

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Муравей движется по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0(-1; \sqrt{3})$ и $N_0(2\sqrt{3}; 2)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a, \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6, \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

З.1.

С помощью г. Пифагора,
найдем радиус окружности.

$$R_m = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

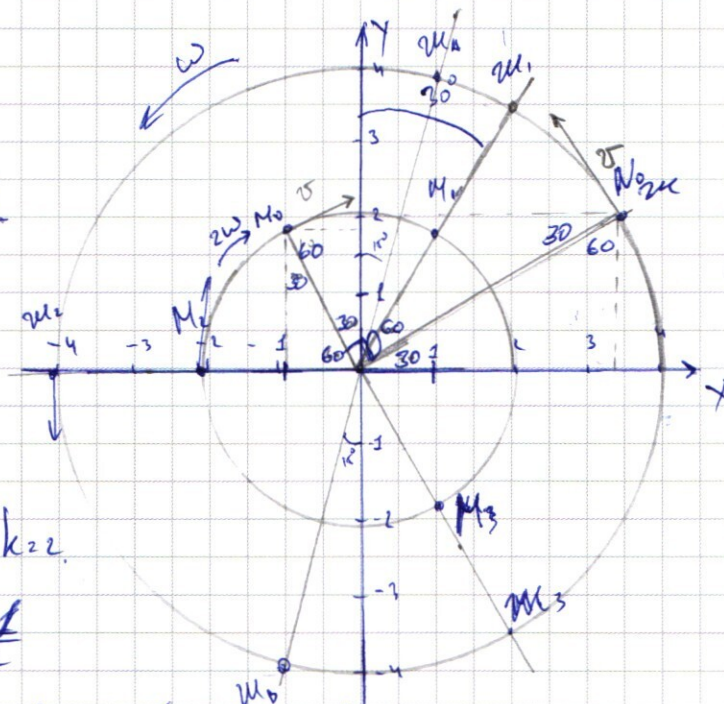
$$R_m = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{16} = 4$$

Заметим, что в этих треуголь-

ных треугольниках углы с k_{22} .

А значит, что $\frac{\text{катет}}{\text{гип}} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ можем указать углы 30° и 60° (см. рис)



Рассмотрим два случая. (если равны их линейная скорость или угловая)

1. Если их линейная скорость равна v .

$$\text{то } \omega_m = \frac{v}{R_m} \cdot \frac{1}{2}; \quad \omega_m = \frac{v}{R_m} = \frac{v}{4}.$$

Заметим, что наименьший расстояние между

линиями будет 2. (из св-ва окр) Когда

они будут на одной прямой перпендикулярно

центру окружности. То есть угол между ними равен

0. Угол между линиями $\rightarrow 90^\circ$.

Т.е. $\frac{\omega_m}{\omega_m} = 2 > 0$ и вращаются (собираются на мин рас)

продолжит движение в с. М. и М. их скорости

$M_1(1; \sqrt{3})$ и $M_2(2; 2\sqrt{3})$. Расстояние от центра до углов между

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$$

центр

$$|x-3-y| + |x-3+y| \leq 6$$

$$|x-3-y| + |x-3+y| = 6$$

$$\begin{array}{l} x-3 \geq y \\ x-3 \leq y \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

M_1, M_2 и $OY \approx 30^\circ$, и у того $\text{Пусть } \omega_{M_1} = \omega, \text{ тогда } \omega_{M_2} = 2\omega.$
 $\Rightarrow -30^\circ + 2\omega t \approx 30^\circ$

Далее, так как их общая угловая скорость 3ω . Значит, в следующий раз они встретятся когда муха пролетит 120° , а муравей 240° .

Эта встреча будет при угле -90° для OY

$\Rightarrow$ координаты $M_1(-4; 0)$ и $M_2(-2; 0)$

Апоксики пролетит третья вершина (муха пролетит 120°)

$\Rightarrow$ она пролетит при угле 150°

$\Rightarrow$ координаты ~~$M_3(1; -\sqrt{3})$~~ и

$M_3(1; -\sqrt{3})$ и $M_3(2; -2\sqrt{3})$

Апоксики пролетит следующая вершина (муха пролетит 120°)

$\Rightarrow$ угол с $OY \approx 30^\circ$, как и во время

1 встречи $\Rightarrow$ их встречи повторяются

Ответ: если их линейные скорости равны, то $M_1(2; 2\sqrt{3})$, $M_2(-4; 0)$ и $M_3(2; -2\sqrt{3})$

Рассмотрим 2 случая, если их угловая скорость равна, то их вершины пролетают

углами биссектрисы между их нач. линиями

в с. (M_A и M_B) то ее в координатах

$M_A(4 \sin 15; 4 \cos 15)$ и $M_B(4(-\sin 15); 4(-\cos 15))$

Ответ: если их угловая скорость одинакова, то

№1

Решить систему графически.

Для начала преобразуем $(|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 \geq 25$

Заметим, что это похоже на уравнение вида $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$,

то есть $\Rightarrow$ для нас φ будет параболой
то, надо преобразовать опр с центром $(3; 4)$
и радиусом 5. Но при $x \geq 0$ и $y \geq 0$,
а далее параболу симметричную
отн. ОУ, а для симметрии ил отн ОХ
(см. рис)

Далее разделим ситуацию на 4 области

I. $(x-3 \geq y)$ и $(x-3 \geq -y)$

$\Rightarrow x-3-y + x-3+y \leq 6 \Rightarrow$

$$x \leq 6$$

II $(x-3 \leq y)$ и $(x-3 \geq -y)$

$\Rightarrow -x+3+y + x-3+y \leq 6 \Rightarrow$

$$y \leq 3$$

III $(x-3 \leq y)$ и $(x-3 \leq -y)$

$\Rightarrow -x+3+y + x+3+y \leq 6 \Rightarrow$

$$x \geq 0$$

IV $(x-3 \geq y)$ и $(x-3 \leq -y)$

$\Rightarrow x-3-y -x+3-y \leq 6 \Rightarrow$

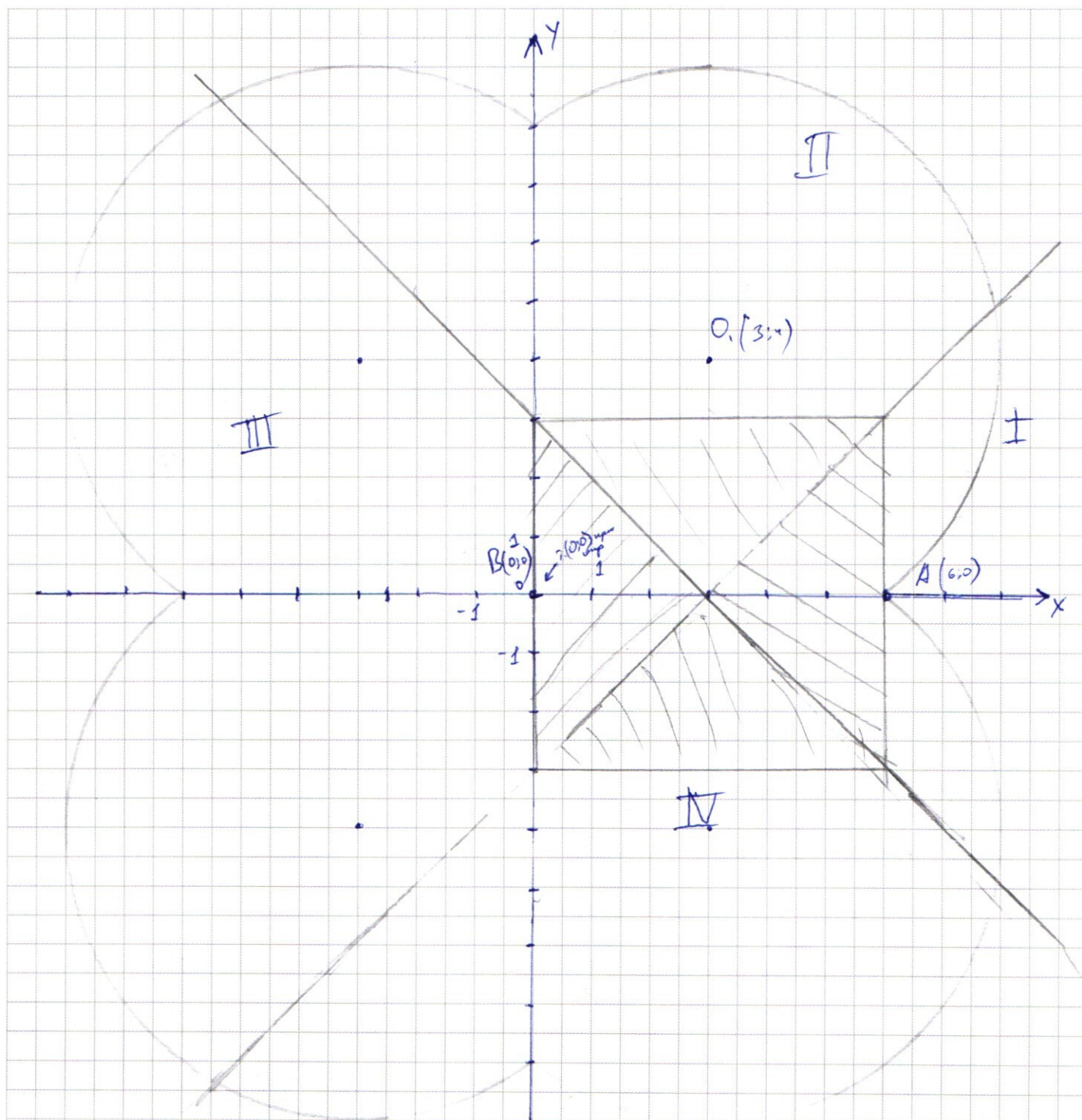
$$y \geq -3$$

Проведём прямые $y=3-x$ и $y=x-3$,

они поделят плоскость на эти 4 области.

Далее в каждой области строим параболу и
выделяем ограниченную область, так же огр область
включает в себя $(|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 \geq 25$ так как это график
функции является решением.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Получаем две точки пересечения $A(6;0)$; $B(0;0)$
 2) Если график не имеет
 Ответ: $(x_{26}; y_{20})$ и $(x_{20}; y_{20})$

55.

Разложим 1400 на простые множители

$$1400 = 7 \cdot 5^2 \cdot 2^3$$

Заметим, что возможны 3 варианта чисел

1. $7, 5, 1, 2, 2, 2, 1, 1$

2. $7, 5, 5, 4, 2, 1, 1, 1$

3. $7, 5, 5, 8, 1, 1, 1, 1$

Рассмотрим кол-во ^{чисел} вариантов для каждого случая

1. $C_1^8 \cdot C_2^7 \cdot C_3^5 \cdot C_4^2 = \frac{8!}{7!} \cdot \frac{7!}{2!5!} \cdot \frac{5!}{3!2!} \cdot 1 = 8 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 = 1680$

2. $C_1^8 \cdot C_2^7 \cdot C_3^5 \cdot C_4^4 \cdot C_5^1 = \frac{8!}{7!} \cdot \frac{7!}{2!5!} \cdot \frac{5!}{4!1!} \cdot \frac{4!}{3!1!} \cdot 1 = 8 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 = 3360$

3. $C_1^8 \cdot C_2^7 \cdot C_3^5 \cdot C_4^4 = \frac{8!}{7!} \cdot \frac{7!}{2!5!} \cdot \frac{5!}{4!1!} \cdot 1 = 8 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 = 840$

Общее кол-во чисел $1680 + 3360 + 840 = 1680 + 4200 = 5880$

Ответ: 5880.

52.

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a \\ 4bx + (a+b)y = 1 \end{cases}$$

Заметим, что 1 система неравенств может

иметь бесконечно кол-во решений в 2-х случаях,

если в одном из неравенств коэф при обоих

переменных равен 0 или если уравнение

тождественно верно.

В нашем случае 1 вариант не подходит,

т.к. в 1 уравн y y не нулевой коэф, а во втором

то если коэф $= 0$, то $0 \leq 1$, что неверно.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Значит, что бесконечность решений как показано, то
что это пропорциона уровню

Значит, при заданных 2-х на координатах, координаты x и y имеют бесконечное количество решений

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases} \quad | \cdot a$$

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a \\ 4abx + (a+b)by = a \end{cases}$$

$\Rightarrow$ т.е. они пропорциональны, то

$$\begin{cases} 3(a+b) = 4ab \\ 12 = (a+b)ab \end{cases} \Rightarrow ab = \frac{12}{a+b}$$

$$\Rightarrow a+b = \frac{12}{ab}$$

$$3(a+b) = 4 \cdot \frac{12}{a+b}$$

$$3 \frac{12}{ab} = 4 \cdot ab$$

$$3(a+b)^2 = 48$$

$$36 = 4a^2b^2$$

$$|a+b| = 4$$

$$|ab| = 3$$

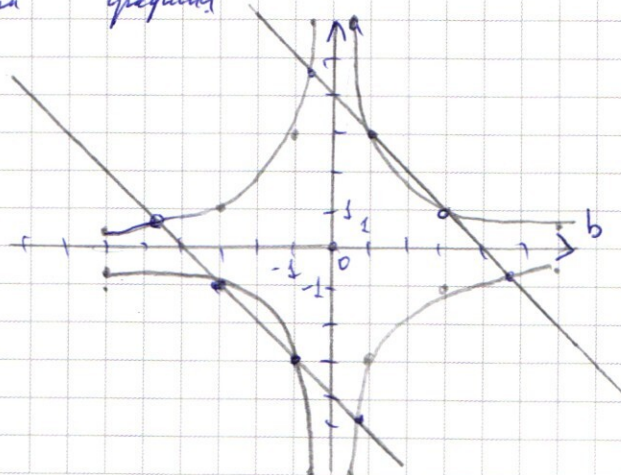
$$\begin{cases} |a+b| = 4 \\ |ab| = 3 \end{cases}$$

Поэтому упрощая

Получаем 3 решения

$$(3; 1), (1; 3), (-3; -1), (-1; -3)$$

и еще 4 не учтены



$\sqrt{3}$

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$$

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = (x+3)(x+2)$$

$$x_1 = -3, \text{ if } x_2 = -3$$

$$\sqrt{x^3-x+10} = x+2$$

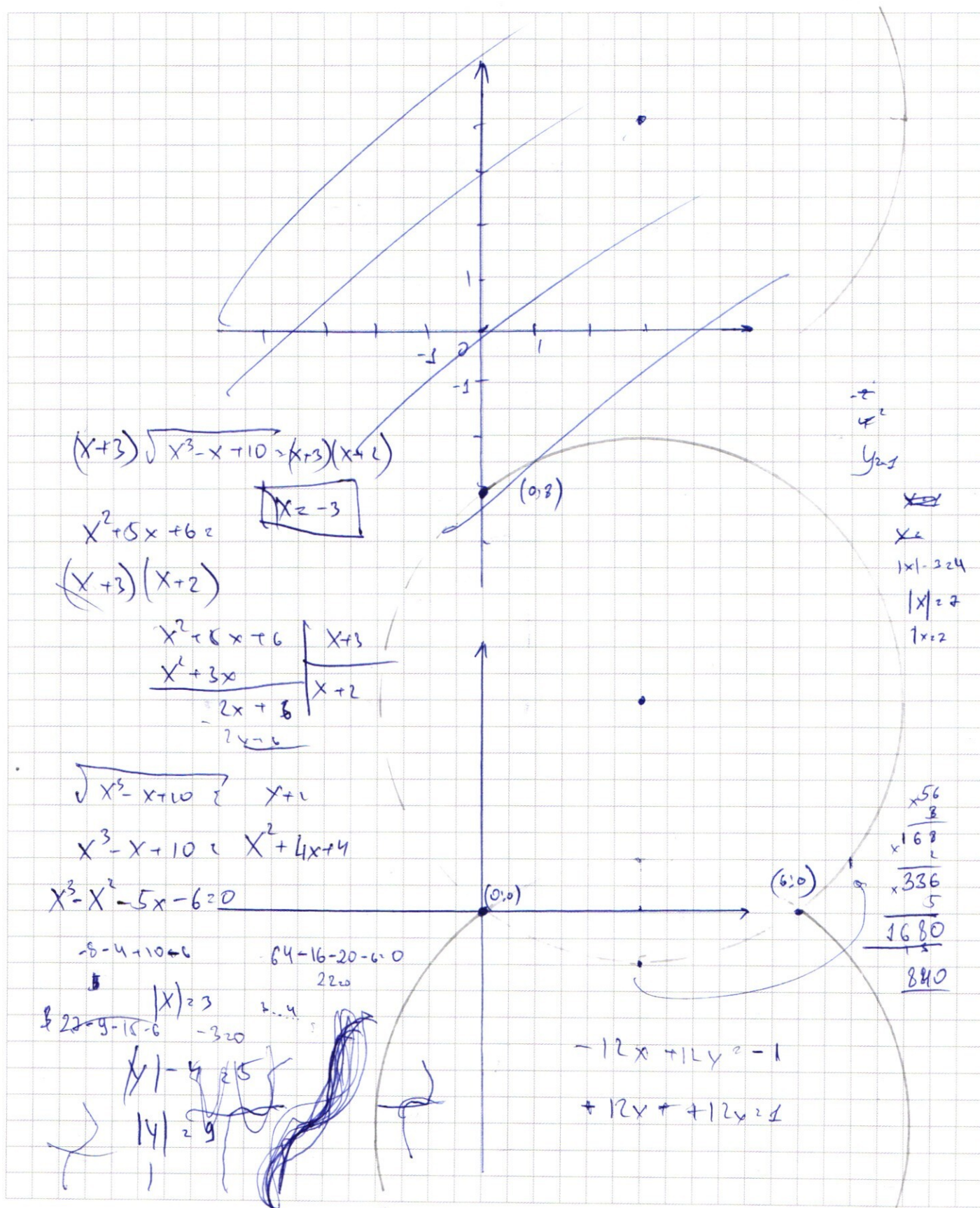
$$x \geq -2;$$

$$x^3-x+10 = x^2+4x+4$$

$$x^3-x^2-5x-6=0$$

Ответ: $x = -3$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

