

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Вокруг птичьей кормушки в одной плоскости с ней по двум окружностям с одинаковой скоростью летают синица и снегирь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой кормушка (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Синица движется по часовой стрелке, а снегирь – против. В начальный момент времени синица и снегирь находятся в точках $M_0(\sqrt{3}; 3)$ и $N_0(6; -2\sqrt{3})$ соответственно. Определите координаты всех положений снегиря, в которых расстояние между птицами будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a, \\ 3bx + (a-b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2|x+1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 7000. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 7 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10, \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 01

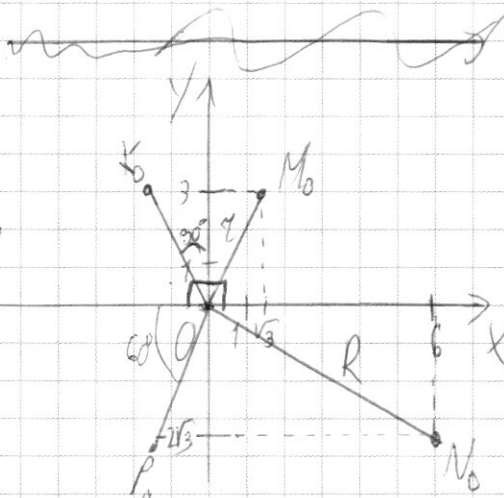
Друга $\gamma = 0\%$ и $R = 0\%$.

Числа будут меняться

Рассстояния от порнушек до птиц
будет постоянным (ч.к. соотв.), т.к.
они движутся по окружности.

$$y = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + |3|^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$R = \sqrt{1 - 2\sqrt{3}/4} = \sqrt{4/8} = 2\sqrt{2}/2 = 2 = 4\sqrt{3}$$



1) Т.к. $R=24$ и скорость синицы и снегиря равны, то пока снегирь "пройдёт" угол $\angle$ (угол между отрезками, соединяющими положение птицы в 2 точках), синица пройдёт угол $2\angle$.

2) Пусть расстояние между птицами $= a$, тогда по т. косинусов

$$a = \sqrt{R^2 + R^2 - 2R^2 \cos \beta} \quad (\text{в } \beta\text{-угол между сторонами, соединяющими вершину } \beta)$$

и положения птиц). 7

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

С. В. М. Р. О. В. К.

$$\Delta K \sin L' (L' - \gamma) \text{ or } \text{we can say } \sin L' = \frac{L' - \gamma}{R} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \cdot 12 = 30^\circ$$

$$\sin \angle \beta' (\beta' - \text{угол между } OM_0 \text{ и } OX) = \frac{131}{14} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \beta' = 60^\circ \quad \text{Энергия раз}$$

они встретятся на ОХ (т.к. стрелка идет против часовой, а танкица по часовой)

1. К. Далее до следующей встречи они суммарно пройдут 360° , то по п.1), Снегирь пройдёт 120° , а синица 240° . Следующая "встреча" произойдёт в K_0 (30° от ОУ или 110° от ОХ). Таким образом Снегирь пройдёт ещё 120° до следующей "встречи" в P_0 (210° от положительного ОХ).

В третий раз снаряд пройдёт 120° до ОХ, где он ^{уже} встретится $\rightarrow$ положительная
 значит $\Rightarrow$ только 3 точки на ОХ: K_0 и P_0 .

Координаты точек:

на ОХ:

$\angle \beta' = 0 \Rightarrow$ по ОХ координат = 0, а по ОУ $= 2\sqrt{3}$

Итого: $(4\sqrt{3}; 0)$

в P_0

$\angle \beta' = 120^\circ \Rightarrow \cos \beta' = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ модуль координат по

ОУ $= \frac{\sqrt{3}}{2} R = 6$, но так P_0 ниже ОУ, то

координат по ОУ $= -6$

$\cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow$ модуль по ОХ $= \frac{1}{2} R = 2\sqrt{3}$, но так P_0

выше ОУ, то координат по ОХ $= 2\sqrt{3}$

Итого: $(-2\sqrt{3}; -6)$

Ответ: $(4\sqrt{3}; 0); (-2\sqrt{3}; -6); (-2\sqrt{3}; 6)$.

НОЗ

$$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^2-16x+25} = x^2+3x-10$$

$$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^2-16x+25} = (x+5)(x-2)$$

$$x \neq -5 \quad x+5 \neq 0: \quad x+5 \neq 0:$$

$$x = -5$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{x^2-16x+25} = x-2 \quad (\text{разделили на } x+5)$$

$$\left\{ \frac{1}{4}(x^2-16x+25) = (x-2)^2 \quad \text{возвели в квадрат} \right.$$

$$x-2 \geq 0$$

$$\begin{cases} x^3-16x+25 = 4(x-2)^2 \end{cases}$$

$$x \geq 2$$

$$x \geq 2$$

$$x^3-16x+25 = 4x^2-16x+16$$

$$x^3-4x^2+9 = 0 \quad (1)$$

$$x \geq 2 \quad (2)$$

$$(x-3)(x^2-x-3) = 0 \quad (2)$$

$$x \geq 2$$

$$x-3 = 0 \quad (1)$$

$$x = 3$$

$$x^2-x-3 = 0 \quad (2)$$

$$x \geq 2$$

в K_0 :
 $\angle \beta' = 30^\circ \Rightarrow \sin \beta' = \frac{1}{2} \Rightarrow$ координат по
 ОУ $= \frac{1}{2} R = 2\sqrt{3}$, но так K_0

находится слева от ОУ, то

координат по ОУ $= -2\sqrt{3}$

$\cos \beta' = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ координат по ОХ $= \frac{\sqrt{3}}{2} R = 6$

Итого: $(-2\sqrt{3}; 6)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(1) $x-3=0$
 $x=3$

(2) $x^2-x-3=0$
 $x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$

Итого:

$x = -5$
 $x = 3$
 $x = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$
 $x = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$
 $x \geq 2$

$x = -5$
 $x = 3$
 $x = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$
 $x = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$
 $x \geq 2$

$x = 3$ ($3^3 - 16 \cdot 3 + 25 = 27 - 48 + 25 = 4 > 0$)
 $x = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ ($\frac{1+\sqrt{13}}{2} \geq 2$)
 $x = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$ ($\frac{1-\sqrt{13}}{2} < 2$)

$x^3 - 16x + 25 \geq 0$ (3)

(3):
 $x^3 - 16x + 25 \geq 0$
105

Ответ: $x \in \{3, \frac{1+\sqrt{13}}{2}\}$

4000 = 4 · 5 · 5 · 5 · 2 · 2 · 2

4 из цифр представляется только в виде 4
5 из цифр представляется только в виде 5
2 · 2 · 2 можно представить как 8, как 2 · 4 или как 2 · 2 · 2

Или 2, 2 и 2. Есть 8 вариантов, куда поставить 4, но 1-е и 2-е не сходятся.
На каждый из этих вариантов есть 3 варианта, куда поставить пятёрки.
 $C_4^3 = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 1} = 4$. Итого 8 · 3 = 24 варианта расстановки пятёрок и семерок.
На каждый из этих расстановок есть 4 варианта расстановки восьмёрок,
4 варианта расстановки двойки, на каждый из которых 3 варианта четвёрки. Итого
4 · 3 · 12 вариантов расстановки двойки и четвёрки и 4 · 3 варианта для трёх двоек.

$\left(\frac{3}{4} - \frac{4}{3}\right) \cdot 1 = 4$. Итого $4+2+4=10$ комбинаций для каждой из комбинаций

чисел раз и пятерок (оставшиеся цифры заполняем единицами)

Всего получаем $20 \cdot 20 = 5600$ чисел

Ответ: 5600 чисел.

1204

$$6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2(x+1) + 1 \geq 0$$

$x \cdot 170$:

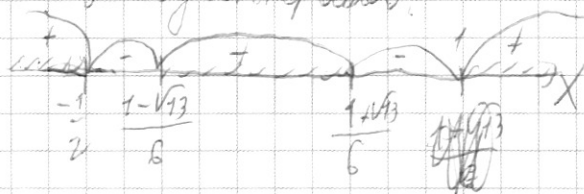
$x \geq -1$:

$$6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$(x-1)(2x+1)(3x^2-x-1) \geq 0$$

$$3(x-1)(2x+1) \left(x - \frac{1-\sqrt{3}}{6}\right) \left(x - \frac{1+\sqrt{3}}{6}\right) \geq 0$$

Метод интервалов:



$$\frac{1-\sqrt{3}}{6} < \frac{1}{2}$$

$$1-\sqrt{3} < 1$$

$$1-\sqrt{3} < 1-\sqrt{6} = -3 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1-\sqrt{3}}{6} < -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$x < -\frac{1}{2} < -1$$

$$x < -1$$

$$x \leq -1$$

$$|x| > 1 \Rightarrow x^4 > x^3 \Rightarrow 76x^4 + 5x^3 > 0$$

$$6x^2 + 2x > 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} 6x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 2x > 0 \text{ при } x > 0 \end{array} \right.$$

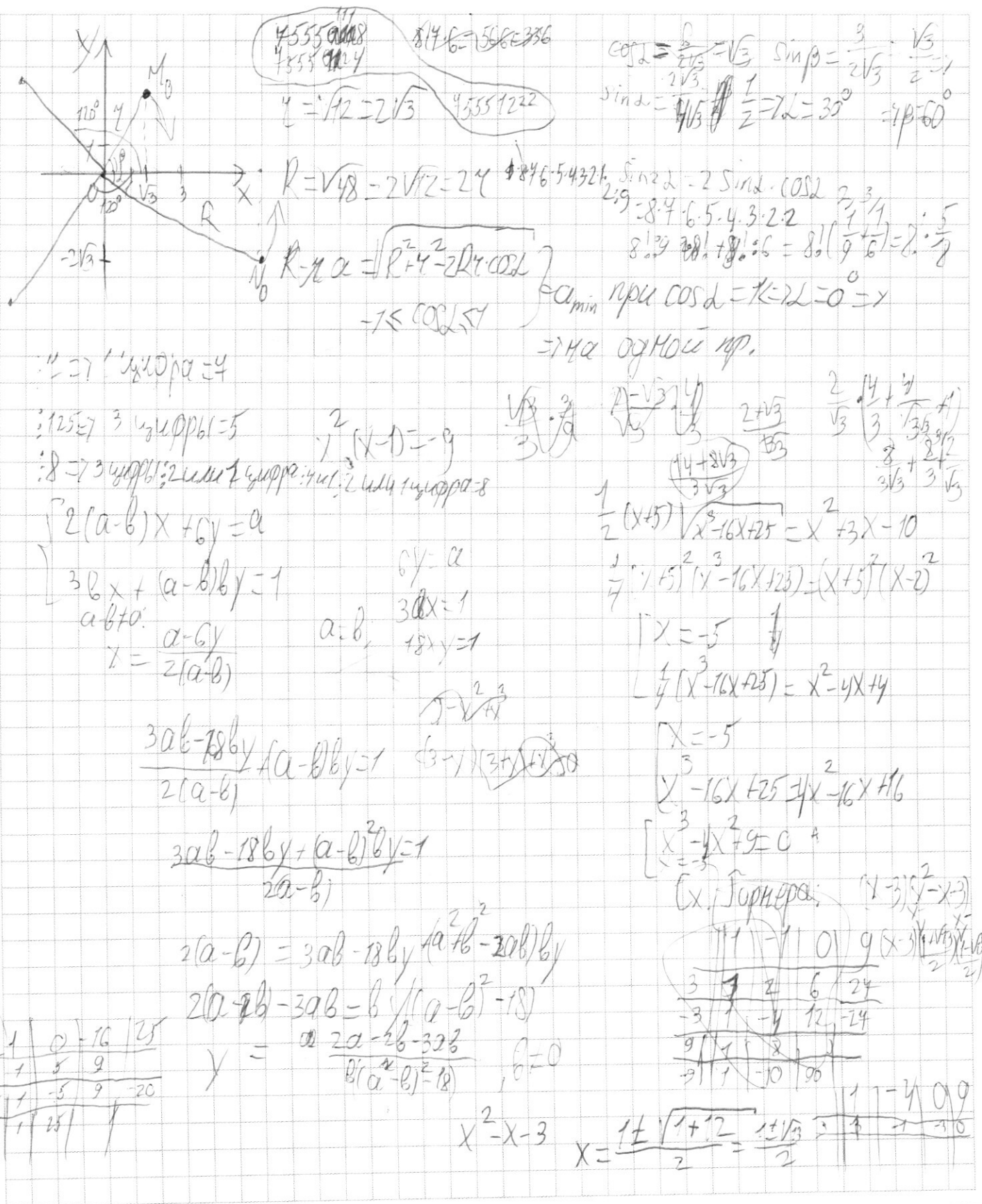
170

$$x \in (-\infty, -1)$$

Итого: $x \in$

$$\text{Ответ: } x \in (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1-\sqrt{3}}{6}, \frac{1+\sqrt{3}}{6}] \cup [1, +\infty)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





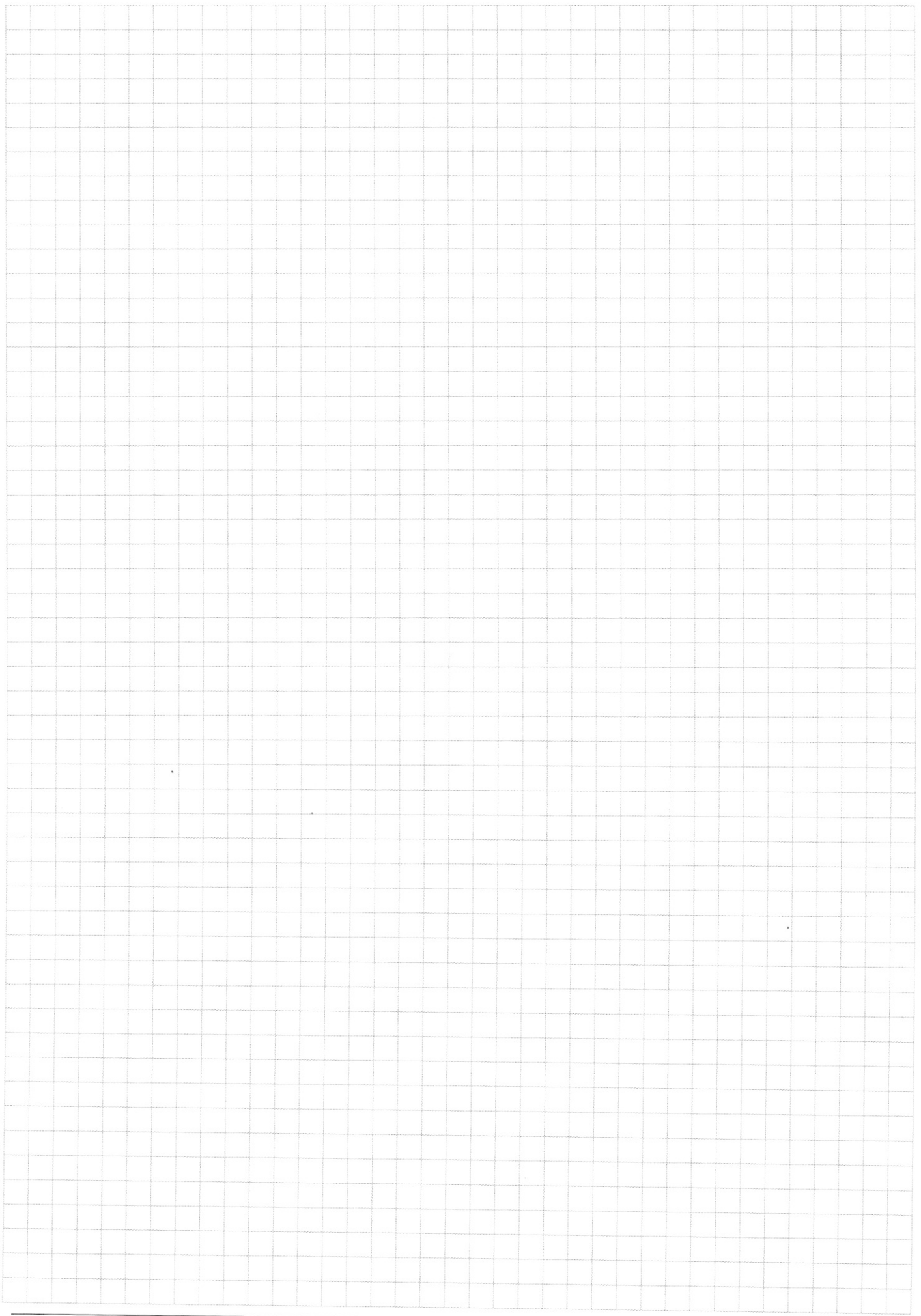
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)



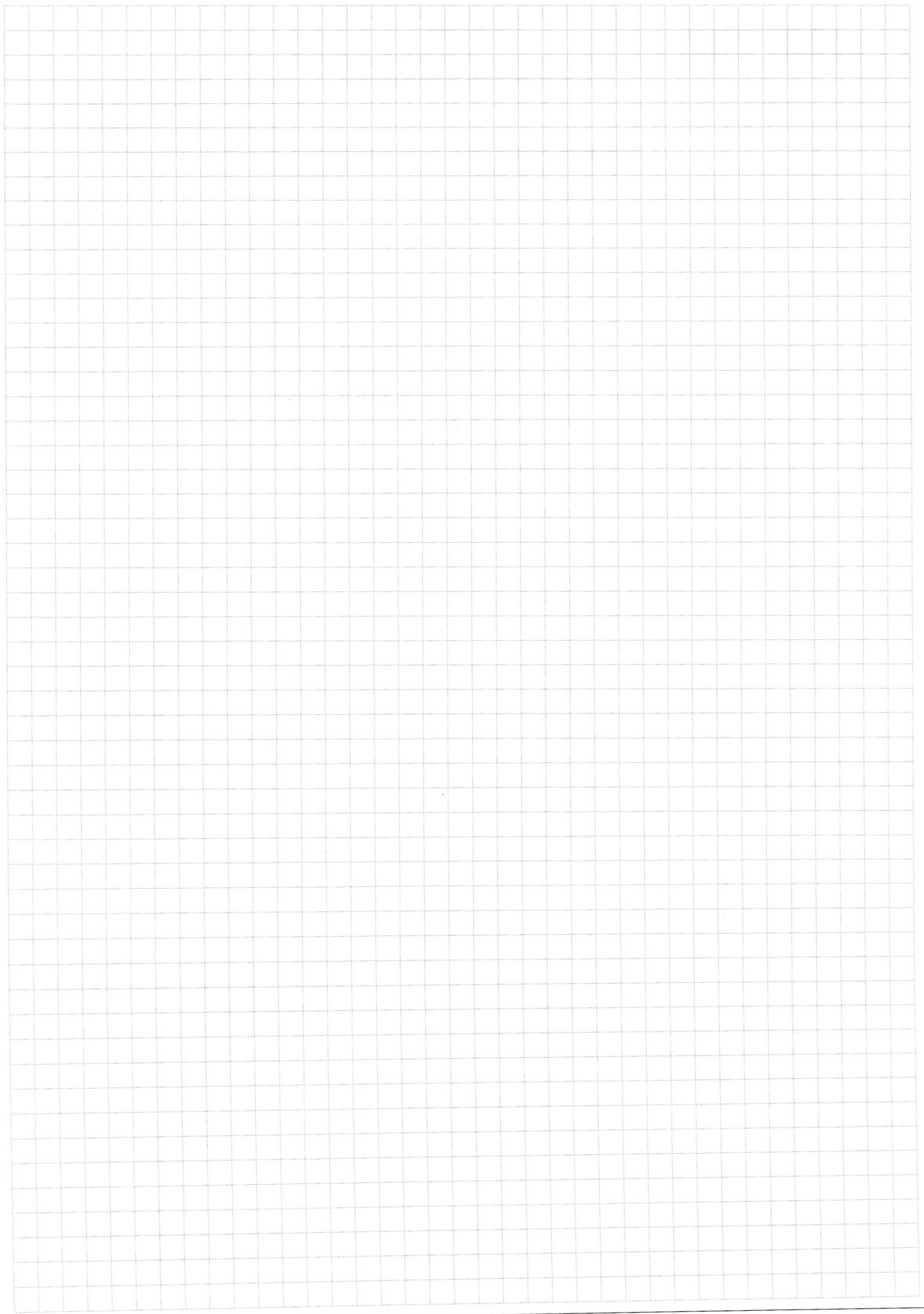
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)