п. 9: $\textcircled{=}$ $\sqrt{2} \cdot AB$, т.е.:

$$CF = AB\sqrt{2}$$

$$CF = 7\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 14$$

Ответ: 14

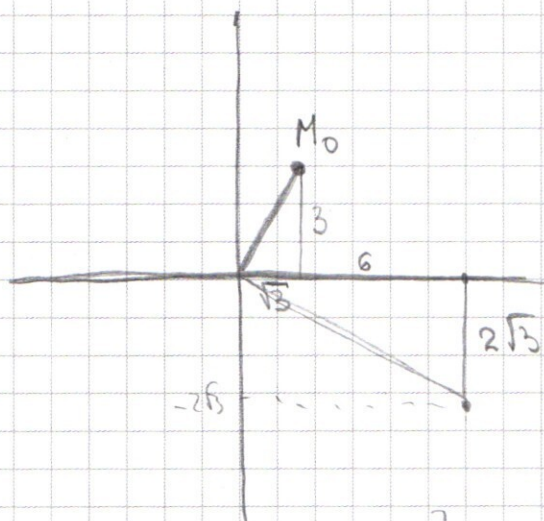


☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

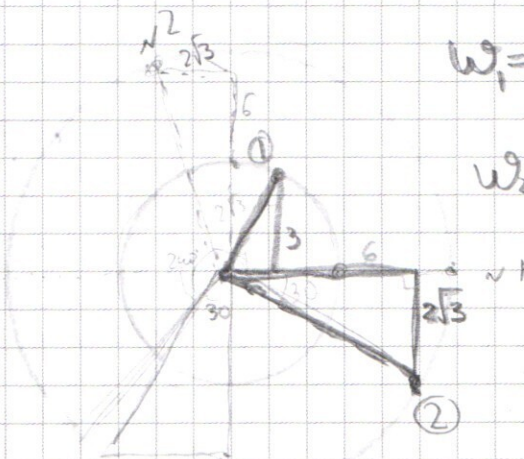
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.)



Синусоида M_0 $(13; 3)$ $r = \sqrt{3+9} = 2\sqrt{3}$
Синусоида N_0 $(6; -2\sqrt{3})$ $r = \sqrt{36+12} = 4\sqrt{3}$



$$\omega_1 = \frac{g}{R} = 2^\circ/\text{мин}$$

$$\omega_2 = \frac{g}{2R} = 1^\circ/\text{мин}$$

$$t_1 = \frac{90}{2^\circ + 1^\circ} =$$

$$t_1 = \frac{30}{1^\circ}$$

$$t_2 = \frac{360}{32}$$

$$t_2 = \frac{120}{2}$$

$$t_3 = \frac{360}{32}$$

$$t_3 = \frac{120}{2}$$

$$\textcircled{1}: 60^\circ$$

$$\textcircled{2}: 30^\circ$$

$$(4\sqrt{3}; 0)$$

$$\textcircled{1}: 240^\circ$$

$$\textcircled{2}: 120^\circ$$

$$(-2\sqrt{3}; 6)$$

$$\textcircled{1}: 240^\circ$$

$$\textcircled{2}: 120^\circ$$

$$(-2\sqrt{3}; -6)$$



черновик

☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$2(a-b)x + 6y = 0$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 16x + 25 \mid x+5 \\ x^3 + 5x^2 \\ \hline -5x^2 - 16x \\ -5x^2 - 25x \\ \hline 9x + 25 \\ 9x + 45 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$$

$$x^2+3x-10 =$$

$$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25}$$

$$(x+5)(x-2)$$

$$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = (x+5)(x-2)$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 16x + 25 \mid x-2 \\ x^3 - 2x^2 \\ \hline 2x^2 - 16x \\ 2x^2 - 4x \\ \hline -12x + 25 \\ -12x + 24 \\ \hline \end{array}$$

$$\textcircled{1} x = -5$$

$$\textcircled{2} \frac{1}{2}\sqrt{x^3-16x+25} = (x-2)$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{(x-2)(x^2+2x+12)+1} = (x-2)$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{(x^2-16)+25}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{(x-4)(x+4)+25}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 16x + 25 = x^3 - 4x^2 + 9 \mid x-3 \\ x^3 - 3x^2 \\ \hline -x^2 + 9 \\ -x^2 + 3x \\ \hline -3x + 9 \\ -3x + 9 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^3-16x+25} = 2x-4 \\ (2x-4)^2 = x^3-16x+25 \\ 2x-4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-3)(x^2-x-3) = 0 \\ x \geq 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2 - 16x + 16 = x^3 - 16x + 25 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} = 1+12=13$$

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

$$1+4=5$$

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$$

$$\begin{array}{l} 1+\sqrt{13}+4 \\ \sqrt{13}+3 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) 1. $\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$

ОДЗ: $x^3-16x+25 \geq 0$

2. $\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = (x+5)(x-2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ \frac{1}{2}\sqrt{x^3-16x+25} = x-2 \end{cases}$

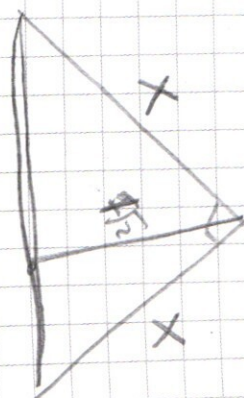
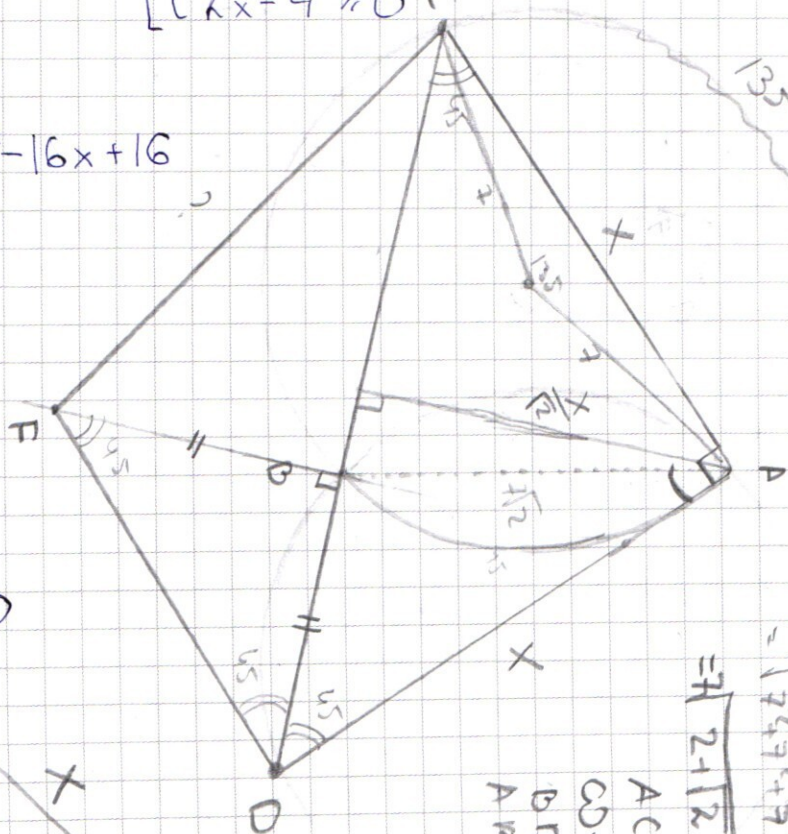
4. $\begin{cases} x = -5 \\ \sqrt{x^3-16x+25} = 2x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ \begin{cases} x^3-16x+25 = (2x-4)^2 \\ 2x-4 \geq 0 \end{cases} \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = -5 \\ \begin{cases} x^3-16x+25 = 4x^2-16x+16 \\ x \geq 2 \end{cases} \end{cases}$

6. $\begin{cases} x = -5 \\ \begin{cases} x^3-4x^2+9 = 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \end{cases}$

7. $\begin{cases} x = -5 \\ \begin{cases} (x-3)(x^2-x-3) = 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \end{cases}$

$\begin{cases} x = -5 \\ \begin{cases} x = 3 \\ x^2-x-3 = 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \end{cases}$



$$X = \sqrt{7^2 + 7^2 + 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \cos 45^\circ} = \sqrt{7^2 + 7^2 + 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2 \cdot 7^2 + 7^2 \sqrt{2}} = 7\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

AC = ?
BD = ?
AB = ?

cos 45

$$5) 7000 = 7 \cdot 2^3 \cdot 5^3$$

7, 5, 5, 5 - одесь есго

$$\begin{array}{r} 3 \\ 3 \\ 56 \\ \cdot 56 \\ \hline + 336 \\ 280 \\ \hline 3136 \\ \cdot 2 \\ \hline 6272 \end{array}$$

$$I \quad 7, 5, 5, 5, 2, 2, 2, 1$$

$$C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^1 = \frac{8! \cdot 5! \cdot 2}{3! \cdot 3! \cdot 5! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3} = 56^2 \cdot 2 = 6272$$

$$\begin{array}{r} 3136 \\ \cdot 2 \\ \hline 6272 \end{array}$$

$$II \quad 7, 5, 5, 5, 2, 4, 1, 1$$

$$C_8^3 \cdot C_4^2 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1 = \frac{8! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2!}{3! \cdot 3! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3} = 56 \cdot 56 \cdot 3 = 9408$$

$$III \quad 7, 5, 5, 5, 8, 1, 1, 1$$

$$C_8^3 \cdot C_8^3 \cdot C_2^1$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{6} = 56$$

$$\frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$$

$$\begin{array}{r} 560 \\ \cdot 2 \\ \hline 1120 \end{array}$$

$$56 \cdot 10 \cdot 6$$

$$\begin{array}{r} 2240 \\ + 3360 \\ \hline 5600 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 560 \\ \cdot 6 \\ \hline 3360 \end{array}$$

$$P_{qg} - P_{ng} = xqg - xz$$

$$\frac{xqg - 1}{P_{qg} - n} = \frac{P_{qg}}{xz}$$

$$xqg - 1 = (q - n) P_{qg}$$

$$P_{qg} - n = (q - n) xz$$

$$\cancel{0} = (x + q - n) xz$$

$$\left. \begin{array}{l} \Gamma = xq(q - n) + xqg \\ n = xq + x(q - n)z \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Gamma = P_{qg}(q - n) + xqg \\ n = P_{qg} + x(q - n)z \end{array} \right\}$$