

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Вокруг цветка в одной плоскости с ним по двум окружностям летают шмель и пчела. Скорость пчелы в полтора раза больше скорости шмеля. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой цветок (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Пчела движется по часовой стрелке, а шмель – против. В начальный момент времени пчела и шмель находятся в точках $M_0\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ и $N_0(2; 0)$ соответственно. Определите координаты всех положений шмеля, в которых расстояние между ним и пчелой будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все тройки целочисленных параметров a , b и c , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y + cz = c, \\ 3x + by + 4z = 4b \end{cases}$$

не имеет решений.

3. [4 балла] Решите неравенство $\left(\sqrt{x^3 - 10x + 7} + 1\right) \cdot |x^3 - 18x + 28| \leq 0$.

4. [5 баллов] Решите уравнение $2x^4 + x^2 - 6x - 3x^2|x - 3| + 9 = 0$.

5. [5 баллов] Бросили 70 игральных костей (кубиков с цифрами от 1 до 6 на гранях; вероятность выпадения каждой из граней одна и та же) и посчитали сумму выпавших чисел. Какая из вероятностей больше: того, что сумма больше 350, или того, что сумма не больше 140?

6. [4 балла] Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D , пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E , а также вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно $\frac{5}{4}$. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1 .

7. [7 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} a^2 - 2ax - 6y + x^2 + y^2 = 0, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = 25 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

П.к. точки M_0 и N_0 — точки на окружностях, описываемых мячом и шариком, с центром в $O(x)$ то можно найти радиусы:

$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow r_1 = 1$$

$$r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 = 2^2 + 0^2 = 4 \Rightarrow r_2 = 2$$

r_1 и r_2 — радиусы окружностей мяча и шарика соответственно.

Введем угловую систему координат и будем все измерять в градусах (0° лежит на Ox). Найдем н.к. координаты. Переведем скорости в угловую скорость:

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{v_1}{r_1} = \frac{1.5v_2}{1} = \frac{3}{2}v_2 \\ \omega_2 = \frac{v_2}{r_2} = \frac{v_2}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\frac{3}{2}v_2}{\frac{v_2}{2}} = 3 \Rightarrow \omega_1 = 3\omega_2$$

Найдем н.к. координаты в введенной системе:
 $\sin \varphi_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (п.к. $r_1 = 1$) $\Rightarrow \varphi_1 = 120^\circ$

$\sin \varphi_2 = 0$ (п.к. $r_2 = 2$, то координаты N_0 лежат на x)

$$\Rightarrow \varphi_2 = 0^\circ$$

Составим ур-е:

$$120^\circ - \omega_1 t = \omega_2 t$$

$$120^\circ - 3\omega_2 t = \omega_2 t$$

φ_1 и φ_2 — угловые перемещения
 $\varphi_1 = 3\omega_2 t$ и $\varphi_2 = \omega_2 t$

$30^\circ = \omega_2 t \Rightarrow$ координаты точки изменились на

$30^\circ \Rightarrow N_1(1; \sqrt{3})$ — в то же

Положение найдем, где произведена след. вектора:

$$360^\circ = \alpha_{1,2} + \alpha_{2,2}$$

$$360^\circ = 3\omega_2 t_2 + \omega_2 t_2 = 4\omega_2 t_2$$

$90^\circ = \omega_2 t_2 \Rightarrow$ каждая элементарная вектора будут произведены сдвигаются на 90° против часовой стрелки. $\Rightarrow N_2(-\sqrt{3}; 1)$ (по формуле тригоном. преобразования $\sin(\alpha + 90^\circ) = \cos \alpha$, $\cos(\alpha + 90^\circ) = -\sin \alpha$).

N_3 будет находиться диаметрально противоположно N_1 (т.е. сдвигается на 180°) $\Rightarrow$

$N_3(-1; -\sqrt{3})$. По аналогии будем N_2 и N_4 , получаем, что $N_4(\sqrt{3}; -1)$

Стоит отметить, что расстояния между ними и между минимально только если они лежат на одной радиусе.

$$\text{Ответ: } (1; \sqrt{3}), (-\sqrt{3}; 1), \cancel{(-\sqrt{3}; -1)}, (-1; -\sqrt{3}), (\sqrt{3}; -1)$$

~ 7

$$\begin{cases} x^2 - 2ax - by + x^2 + y^2 = 0 \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = 25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (y-3)^2 = 9 \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = 25 \end{cases}$$

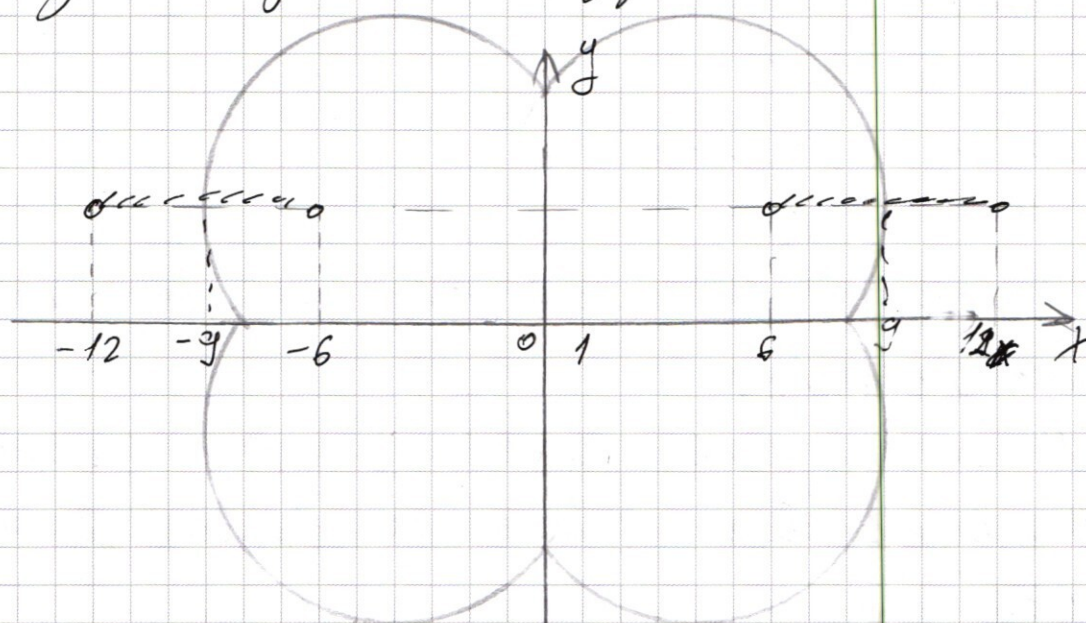
Будем находить во 2-ой ур-ии, получим:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$$

$$(|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = 25 \quad - \text{формулы окружности.}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Решите эту задачу графически:
Начертите график 1-ого ур-я, потом
отразите с учетом модуля



Центры 1-ой окр. находятся на $y=3$.

Если ^{1-ой} центр окр.-ти с $r=3$ выходящих
в $(-12; 3), (-6; 3), (6; 3), (12; 3)$, то они пересекаются
со 2-ой графиком только в одной точке.
Значит, центр по x может находиться в
 $(-12; -6)$ и $(6; 12) \Rightarrow a \in (-12; -6) \cup (6; 12)$.

Ответ: $a \in (-12; -6) \cup (6; 12)$.

~5

Рассмотрим ср. зн-е возможных сумм.
Возьмем для этого минимум и максимум:

$$S_{\min} = 70 \cdot 1 = 70$$

$$S_{\max} = 70 \cdot 6 = 420$$

$$S_{\text{ср}} = \frac{S_{\min} + S_{\max}}{2} = \frac{70 + 420}{2} = 245$$

Переведем каждую разность с 350 и 140, сравним их

$$350 - 145 = 245 - 140$$

$$105 = 105$$

Можно предположить, что эти события равновероятны.

В самом деле, чтобы $S \leq 140$ должны использоваться числа не больше 2, т. к.

$\frac{140}{70} = 2$, т. е. всего может участвовать 1 и 2, 3 не подходит.

Для $S > 350$ можно использовать 3 числа с кубиков, т. к. $\frac{350}{70} = 5 \Rightarrow$ т. е.

Хотя бы один число должно быть 6, ~~тогда~~ $351 = 68 \cdot 5 + 6$ если одну 5 заменить на 6, то получится $351 = 68 \cdot 5 + 6 + 4$, т. е. в самом деле, ~~то~~ в этом условии можно участвовать 3 числа, разброс чисел больше

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2} \leq \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{вероятность первого случая больше, равна}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Omben: Befestigung ^{nachher} ~~Furtill~~ ^y "yell" = 350 "

~ 2

$$\begin{cases} ax + 2y + cz = c \\ 3x + by + 4z = 4b \end{cases}$$

~~Chemische Gasfackel (Licht) ohne Öl~~

~~Жизнь человека зависит от него~~

Хотя две 2-мерные плоскости имеют
равное угловое координатное число не
имеют общих точек (лишь касаются), т.е.
быть параллельными в одной из 3-х мерных плоскостей.

1) Пусть $a=3, b=2$

Всего: фр-е, изданных:

$$c(z-f) = 4(z-2)$$

$$\frac{y}{c} = \frac{z-1}{z-2} \quad z-1 \neq z-2 \Rightarrow 0 \leq y$$

Чтобы не было решений у системы надо
чтобы координаты при z в левом и
правом частях были равны $\Rightarrow$ при $c = 4$ реш.

~~4002, #04, 2004 (3, 2, 4)~~

Умножив на все члены самое с а а в, полу-
чим, что $a \cdot b = 2 \cdot c = 4$. Получим, $c \neq ab$.

Answers: $a=3$; $b=2$; $c=4$.

~ 4

$$2x^4 + x^2 - 6x - 3x^4 - 3 + 9 = 0$$

$$2x^4 + (x-3)^2 - 3x^2/x - 3 + 9 = 0$$

$$2x^4 + |x-3|/|x-3| - 3x^2 = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(\sqrt{x^3 - 10x + 7} + 1) \cdot |x^3 - 10x + 28| \leq 0$$

~~$$x^3 - 10x + 7 \geq 0$$~~

~~$$x^3 - 10x + 28 = 0$$~~

~~$$28: 1, 2, 4, 7, 14, 28$$~~

П.к. $|x^3 - 10x + 28| \geq 0$, но $\sqrt{x^3 - 10x + 7} + 1 \leq 0$

$$x^3 - 10x + 7 - 1 \leq 0$$

$$x^3 - 10x + 6 \leq 0$$

~~$$x^3 - 8x^2 + 2x + 6 \leq 0$$~~

$$x^3 - 10x + 6 = (x+a)(x^2+bx+c) = x^3 + bx^2 + cx + ax^2 + abx + ac = x^3 + x^2(a+b) + x(ab+c) + ac$$

$$a+b=0$$

$$\begin{cases} a = -b \\ ab+c=10 \\ ac=6 \end{cases}$$

$$ac=6$$

$$-a^2 + c = 10$$

$$ac=6$$

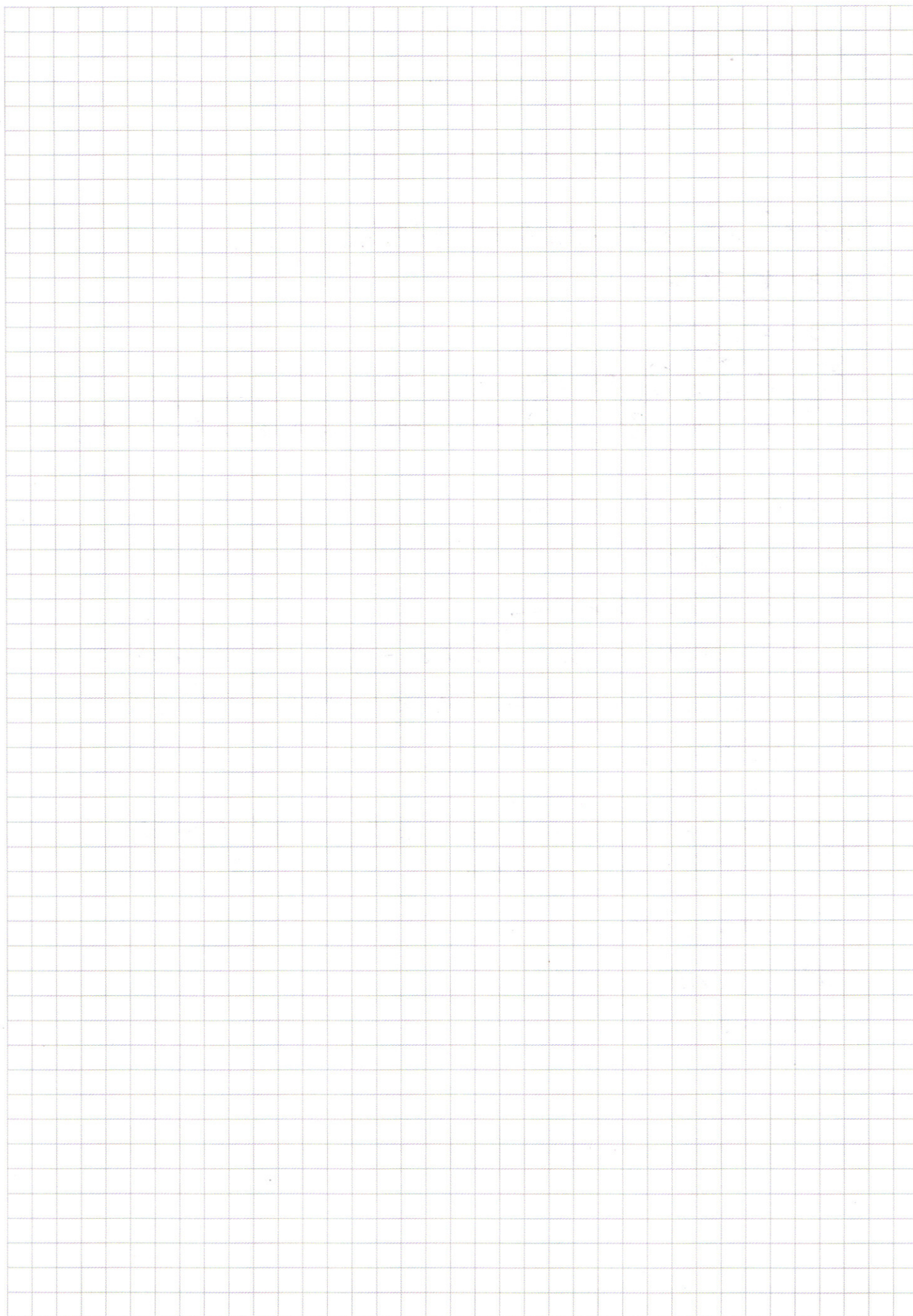
$$a^2 - c = 10$$

$$ac=6$$

$$x^3 - 10x + 28$$

$$a^2 - c = 18$$

$$ac = 28$$



☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2x^4 + x^2 - 6x - 3 + \frac{2}{x-3} + 9 = 0$$

$$2x^4 + \frac{2}{x-3} - 3x^2 + \frac{9}{x-3} = 0$$

$$x^4 - 9 = \frac{(x^2-9)(x^2+9)}{(x-3)(x+3)(x^2+9)}$$

$$x^2 + 2x + 1 = \frac{(x^2+1)^2}{x^2+2x+1}$$

$$4x^4 - 2x^2$$

$$2x^2 + \frac{1}{x-3} - \frac{3x^2}{x-3} = 0$$

~~$$3x^2 + 2x$$~~

$$2x^2 + \frac{1}{x-3} - \frac{3x^2}{x-3}$$

$$2x^4 + x^2 - 6x - 3x^3 + 9x^2 + 9 = 0$$

~~$$2x^2 + 10x^2 - 3x^3$$~~

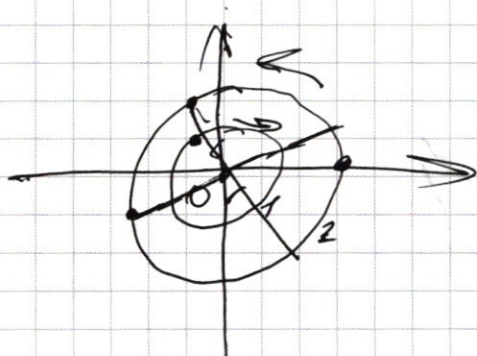
$$2x^2 - 3x^3 + 10x^2 - 6x + 9 = 2x^2 - 3x^3 + x^2 + 9x^2 - 6x + 9$$

$$\begin{cases} x^2 - 10x + 7 \geq 0 \\ -\sqrt{x^2 - 10x + 7} - 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2 - 10x + 7} (\sqrt{x^2 - 10x + 7} - 1) - 1 \geq 0$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$v_1 = 1.5 v_2 = 1.5 v$$

$$x_1^2 + y_1^2 = r_1^2$$

$$x_2^2 + y_2^2 = r_2^2$$

$$\frac{1}{4} + \frac{9}{4} = 1 \Rightarrow r_1 = 1$$

3) $\alpha = 210^\circ$
 $(-1, -\sqrt{3})$
 4) $\alpha = 300^\circ$
 $(1, -\sqrt{3})$

$$4 + 0 = 4 \Rightarrow r_2 = 2$$

$$\omega_1 = \frac{v_1}{r_1}$$

$$\omega_2 = \frac{v_2}{r_2} = \frac{v}{2} = \omega_1$$

$$\omega_1 = \frac{1.5v}{1} = 1.5v = \frac{3}{2}v$$

$$\sin(\alpha + 90^\circ) = \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + 90^\circ) = -\sin \alpha$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\frac{3}{2}v}{\frac{v}{2}} = 3 \Rightarrow \omega_1 = 3\omega_2$$

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

$$\omega_1 t = 3\omega_2 t$$

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 = \alpha_0 + \omega_1 t$$

$$\sin \alpha_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha_0 = 120^\circ$$

$$\sin \alpha_0 = 0 \Rightarrow \alpha_0 = 0$$

$$120^\circ + \omega_1 t = \alpha_2$$

$$120^\circ + \omega_1 t = \alpha_2$$

$$120^\circ - 3\omega_2 t = \omega_2 t$$

$$120^\circ = 4\omega_2 t$$

$$30^\circ = \omega_2 t$$

1) $(1, \sqrt{3})$

$$\alpha = 360^\circ + 30^\circ - \alpha_1 = 390^\circ + \alpha_2$$

$$390^\circ - 3\omega_2 t = 30^\circ$$

$$360^\circ - 3\omega_2 t = \omega_2 t$$

$$360^\circ = 4\omega_2 t$$

$$90^\circ = \omega_2 t$$

$$\alpha = 120^\circ$$

2) $(-\sqrt{3}, 1)$

$$\begin{cases} ax + by + cz = c \\ 3x + by + 4z = 4b \\ a = 3, b = 2 \end{cases}$$

$$1) (3; 2; 4); (3; 2; 3)$$

$$2) (3; 2; 4)$$

$$\begin{cases} 3x + 2y + cz = c \\ 3x + 2y + 4z = 8 \end{cases}$$

$$cz - 4z = c - 8$$

$$c(z-1) = 4(z-2)$$

$$\frac{c}{4} = \frac{z-1}{z-2}$$

$$\sqrt{x^2 - 10x + 4} + \sqrt{y^2 - 18y + 28} \leq 0$$

$$4z - 8 = z - 1$$

$$2z - 4 = z - 1$$

$$z = 3 - \text{верно}$$

$$z - 1 \neq z = 2 \text{ не верно}$$

$$2) a = 3, c = 4$$

$$2y - by = 4 - 4b$$

$$y(2-b) = 4(1-b)$$

$$y(b-2) = 4(b-1)$$

$$\frac{y}{4} = \frac{b-2}{b-1} \Rightarrow \frac{y}{4} = \frac{b-1}{b-2}$$

$$\begin{cases} 4x + 2y + 4z = 4 \\ 3x + 2y + 4z = 8 \end{cases}$$

$$x(3-a) = 4$$

$$350 - 240 = 110$$

$$\sum_{\max} = 110$$

$$\sum_{\min} = 110$$

$$110 : 11 = 10$$

$$S_2$$

$$\frac{410 + 10}{2} = 210$$

$$S_2 = 210$$

$$12.5 \times 5.6$$

$$\frac{140}{32}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

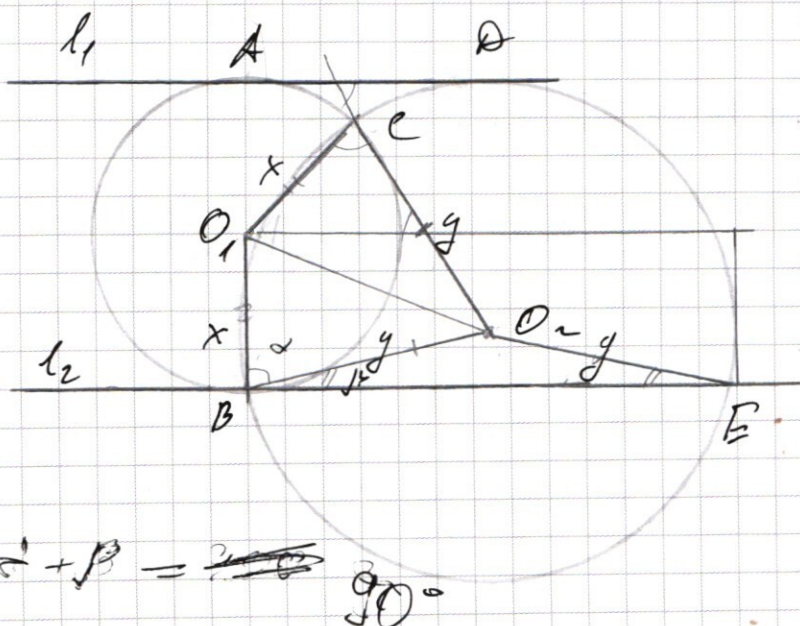
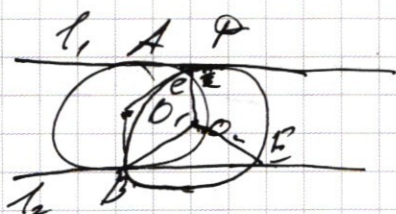
in 4

$$2x^4 + x^2 - 6x - 5 \quad x^2/x - 3/x + 9 = 0$$

$$2x^4 + (x-3)^2 - 5x^2 / (x-5) = 0$$

~~$2x^4 + x^3 - 9x^2 - 1 - 3x - 1x - 3 = 0$~~

$$2x^7 + \frac{1}{x-3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{3x^2}{-3x^2} \right) = 0$$



$$\frac{S_{\text{BOD, CO}_2}}{S_{\text{O}_2 \text{ DEF}}} \approx \frac{5}{4}$$

~~$$BO_2, CO_2 - \text{line.} \rightarrow$$

$$LO, BO_2 \angle CO_2, CO_2 \angle 90^\circ$$~~

$$1 + 1 = 2$$

$$\begin{cases} a^2 - 2ax - by + x^2 + y^2 = 0 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = 25 \quad \text{— экр } C R=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2 - 2ax + a^2) + (y^2 - by + \frac{b^2}{4}) - \frac{b^2}{4} = 0 \\ (x-a)^2 + (y-\frac{b}{2})^2 = \frac{b^2}{4} \end{cases} \quad \text{при } x \geq 0$$

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-3)^2 = 25 \end{cases}$$

$$\cancel{(x-4-x+a)} / \cancel{(x-4+x-a)} + \cancel{(y-3-y+3)} / \cancel{(y-3+y-3)} = 16$$

$$(a-4) / (2x-a-4) = 16$$

$$2ax - a^2 - 4x - 8x + 4a + 16 = 16$$

$$a^2 - 2ax + 8x = 0$$

$$2x(4-a) = -a^2$$

$$x = \frac{-a^2}{2(4-a)}$$

