

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в папку
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Муравей движется по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0(-1; \sqrt{3})$ и $N_0(2\sqrt{3}; 2)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a, \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6, \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3. $(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$. $x = ?$

$$x^2+5x+6 = (x+3)(x+2) = (x+3)\sqrt{x^3-x+10}$$

$$(x+3)(x+2-\sqrt{x^3-x+10}) = 0$$

1) $x = -3$

2) $x+2 = \sqrt{x^3-x+10}$

2.1) $x^3-x+10 \geq 0$

$$x^2+4x+4 = x^3-x+10$$

$$x^3-x+10-x^2-4x-4 = 0$$

$$x^3-x^2-5x+6 = 0$$

$$\begin{array}{r|l} x^3-x^2-5x+6 & x-2 \\ -x^3+2x^2 & \\ \hline x^2-5x & \\ -x^2+2x & \\ \hline -3x+6 & \\ -(-3x+6) & \\ \hline 0 & \end{array} \quad \begin{array}{l} x-2 \\ \hline x^2+x-3 \end{array}$$

$$(x-2)(x^2+x-3) = 0$$

$$x = 2;$$

$$x^2+x-3 = 0 \quad D = 1+4 \cdot 3 = 13$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

2.2) $x^3-x+10 < 0$ $\emptyset$

~~$$x^2+4x+4 = -x^3+x-10$$~~

~~$$x^3+x^2+4x+4-x+10 = x^3+x^2+3x+14 = 0$$~~

Ответ: $x = \{-3; 2; \frac{-1+\sqrt{13}}{2}; \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\}$

N4.

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$$

$x = ?$

1. $x \geq 1$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2(x-1) + 1 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + 2x^2 - 3x^3 \geq x^3$$

$$\cancel{2x^4} \cdot 2x^2(x^2 + 1 - 2x) \geq 2x^2(x-1)^2 \geq 0 \quad \text{т.к. } x \geq 1$$

$$2x^2 - 2x = 2x(x-1) \geq 0 \quad \text{т.к. } x \geq 1$$

$$2x^4 + 2x^2 - 3x^3 + 2x^2 - 2x + 1 \geq x^3 + 1 > 0 \Rightarrow \text{для всех } x \geq 1 \text{ это верно.}$$

2. $x < 1$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2(-x+1) + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \quad | \quad x+1 \\ \underline{2x^4 + 2x^3} \\ x^3 - 2x^2 \\ \underline{x^3 + x^2} \\ -3x^2 - 2x \\ \underline{-3x^2 - 3x} \\ x+1 \\ \underline{x+1} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^3 + x^2 - 3x + 1 \quad | \quad 2x-1 \\ \underline{2x^3 - x^2} \\ 2x^2 - 3x \\ \underline{2x^2 - x} \\ -2x + 1 \\ \underline{-2x + 1} \\ 0 \end{array}$$

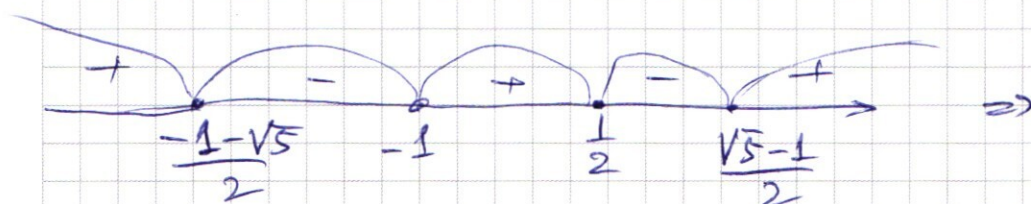
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №4.

$$2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = (x+1)(2x-1)(x^2+x-1) \geq 0$$

$$x^2 + x - 1 = 0 \quad \Delta = 1 + 4 \cdot 1 = 5$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow (x+1)(2x-1)\left(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \geq 0$$



$$x \in (-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}] \cup [-1; 1/2] \cup [\frac{\sqrt{5}-1}{2}; +\infty)$$

т.к. $x \geq 1 \Rightarrow x \in (-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}] \cup [-1; 1/2] \cup [\frac{\sqrt{5}-1}{2}; 1)$

Ответ: $x \in (-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}] \cup [-1; 1/2] \cup [\frac{\sqrt{5}-1}{2}; 1)$ и

$x \geq 1 \Rightarrow x \in (-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}] \cup [-1; 1/2] \cup [\frac{\sqrt{5}-1}{2}; +\infty).$

№5.

Пусть $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8$ — наше число. По условию $\prod_{i=1}^8 a_i = 1400$.

$$1400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \quad \text{т.к. } 0 \leq a_i \leq 9 \quad (a_1 \neq 0)$$

то 5 может занимать ровно одно место цифр нашего числа, (т.к. $5 \cdot 2 > 9$, $5 \cdot 7 > 9$)

аналогично для 7. — ровно 1 место цифр числа.

т.е. остается 5 мест, где произведение этих цифр в пяти местах ≥ 8 .

1. Когда двоек три и двойка единиц, $= 10$.

2	2	2	1	1	2	1	2	2	1	1	2	2	2	1
2	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2
2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	2	1	2	2

1 1 2 2 2

2. Когда одна двойка, 1-4. $C_5^2 = 10$,

3. Когда 1-8. $C_5^1 = 5$.

$\Sigma = 25$. А кол-во расстановок для 5, 5, ~~7~~

$$8 \cdot C_7^2 \cdot 25 = 8 \cdot \frac{7!}{5! \cdot 2!} \cdot 25 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{2} \cdot 25 =$$

$$= 8 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 25 = 4200.$$

ответ: 4200.

$$\text{№2. } \begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a \\ 4bx + (a+b)y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax + by = c \\ kx + my = n \end{cases} \quad (1)$$

система (1) имеет бесконечно решений

когда $\frac{a}{k} = \frac{b}{m} = \frac{c}{n} \Rightarrow$

$$\frac{3(a+b)}{4b} = \frac{12}{(a+b)b} = \frac{a}{1}$$

$b \neq 0$ иначе $\frac{0}{0} = 1$
из 2-го ур-я.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Продолжение №2.

Пусть $a=0 \Rightarrow \begin{cases} 3bx+12y=0 \\ 4bx+b^2y=1 \end{cases} \begin{matrix} :4 \\ :3 \end{matrix}$

$$y48-3b^2y=-3$$

$$y \cdot (48-3b^2) = -3 \quad 3y \cdot (b^2-16) = 3 \Rightarrow$$

$$y(b^2-16) = 1$$

для любых $b \neq \pm 4$ ($b \in \mathbb{R}$) - эта система

имеет единственное решение.

$$\Rightarrow a \neq 0$$

Пусть 1) $a+b=0 \Rightarrow \begin{cases} 12y=a \\ 4bx=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12y=-b \\ 4bx=1 \end{cases}$

$$4bx=1 \Rightarrow 4 \cdot bx \cdot 12y = 12y = -b$$

т.к. $b \neq 0$ $48xy = -1 \quad xy = -\frac{1}{48} \Rightarrow$

это уравнение имеет беск. много решений.

2) $a+b \neq 0, a \neq 0; b \neq 0,$

$$\frac{3(a+b)}{4b} = \frac{12}{(a+b)b} = a$$

$$3(a+b)^2 \cdot b = 48b$$

$$3(a+b) = 4ab$$

$$12 = (a+b)ab$$

$$a+b = \frac{12}{ab}$$

$$3(a+b) = \frac{36}{ab} = 4ab$$

$$a^2b^2 = 9$$

$$ab = \pm 3$$

1. $ab=3 \Rightarrow a+b=4 \Rightarrow \frac{3}{a} + a = 4 \quad 3+a^2=4a$

$$a^2-4a+3=0$$

$$(a-1)(a-3)=0$$

$$a=1 \Rightarrow b=3$$

$$a=3 \Rightarrow b=1.$$

$$2. \quad ab = -3 \Rightarrow a + b = -4 \Rightarrow \frac{-3}{a} + a = -4$$

$$-3 + a^2 = -4a \quad a^2 + 4a - 3 = 0 \quad D = 16 + 4 \cdot 3 = 28$$

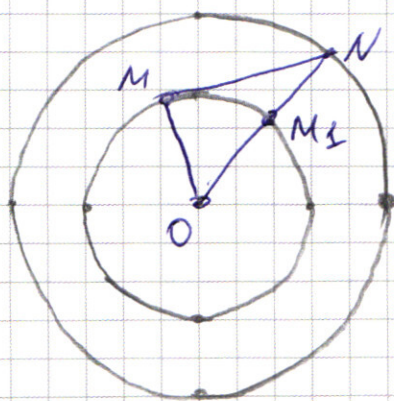
$$a = \frac{-4 \pm \sqrt{28}}{2} = -2 \pm \sqrt{7}$$

$$b = \frac{-3}{-2 \pm \sqrt{7}} = \frac{-3(-2 \mp \sqrt{7})}{-3} = -2 \mp \sqrt{7}$$

ответ: $(a, b) = (a, -a), (1, 3), (3, 1), \left(\frac{-2 + \sqrt{7}}{2 + \sqrt{7}}, \frac{-3}{2 + \sqrt{7}} \right),$
 $\left(\frac{-2 - \sqrt{7}}{-2 - \sqrt{7}}, \frac{-3}{-2 - \sqrt{7}} \right) = (-2 - \sqrt{7}, -2 + \sqrt{7})$

N1.

минимальное расстояние между муравьем и жуком. $= 2$.



Пусть $MN \equiv$ мин. расст. $\Rightarrow$

$$MN \leq M_1N.$$

$$MN + M_1N > MM_1 \quad (\text{н-во } \Delta)$$

$$M_1N + MM_1 > MN \quad (\text{н-во } \Delta)$$

$$MM_1 < OM + OM_1 \Rightarrow$$

$$M_1N + OM + OM_1 > MN$$

для муравья
для жука

$$x^2 + y^2 = 2^2 = 4 \quad (\sqrt{3}^2 + (-1)^2 = 2^2)$$

$$x^2 + y^2 = 4^2 = 16 \quad ((2\sqrt{3})^2 + 2^2 = 4^2 = 16)$$

$$(a, b) \in \mathbb{R}^2(0, 2) \Rightarrow \exists \text{ точка будет. но } \mathbb{R}_2(0, 4)$$

$$\exists (x_0, y_0) \\ x_0^2 + y_0^2 = 16$$

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = 4$$

$$20 - 2ax_0 + 2by_0 = 4$$

$$ax_0 + by_0 = 8$$

$$x_0 = \frac{8 - by_0}{a}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\text{Прог. } N1 \\ x_0 = \frac{8 - by_0}{a} = \frac{8 - b \cdot \sqrt{16 - x_0^2}}{a}$$

$$ax_0 - 8 = -b \cdot \sqrt{16 - x_0^2}$$

$$a^2 x_0^2 + 64 - 16ax_0 = b^2 \cdot 16 - b^2 x_0^2$$

$$(a^2 + b^2)x_0^2 - 16ax_0 + 64 - b^2 \cdot 16 = 0$$

$$\Delta = 16^2 a^2 - 4(64 - b^2 \cdot 16)(a^2 + b^2) =$$

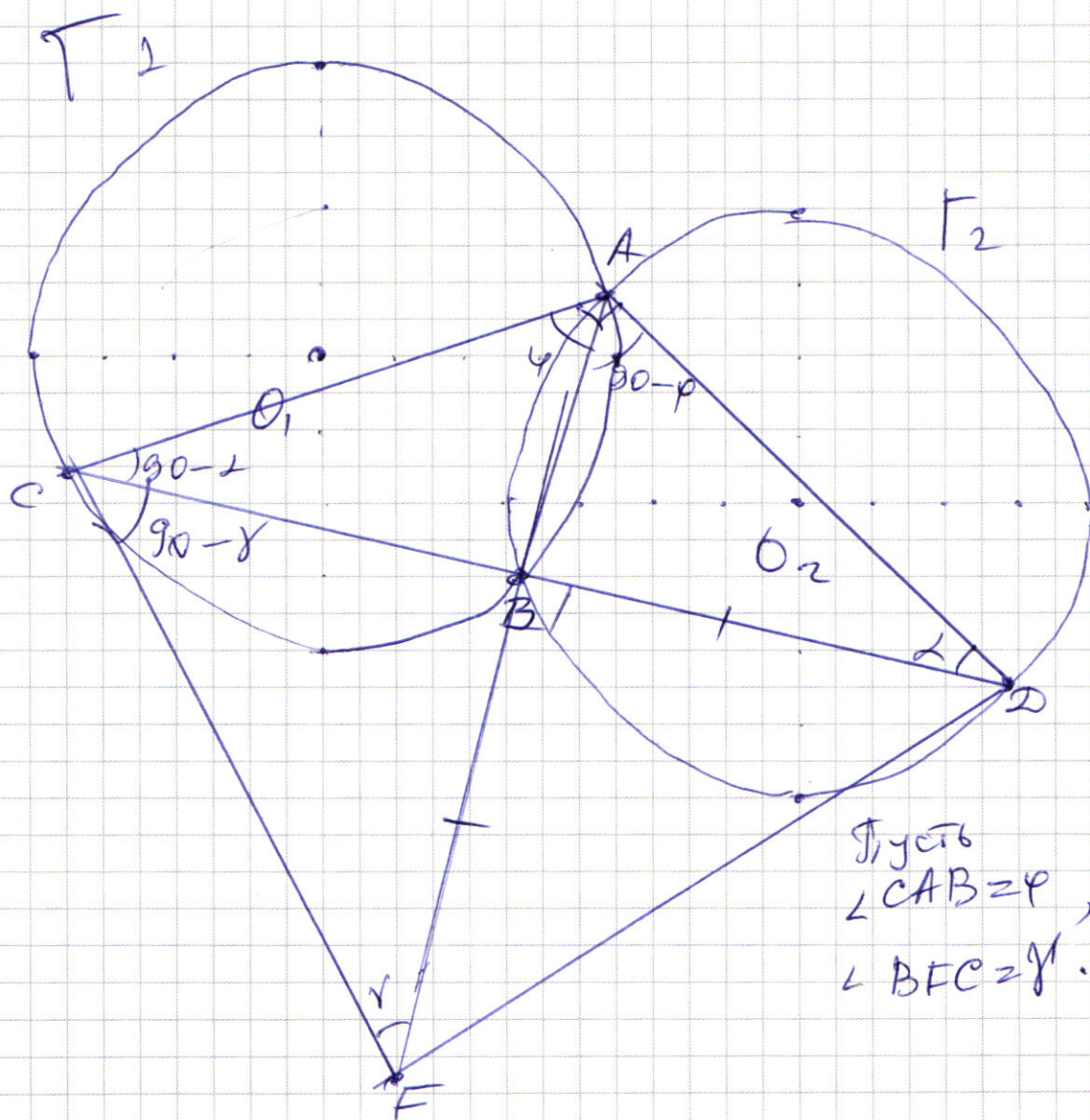
$$= 16^2 a^2 - (256 - 64b^2)(a^2 + b^2) = 16^2 a^2 - 16^2 a^2 - 256b - 64b^2 a^2 + 64b^3 = 64b^3 + 64b^2 a^2 - 256b = 64b(b^2 + ba - 4b)$$

$$x_0 = \frac{16a + \sqrt{64b(b^2 + ba - 4b)}}{2(a^2 + b^2)}$$

$$\text{Ответ: } (a, b) \in \Gamma_1 \Rightarrow (x_0, y_0) \in \Gamma_2$$

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{16a + \sqrt{64b(b^2 + ba - 4b)}}{2(a^2 + b^2)} ; \frac{8 - ax_0}{b} \right)$$

N.G.



Итого
 $\angle CAB = \varphi$, $\angle ADB = \alpha$,
 $\angle BFC = \gamma$.

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6 = (x+3)(x+2)$$

$$(x+3)(x+2 - \sqrt{x^3-x+10}) = 0$$

$$\textcircled{1} \quad x = -3$$

$$\textcircled{2} \quad x+2 - \sqrt{x^3-x+10} = 0$$

$$x+2 = \sqrt{x^3-x+10}$$

$$x^2+4x+4 = |x^3-x+10|$$

$$1 > 0$$

$$x^2+4x+4 = x^3-x+10$$

$$x^3-5x+6-x^2=0$$

$$x^3-x^2-5x+6=0$$

$$\# \quad 1-1-5+6 \neq 0$$

$$-1-1+5+6 \neq 0$$

$$8-4-10+6 \neq 0$$

$$\begin{array}{r|l} x^3-x^2-5x+6 & x-2 \\ \hline -x^3+2x^2 & \\ \hline -x^2-5x & \\ \hline x^2-2x & \\ \hline -3x+6 & \\ \hline -3x+6 & \end{array}$$

$$-3x+6$$

$$-3x+6$$

$$49 \cdot 3 = 147$$

$$14 - 2,25 =$$

$$= 11,75 \quad \begin{array}{r} 5 \\ 235 \\ 47 \end{array}$$

$$x^2+4x+4 = -x^3+x-10$$

$$x^3+x^2+3x+14 \geq 0$$

$$-8+4-6+14 \neq 0$$

$$-343 + 49 =$$

$$-343 + 49 - 21 + 14 \neq 0$$

$$+14^3 + 14^2 - 3 \cdot 14 + 14 \neq 0$$

$$-14^2 + 14 - 3 + 14 \neq 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a \\ 4bx + y(a+b)b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} a_1 a_2 - a_8 \\ 8 \\ \hline \text{Паг} = 1400 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{3(a+b)}{4b} = \frac{12}{(a+b)b} = a$$

$$\begin{array}{r} 1400 \div 2 \\ \hline 700 \div 2 \\ \hline 350 \div 2 \\ \hline 175 \div 5 \\ \hline 35 \end{array}$$

$$\begin{cases} 3(a+b)^2 = 48b \\ 3(a+b)a = 4b \\ 12 = (a+b)b \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 36(a+b)a &= 48b \\ &= 3(a+b)^2 \end{aligned}$$

$$12(a+b)a = (a+b)^2$$

$$(a+b)(12a - a - b) = 0$$

$$a = -b \Rightarrow a+b=0$$

$$\begin{array}{r} 8 \cdot 8 = 64 \\ 3^2 = 9 \\ 2 \cdot 5 = 10 \\ 7^2 = 49 \end{array}$$

$$= a_1 a_2 a_3 - a_8$$

$$(a+b)b = 12 \neq$$

$$11a = b$$

$$12a \cdot 11a = 12$$

$$a^2 = \frac{1}{11}$$

$$a = \pm \frac{1}{\sqrt{11}}$$

$$8 \cdot 25 =$$

$$200 \cdot 7$$

$$\begin{aligned} 144 &= \\ &= 12 \cdot 4 \cdot 3 \end{aligned}$$

$$(12a)^2 \cdot 3 = 48 \cdot 11a$$

$$144 \cdot a^2 \cdot 3 = 48 \cdot 11a$$

$$3a^2 \cdot 3 = 11a$$

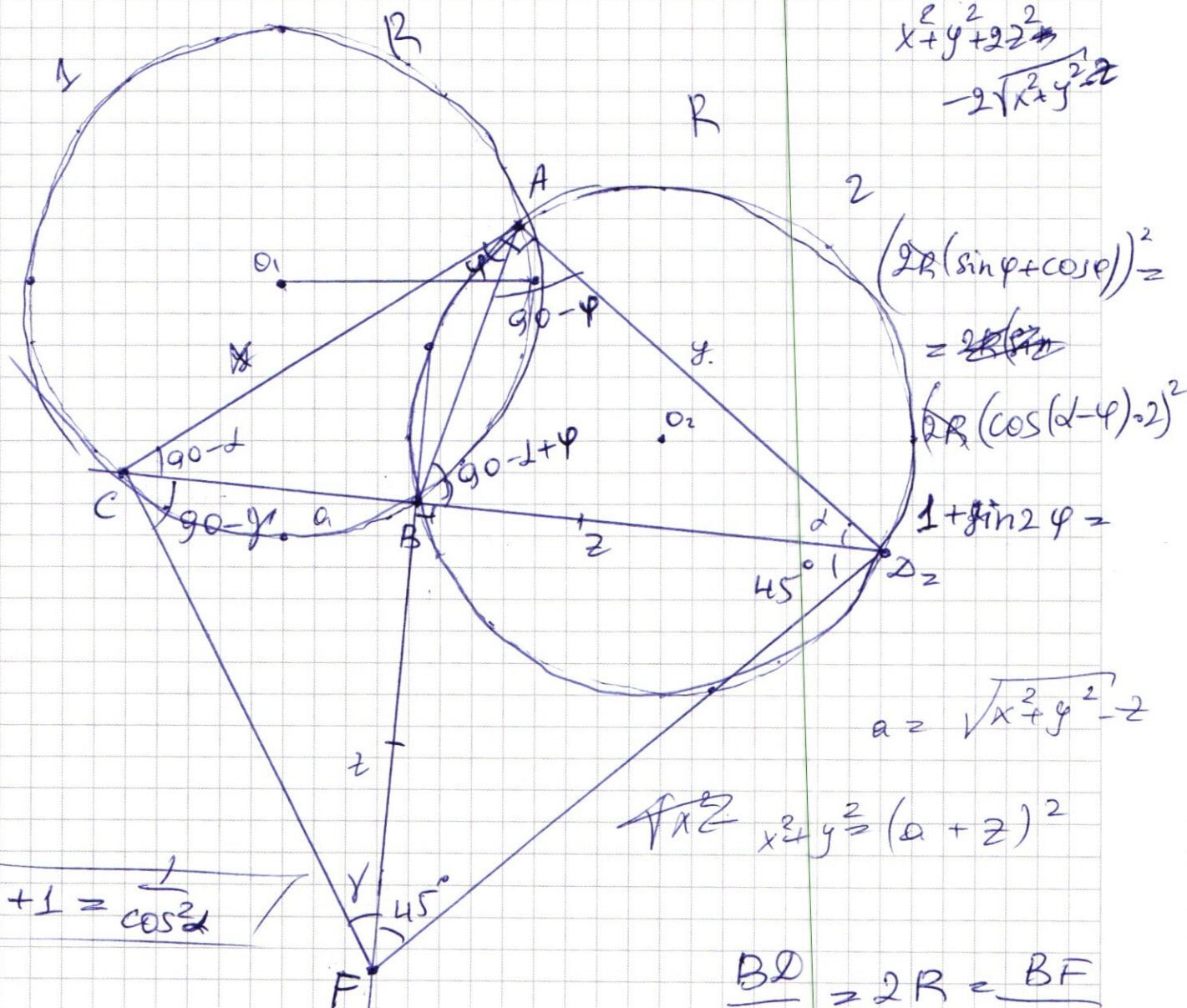
$$a(9a - 11) = 0$$

$$a > 0;$$

$$a = \frac{11}{9}$$

$$\begin{array}{l} x_0 \quad y_0 \\ (x_0 - a)^2 + \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{-2\sqrt{x^2 + y^2}z}$$

$$\begin{aligned} (2R(\sin\varphi + \cos\varphi))^2 &= \\ &= 2R^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi) \\ &= 2R^2(1 + \sin 2\varphi) \end{aligned}$$

$$1 + \sin 2\varphi =$$

$$a = \sqrt{x^2 + y^2} - z$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = (a + z)^2$$

$$\sqrt{\tan^2\alpha + 1} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\frac{BD}{\cos\varphi} = 2R = \frac{BF}{\cos\varphi}$$

$$\frac{BF}{\cos\gamma} = CF$$

$$\frac{CB}{BF} = \frac{CB}{BD} = \tan\gamma = \tan\varphi \cdot \tan\alpha$$

$$\frac{\tan\varphi}{\tan\gamma} = \frac{1}{\tan\alpha} = \cot\alpha$$

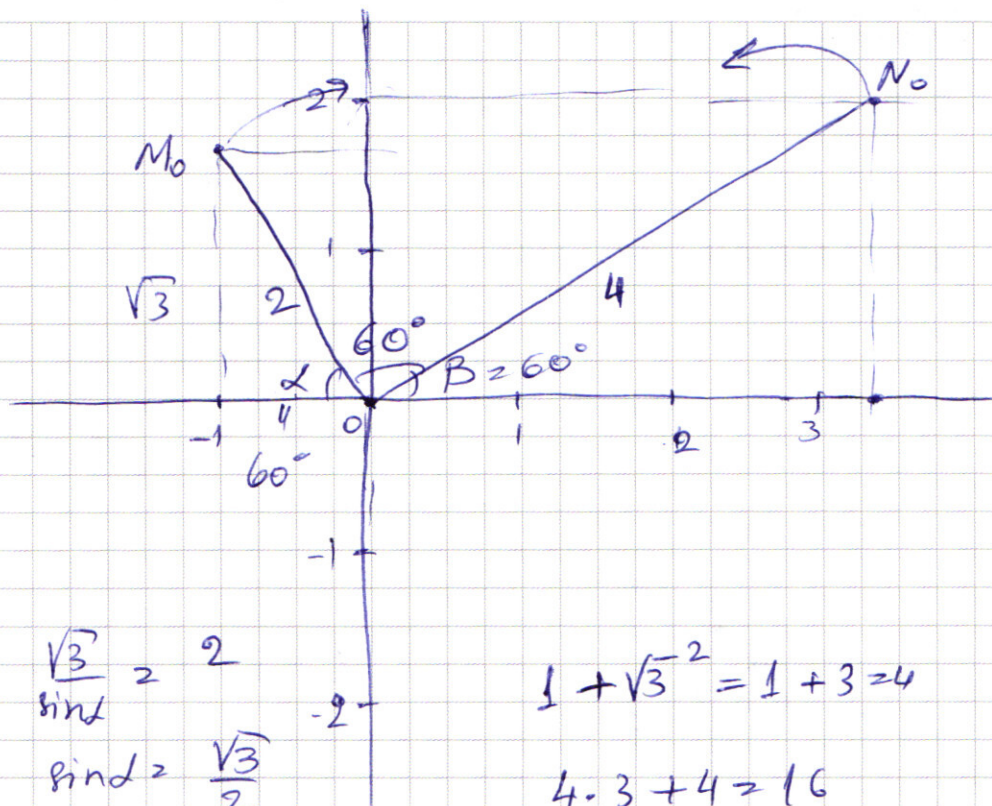
$$CF = \frac{2R \cos\varphi}{\cos\gamma}$$

$$BF = 2R \cos\varphi$$

$$CF =$$

$$BF = CF \cdot \cos\gamma$$

$$\frac{\cos\varphi}{\cos\gamma} = \frac{\tan\gamma}{\tan\varphi} \cdot \frac{\sin\varphi}{\sin\gamma}$$



$$\sqrt{3} \rightarrow 1,5$$

$$\sqrt{3} = 1,5$$

$$3 \rightarrow 2,25$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin \alpha} = 2$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{\alpha = 60^\circ}$$

$$1 + \sqrt{3}^2 = 1 + 3 = 4$$

$$4 \cdot 3 + 4 = 16$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sin \alpha} = 4$$

$$(x; y)$$

$$x^2 + y^2 = 2^2$$

$$\boxed{x^2 + y^2 = 4} \text{ — Муравей}$$

$$\boxed{a^2 + b^2 = 16} \text{ — Хук.}$$

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \approx f(a, b)$$

$$x, y$$

$$(a, b)$$

$$4 - 2ax + 16 - 2by = \sqrt{20} \approx 2ax - 2by = 2$$

$$ax + by = 8$$

$$\boxed{ax + by = 8}$$

$$\frac{3(a+b)}{4b} = \frac{12}{(a+b)b} = a$$

$$x = \sqrt{4-y^2}$$

$$a = \sqrt{16-b^2}$$

$$b = \sqrt{16-a^2}$$

$$a+b \neq 0$$

$$a \neq 0$$

$$b \neq 0$$

$$3(a+b)^2 \cdot b = 48b$$

$$3(a+b) = 4ab$$

$$12 = (a+b)ab$$

$$a+b = 4$$

$$ab = -3$$

$$a\sqrt{4-y^2} + \sqrt{16-a^2}y = 8$$

$$1) a+b = 4$$

$$3ab(48 - 3(a+b)^2) = 0$$

$$ab = 3$$

$$b(16 - (a+b)^2) = 0$$

$$b \neq 0$$

$$x < 1$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2(-x+1) + 1 =$$

$$= 2x^4 + x^2 - 2x + 3x^3 - 3x^2 + 1 = 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$2 - 3 - 2 + 2 + 1 = 0$$

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \\ 2x^4 + 2x^3 \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} x+1 \\ \hline 2x^3 + x^2 - 3x + 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -x^3 - 2x^2 \\ x^3 + x^2 \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -3x^2 - 2x \\ -3x^2 - 3x \hline \end{array}$$

$$x+1$$

$$\begin{array}{r} -2+1+3+1 \\ 2+1-3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} (2x-1)(x+1) &= \\ &= 2x^2 + 2x - x - 1 = \\ &= 2x^2 + x - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 + x^2 - 3x + 1 \\ 2x^2 + 2x^2 \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} x+1 \\ \hline 2x^2 - x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -x^2 - 3x \\ -x^2 - x \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^3 + x^2 - 3x + 1 \\ 2x^3 - x^2 \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 2x-1 \\ \hline 2x^2 + x - 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -2x^2 - 3x \\ 2x^2 - x \hline \end{array}$$

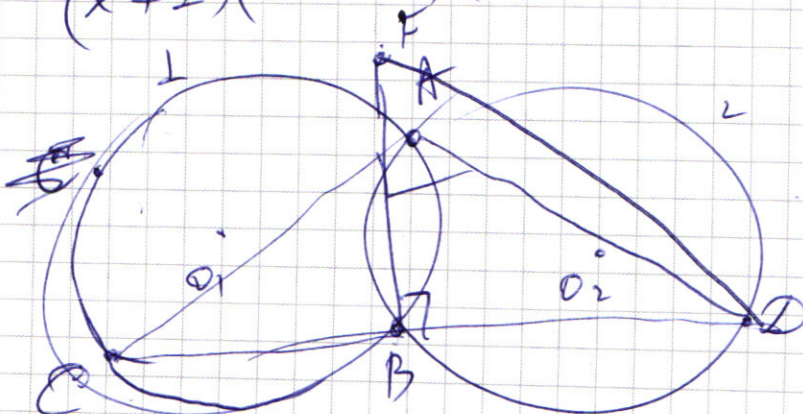
$$-2x+1$$

$$x < 1$$

$$(x+1)(2x-1)(x^2+x-1) \geq 0$$

$$\sqrt{5}-1 > 1$$

$$\sqrt{5}-1 < 2$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^3 + 3x^2 + 1 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 = a_1 a_2 \dots a_n$$

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

$$2x^4 + 1 = x^4 + x^4 + 1 \geq 3 \sqrt[3]{x^8}$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2(-x + 1) + 1 =$$

$$8 \cdot C_7^2 =$$

$$2x^4 + x^2 - 2x + 3x \begin{cases} 16x + 16y = 1 \\ 12x + 12y = 0 \end{cases}$$

$$2x^4 + 2x^2 \geq 4 \sqrt[4]{x^{4+4+2+2}} = 4 \sqrt[4]{x^{12}} = 4x^3 + 1 \geq 3x^3$$

$$\frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2/x - 1 + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2(x-1) + 1 =$$

$$= 2x^4 + x^2 - 2x - 3x^3 + 3x + 1 =$$

$$= 2x^4 - 2x^3 + x + 1 \geq 0$$

$$2x^2(x^2 - 1) + x + 1 =$$

$$= (x+1)(x-1)2x^2 + 1 \geq 0$$

$$2x^3 - 2x^2 + 1 \geq 0$$

$$2x^2(x-1) + 1 \geq 1 > 0$$

$$\frac{1 + \cos \beta - \cos \alpha - \cos \alpha \cdot \cos \beta - (1 + \cos \alpha - \cos \beta - \cos \alpha \cos \beta)}{4}$$

$$\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{2}$$

$$\cos(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha = -\sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \cos$$

α, β

$$\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{2}$$

$$\alpha \rightarrow 90^\circ - \alpha$$

$$\beta \rightarrow 90^\circ - \beta$$

$$\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{2} = \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\beta - \alpha)$$

$$\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = (\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha)(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)$$

$$= \sin \alpha \cos \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin \beta \cos \beta + \sin \beta \cos \beta \cos^2 \alpha + \sin^2 \beta \cos \alpha \sin \alpha =$$

$$= \sin \alpha \cos \alpha + \cos \beta \sin \beta = \frac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}{2}$$

$$\begin{cases} 3x + 12y = 0 \\ 4bx + b^2y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 48y + 12bx = 0 \\ 12bx + b^3y = 0 \end{cases}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\sin 2\varphi = \cos(2\alpha - 2\varphi)$$

$$\sin 2\varphi - \cos(2\alpha - 2\varphi) = 0$$

$$\sin 2\varphi - \sin(90^\circ - 2\alpha + 2\varphi) = 0$$

$$\sin 2\varphi + \sin(2\alpha - 90^\circ - 2\varphi) = 0$$

$$2 \sin(\alpha - 45^\circ) \cdot \cos(45^\circ + 2\varphi - \alpha) = 0$$

$$3b^2y - 48y = 0$$

$$2\varphi + 90^\circ + 2\varphi - 2\alpha$$

$$b^2y - 16y = 0$$

$$y(b^2 - 16) = 0$$

$$3bx = 0$$

$$4bx = 1$$

$$bx = 1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(2R \sin \varphi + 2R \cos \varphi)^2 =$$

$$= (2R \cos(\alpha - \varphi))^2 + (2R \cos(\alpha - \varphi))^2$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha =$$

$$= 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin 2\varphi = \cos(2\alpha - 2\varphi)$$

$$\sin 2\varphi - \cos(2\alpha - 2\varphi) = 0$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \cos(\alpha - \beta) \cos(\alpha + \beta) =$$

$$= \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos^2 \left(\frac{\beta}{2}\right) \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin^2 \left(\frac{\beta}{2}\right) = (1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2})(1 - \sin^2 \frac{\beta}{2}) -$$

$$- \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin^2 \frac{\beta}{2} = 1 - \sin^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \cos^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} =$$

$$= \frac{\cos \beta + 1}{2} - \frac{1 - \cos \alpha}{2} =$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} =$$

$$= \frac{\cos \beta + 1 - 1 + \cos \alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$\sin 2\varphi = \cos 2\alpha \cdot \cos 2\varphi + \sin 2\alpha \cdot \sin 2\varphi = \left(\frac{1 - \cos \alpha}{2}\right) \left(\frac{1 + \cos \beta}{2}\right) -$$

$$- \left(\frac{1 - \cos \beta}{2}\right) \left(\frac{1 + \cos \alpha}{2}\right) =$$