# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 9 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0;0)$. Муравей двигается по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0\left(-1;\sqrt{3}\right)$ и $N_0\left(2\sqrt{3};2\right)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров $a$ и $b$, при каждой из которых система уравнений
$$\begin{cases} 3(a+b)x+12y=a, \\ 4bx+(a+b)by=1 \end{cases}$$
имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10}=x^2+5x+6$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4+x^2-2x-3x^2|x-1|+1\geqslant 0$.

5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках $A$ и $B$. На первой окружности выбрана точка $C$, а на второй – точка $D$. Оказалось, что точка $B$ лежит на отрезке $CD$, а $\angle CAD=90^\circ$. На перпендикуляре к $CD$, проходящем через точку $B$, выбрана точка $F$ так, что $BF=BD$ (точки $A$ и $F$ расположены по разные стороны от прямой $CD$). Найдите длину отрезка $CF$.

7. [6 баллов] Решите систему
$$\begin{cases} |x-3-y|+|x-3+y|\leqslant 6, \\ (|x|-3)^2+(|y|-4)^2=25. \end{cases}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

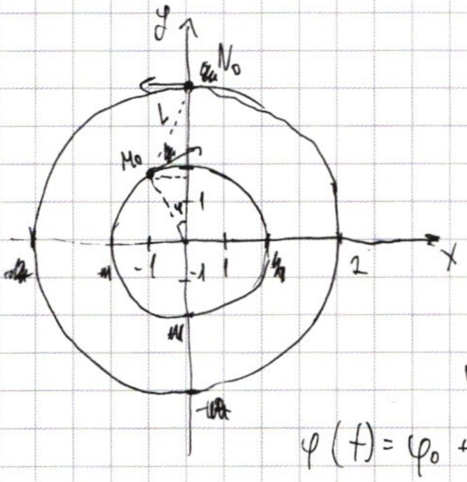
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^2+6x+9$

$R_м = \sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2} = 2$

$R_* = \sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2} = \sqrt{12+4} = 4$




$L = \sqrt{(x_м - x_*)^2 + (y_м - y_*)^2}$

$tg\,\varphi = \frac{x}{y}$

$V_м = V_*$

$\omega_м = 2\omega_*$ т.к. $\frac{R_м}{R_*} = \frac{1}{2}$

$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t$

$L^2 = (x_м - x_*)^2 + (y_м - y_*)^2$

$L^{2\prime} = 2(x_м - x_*) + 2(y_м - y_*)$

$\left(x + \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x + \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) =$

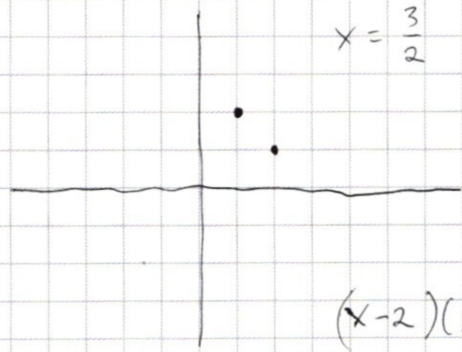
$= x^2 + x\frac{1+\sqrt{13}}{2} + x\frac{1-\sqrt{13}}{2} + \frac{(1+\sqrt{13})(1-\sqrt{13})}{4} =$

$= x^2 + x + \frac{1-13}{4} = x^2 + x - 3$

$2x^4 = 3x^3$

$2x = 3$

$x = \frac{3}{2}$



$3x^3 = 2x$

$3x^2 = 2$

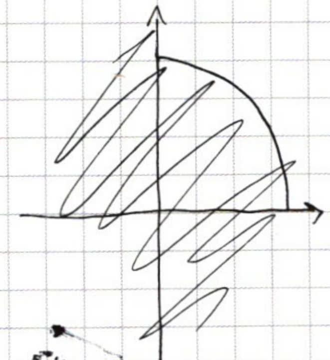
$x = \sqrt{\frac{2}{3}}$

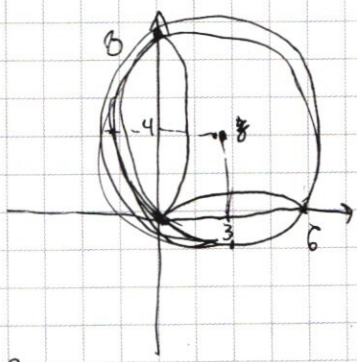
$(x-2)(x^2+x-3)$

$x^3 + x^2 - 3x - 2x^2 - 2x + 6$

$abcdefgh = 1400$

$1400 = 10^2 \cdot 14 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 2 \cdot 7 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$






$9 + (y-4)^2 = 25$

$y - 4 = 4$

$y = 8$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - 5x + 6 & x-2 \\ \hline -\ x^3 - 2x^2 & x^2 + x - 3 \\ x^2 - 5x & \\ x^2 - & \end{array}$$

$x - 5 + x - 1 \le 6$

$2x - 6 \le 6$

$x \le 6$

$-x + 5 - x + 1 \le 6$

$-2x \le 6$

$2x^2 = 3x^3$

$2 = 3x$

$a + 10 > a^3$

$a^3 - a < 10$

$a(a^2-1) < 10$

$((|y|-4))^2 = 25 - (|x|-3)^2$

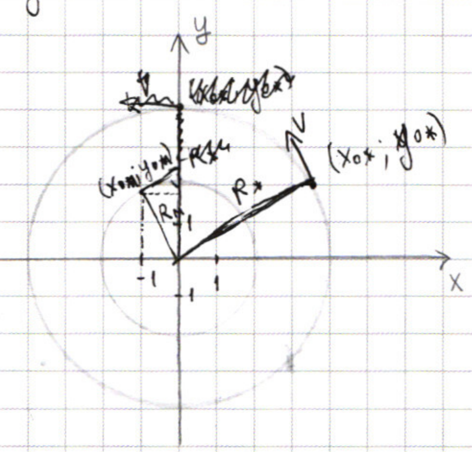
$|y| - 4 = \sqrt{25 - (|x|-3)^2}$

$y = \pm\left(\sqrt{25-(|x|-3)^2} + 4\right)$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1
(Нумеровать только чистовики)

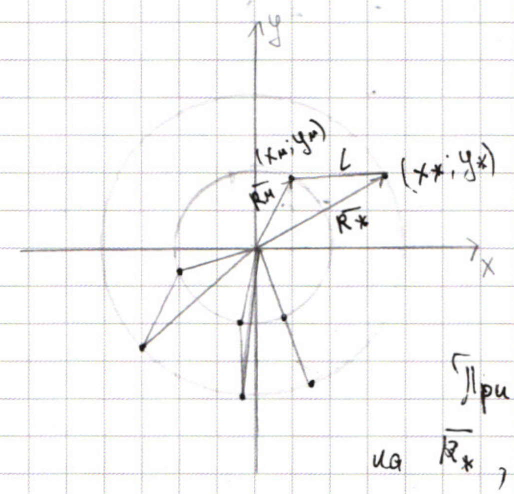
Задача №1




Найдем радиусы окружностей, по которым ползут жук и муравей ($R_ж$ и $R_м$ соответств.)

$R_ж = \sqrt{x_{0ж}^2 + y_{0ж}^2} = 4$

$R_м = \sqrt{x_{0м}^2 + y_{0м}^2} = 2$




В любой момент времени расстояние L можно найти как длину вектора, являющегося разностью векторов $\overline{R_м}$ и $\overline{R_ж}$

$L = \sqrt{(x_м - x_ж)^2 + (y_м - y_ж)^2}$

При этом L будет минимальным если $\overline{R_м}$ будет лежать на $\overline{R_ж}$, тогда L тоже будет лежать на $\overline{R_ж}$ и будет равен 2.

Осталось найти все моменты, когда $\overline{R_м}$ ~~лежит~~ лежит на $\overline{R_ж}$

У муравья и жука одинаковые линейные скорости V. Угловые скорости равны $\omega_м = \frac{V}{R_м}$ и $\omega_ж = \frac{V}{R_ж}$ и соотносятся как $\frac{\omega_м}{\omega_ж} = \frac{\frac{V}{R_м}}{\frac{V}{R_ж}} = \frac{R_ж}{R_м} = 2$

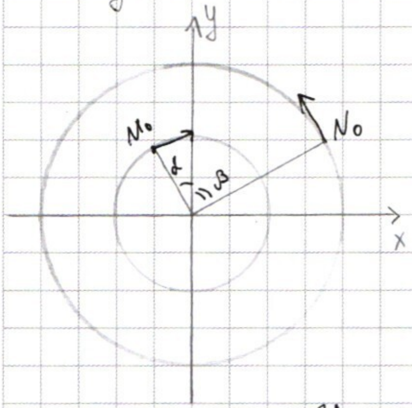
$\omega_м = 2\omega_ж$. Жук и муравей движутся навстречу друг другу, поэтому время между встречами (встречей я называю момент, когда расстояние между ними минимально и равно 2, то есть они проползают мимо друг друга) равно $\frac{2\pi}{\omega_м + \omega_ж} = T$ т.к. суммарно за это время они проползут один круг.

$T = \frac{2\pi}{\omega_м + \omega_ж} = \frac{2\pi}{3\omega_ж}$. за это время жук проползет $\frac{2\pi}{3\omega_ж} \cdot \omega_ж = \frac{2}{3}\pi$, а муравей $\frac{2\pi}{3\omega_ж} \cdot 2\omega_ж = \frac{4}{3}\pi$, т.е. в два раза больше. За время между встречами жук проползает $\frac{2}{3}\pi$ т.е. $\frac{1}{3}$ окружности. Значит ~~после первой~~ через три встречи он вернется в изначальную точку. То есть

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

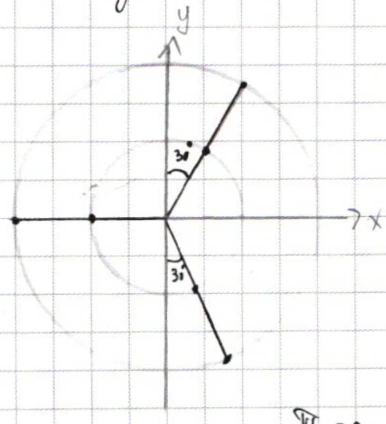
У нас есть всего три точки встречи, между которыми по $\frac{1}{3}$ окружности.




$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{x_{0м}}{y_{0м}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

$$\operatorname{tg}\beta = \left|\frac{x_{0ж}}{y_{0ж}}\right| = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow \beta = 60^\circ$$

Изначально между муравьем и жуком угол $\alpha+\beta = 90^\circ$, и они ползут навстречу друг другу. К моменту встречи муравей проползет по дуге, в два раза большей, чем у жука т.е. муравей проползет $60^\circ$, а жук $30^\circ$. Нетрудно догадаться, что радиусы, на которых они будут находиться в момент встречи повернуты на $30^\circ$ по ч.с. от оси $y$.




Каждый раз этот радиус встречи поворачивается на $\frac{1}{3}$ окружности т.е. $120^\circ$. Тогда второй радиус повернут на $30^\circ$ против ч.с. от нижней части оси $y$, а третий совпадает с осью $x$ и направлен противоположно ей.

Тогда координаты муравья в моменты встреч равны $(1; \sqrt{3})$, $(1; -\sqrt{3})$ и $(-2; 0)$

Ответ: $(1; \sqrt{3})$, $(1; -\sqrt{3})$ и $(-2; 0)$

Задача № 4

$1400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 4 \cdot 2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 8 \cdot 5^2 \cdot 7$ – варианты представления 1400 в виде произведения натуральных чисел меньше 10. других нет т.к. $2 \cdot 5 \geq 10$, $2 \cdot 7 > 10$, $7 \cdot 5 > 10$, $5^2 > 10$

Во всех вариантах разложения меньше 8 чисел, поэтому оставшиеся места будут занимать единицы т.к. только при умножении на 1 произведение не изменяется.

Восьмизначных чисел состоящих из 3 двоек, 2 пятерок, семерки и 2 единиц всего $8! : 3! : 2! : 2!$ т.к. 8-значных чисел, состоящих из конкретного набора цифр всего $8!$, а из-за повторения (существует 3! способов расставить 3 числа) двоек мы считаем каждое число $3!$ раз, и из-за повторения пятерок мы считали каждое число $2!$ раза и из-за повторения единиц мы считаем каждое число $2!$ раза

$$\frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot 2 \cdot \cancel{1} \cdot 2 \cdot \cancel{1}} = 7 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 4$$

Аналогично чисел, состоящих из 4, 2, 5, 5, 7, 1, 1, 1

$$\frac{8!}{2! \cdot 3!} = 7 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2$$

$$\begin{array}{r} \times\,42 \\ 80 \\ \hline 3360 \end{array}$$

И чисел, состоящих из 8, 5, 5, 7, 1, 1, 1, 1

$$\frac{8!}{2! \cdot 4!} = \frac{\overset{4}{\cancel{8}} \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$$

То есть всего искомых чисел $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 + 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 + 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 =$

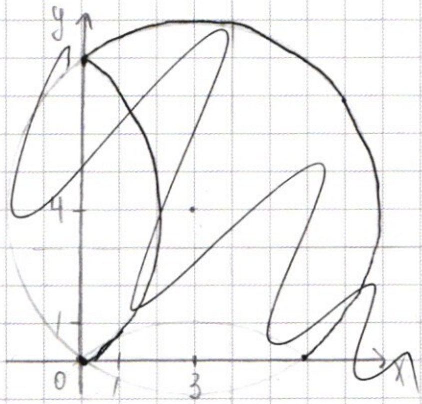
$= 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 = 42 \cdot 80 = 3360$

Ответ: 3360

Задача N7

$(x-3)^2+(y-4)^2=25$ - уравнение окружности с радиусом 25 и центром в точке $(3;4)$. ~~[illegible]~~

Для положительных $x$ и $y$ график уравнения $(|x|-3)^2+(|y|-4)^2=25$ будет выглядеть так же. Разберемся, что происходит при отрицательных значениях. Начнем с того, что одновременно $x$ и $y$ отрицательными




быть не могут, это видно из графика $(x-3)^2+(y-4)^2=25$.

~~Предположим $x$ положительный. тогда~~

~~тогда $(|x|-3)^2=(x-3)^2$ следовательно~~

~~$(y-4)^2=(|y|-4)^2$~~

~~$|y|-4=y-4 \Rightarrow |y|=y$~~

~~$|y|-4=4-y \Rightarrow |y|=8-y$~~

~~Так как $y$ и $x$ теперь используются с модулем, отрицательная по $y$ часть отражается относительно $Ox$, а отрицательная по $x$ часть отражается относительно $Oy$.~~ ~~График~~ - зависимость $y$ от $x$, поэтому

$y=\pm\left(\sqrt{25-(|x|-3)^2}+4\right)$

$y = \pm\left(\sqrt{25-(|x|-3)^2}+4\right)$.

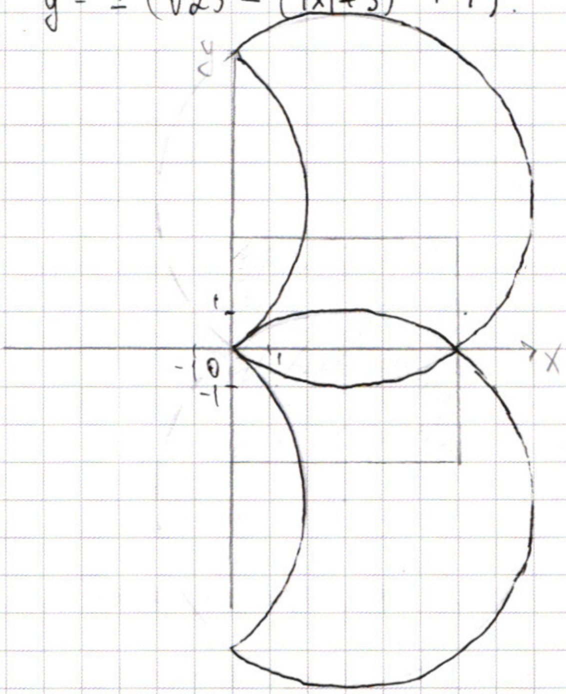



График $y=\left(\sqrt{25-(|x|-3)^2}+4\right)$ выглядит как окружность, часть которой расположенная слева от Oy отзеркалена относительно нее. График $y=\pm\left(\sqrt{25-(|x|-3)^2}+4\right)$ является объединением графиков $y=-\left(\sqrt{25-(|x|-3)^2}+4\right)$ и $y=\sqrt{25-(|x|-3)^2}+4$

Теперь разберемся с $|x-y-3|+|x+y-3|\leq 6$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-y-3+x+y-3\leq 6\\ x\geq y+3 \quad x+y\geq 3\end{cases}\\ \begin{cases}x-y-3-x-y+3\leq 6\\ x\geq y+3\\ x+y\leq 3\end{cases}\\ \begin{cases}-x+y+3-x-y+3\leq 6\\ x\leq y+3\\ x+y\leq 3\end{cases}\\ \begin{cases}-x+y+3+x+y-3\leq 6\\ x\leq y+3\\ x+y\geq 3\end{cases}\end{array}\right.$$

① $x-y-3+x+y-3\leq 6$

$2x-6\leq 6$

$x\leq 6$

$x+y\geq 3 \Rightarrow y\geq -3$

$x\geq y+3 \Rightarrow y\leq 3$

② $x-y-3-x-y+3\leq 6$

$-2y\leq 6$

$y\geq 3$

$x\geq y+3 \Rightarrow x\geq 6$

$x+y\leq 3 \Rightarrow x=0$ при $y=3$, при остальных $y$ $x\in\varnothing$

$y=3 \quad x=0$

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

③ $-\cancel{x}+y+\cancel{3}+\cancel{x}+y-\cancel{3}\leq 6$

$2y\leq 6$

$y\leq 3$

$x+y\geq 3 \Rightarrow x\geq 0$

$x\leq y+3 \Rightarrow x\leq 6 \Rightarrow y\geq -3$

④ $-x+\cancel{y}+3-x-\cancel{y}+3\leq 6$

$-2x+6\leq 6$

$-2x\leq 0$

$x\geq 0$

$x\leq y+3 \Rightarrow y\geq -3$

$x+y\leq 3 \Rightarrow y\leq 3,\ x\leq 3$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\leq 6\\ -3\leq y\leq 3\end{cases}\\ \begin{cases}0\leq x\leq 6\\ -3\leq y\leq 3\end{cases}\\ \begin{cases}0\leq x\leq 3\\ -3\leq y\leq 3\end{cases}\\ \begin{cases}y=3\\ x=0\end{cases}\end{array}\right.$$

Везде $y$ лежит в диапазоне от $-3$ до $3$

при $y=-3$

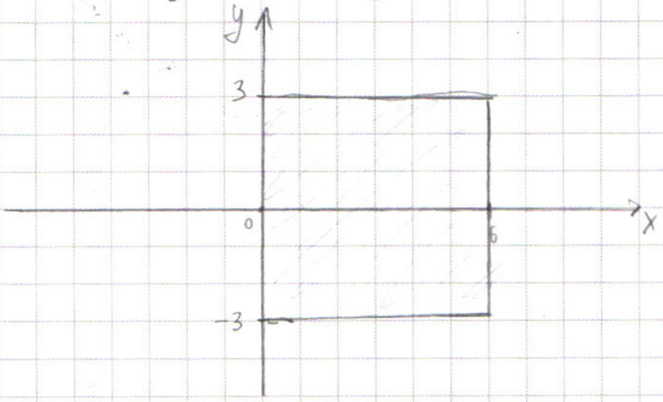
$|x-3+3|+|x-3-3|\leq 6$

$|x|+|x-6|\leq 6$

$x\leq 6 \quad x\geq 0$

Заметим, что $|x-3+y|$ и $|x-3-y|$ отличаются только знаком у $y$, поэтому для $y$ и $-y$ значения $x$ будут одинаковы т.е. график симметричен относительно $Ox$.

$|x-3+y|+|x-3-y| \le 6$




$x-3+\cancel{y}+x-3-\cancel{y} \le 6$

$x \ge y+3$

$x \le 6 \qquad -3 \le y \le 3$

$-x+3-\cancel{y}-x+3+\cancel{y} \le 6$

$x < 3-y$

$x \ge 0 \qquad -3 \le y \le 3$

$\cancel{x}-\cancel{3}+y+\cancel{x}+\cancel{3}+y \le 6$

$y \le 3 \qquad 3-y \le x \le y+3$

$0 \le x \le 6$

$-\cancel{x}+\cancel{3}-y+\cancel{x}-\cancel{3}-y \le 6$

$y \ge -3 \qquad y+3 \le x \le 3-y$

$0 \le x \le 6$

То есть это уравнение квадрата. ~~Пересечение с первым графиком~~

Ответ найдем графически

$y = \pm\left(\sqrt{25-(|x|-3)^2}+4\right)$ при $0 \le x \le 6$ и $-3 \le y \le 3$

То есть теперь нам не нужен $|x|$ т.к. $x \ge 0$

$y = \pm\left(\sqrt{25-(x-3)^2}+4\right)$ при $0 \le x \le 6$ и $-3 \le y \le 3$

Строим график. $y = \pm 3$

$0 \le x \le 6$

$y = \pm 2$

~~$|x-5|+|x-1| \le 6$~~

~~$x-5+x-1 \le 6 \qquad -x+5-x+1 \le 6$~~

~~$x \le 6 \quad x \ge 5 \qquad x \ge 0 \quad x \le 1$~~

~~$-x+5+x-1 \le 6$~~

~~$4 \le 6 \quad x = \forall$~~

~~$x < 5, \ x > 1$~~

$1 < x < 5$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

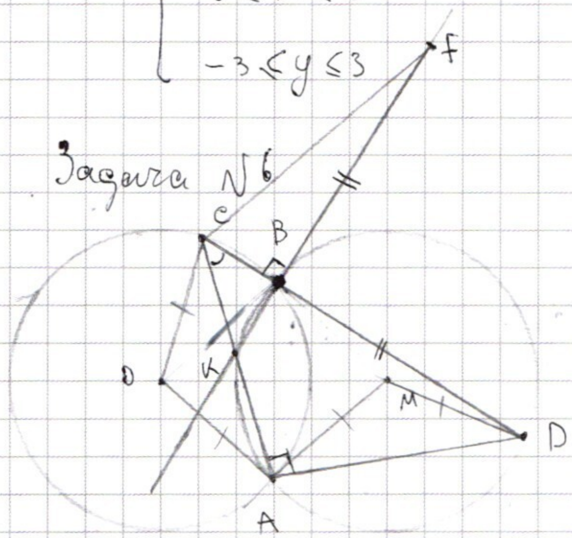
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: $\begin{cases} y = \pm\left(\sqrt{25-(x-3)^2}+4\right) \\ 0 \le x \le 6 \\ -3 \le y \le 3 \end{cases}$

Задача N 6




$Cf = \sqrt{CB^2 + Bf^2} = \sqrt{CB^2 + BD^2}$

K - точка пересечения CA и fB

$\Delta ACD \sim \Delta BCK$ по острому углу C и прямому углу ($\angle B = \angle A = 90°$)

$\frac{CB}{CA} = \frac{BK}{AD}$

$CD^2 = AD^2 + AC^2$ по т. Пифагора в $\Delta CAD$

$(CB + BD)^2 = AD^2 + AC^2$

Задача N 2

$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$

Система имеет бесконечно много решений если из обоих уравнений следует одна и та же зависимость $y(x)$ т.к. оба уравнения линейные

$y = \frac{a}{12} - \frac{1}{4}x(a+b)$

$4bx + (a+b)b\frac{a}{12} - \frac{1}{4}x(a+b)^2 b = 1$

Чтобы уравнение имело бесконечное число решений, нужно чтобы это было тождеством

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$4bx + \frac{ab(a+b)}{12} = 1 + \frac{1}{4}x(a+b)^2 b$ – две зависимости вида $y = kx + b$.

Чтобы имелось $\infty$ много решений нужно чтобы $k_1 = k_2$ и $b_1 = b_2$.

$$\begin{cases} \frac{ab(a+b)}{12} = 1 \\ \frac{1}{4}(a+b)^2 b = 4b \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab(a+b) = 12 \\ (a+b)^2 b = 16b \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab(a+b) = 12 \\ (a+b)^2 = 16 \end{cases}$$

или $b = 0$, тогда $\frac{ab(a+b)}{12} = 1$ т.е. $1 = 0$, что невозможно $\Rightarrow b \neq 0$

$$\begin{cases} a+b = \pm 4 \\ ab(a+b) = 12 \end{cases}$$

Ответ: 1 и 3 ; $-2+\sqrt{7}$ и $-2-\sqrt{7}$

$$\begin{cases} a+b = 4 \\ ab(a+b) = 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} a+b = -4 \\ ab(a+b) = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b = 4 \\ 4ab = 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} a+b = -4 \\ -4ab = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b = 4 \\ ab = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} a+b = -4 \\ ab = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases}$$

$a = -b - 4$

$-(b+4)b = -3$

$b^2 + 4b = 3$

$b^2 + 4b - 3 = 0$

$D = 16 + 12 = 28$

$b = -2 \pm \sqrt{7}$

$a = 2 \mp \sqrt{7} - 7 = -2 \mp \sqrt{7}$

$$\begin{cases} a = -2 - \sqrt{7} \\ b = -2 + \sqrt{7} \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -2 + \sqrt{7} \\ b = -2 - \sqrt{7} \end{cases}$$

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача N 3

$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$

$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = (x+2)(x+3)$

$\sqrt{x^3-x+10} = x+2$ или $x+3=0$

$x^3-x+10 = x^2+4x+4$ $\qquad x=-3$

$x^3-x^2-5x+6=0$ $\qquad x^3-x+10 \geq 0$ при $x=-3$

$-27+3+0<0 \Rightarrow$ не подходит

$x^2+5x+6=0$

$x_1+x_2=-5$

$x_1 x_2 = 6$

$x_1=-2 \quad x_2=-3$

$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$

$=(x-x_1)(x-x_2)$

возможные корни - делители свободного члена (числа 6)

$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$2^3-2^2-5\cdot 2+6 = 8-4-10+6=0 \Rightarrow$ один из корней равен 2

$x^3-x^2-5x+6=(x-2)(\ldots)$

$x^3-x^2-5x+6=(x-2)(x^2+x-3)$

$$\begin{array}{r|l} x^3-x^2-5x+6 & x-2 \\ \hline -\,(x^3-2x^2) & x^2+x-3 \\ -x^2-5x & \\ -\,(-x^2-2x) & \\ -3x+6 & \\ -3x+6 & \\ 0 & \end{array}$$

$x-2=0$ или $x^2+x-3=0$

$x=2$ $\qquad D=b^2-4ac=1+12=13$

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

Проверка корней. $x^3-x+10 \geq 0$

$2^3-2+10=16>0$

$-\dfrac{(1+\sqrt{13})^3}{8}+\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}+10>0$

$\dfrac{(\sqrt{13}-1)^3}{8}-\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}+10>0$

Т.к. $3<\sqrt{13}<4 \Rightarrow -16<-\dfrac{(1+\sqrt{13})^3}{8}<-8$

$2<\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}<2,5 \qquad 1<\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}<1,5$

$<\dfrac{(\sqrt{13}-1)^3}{8}<$

Проверка корней:

① $(2+3)\sqrt{2^3-2+10} = 2^2+5\cdot 2+6$

$5\cdot 4 = 4+10+6$

$20=20$

② $\left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2}+3\right)\sqrt{\left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right)^3+\frac{-1+\sqrt{13}}{2}+10} = \left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right)^2-5\,\frac{1+\sqrt{13}}{2}+6$

$(-1-\sqrt{13})^2 = (1+\sqrt{13})^2 = 1+2\sqrt{13}+13 = 14+2\sqrt{13} = (7+\sqrt{13})2$

$(-1-\sqrt{13})(7+\sqrt{13})2 = -2(7+7\sqrt{13}+\sqrt{13}+13) = -2(20+8\sqrt{13}) =$

$= -8(5+2\sqrt{13})$

$\frac{-8(5+2\sqrt{13})}{8} = -(5+2\sqrt{13})$

$-5-2\sqrt{13}+\frac{1+\sqrt{13}}{2}+10 = 5,5-$

Ладно, мне лень считать. Дайте бедному ребенку калькулятор.
Серьезно, или в решении есть что-то неправильное, или это совсем жестоко.

№ 4

$2x^4+x^2-2x-3x^2|x-1|+1\geq 0$

$2x^4+x^2-2x-3x^2(x-1)+1\geq 0$, $x>1$ или $2x^4+x^2-2x+3x^2(x-1)+1\geq 0$, $x<1$

$2x^4+x^2-2x-3x^3+3x^2+1\geq 0$

$2x^4-3x^3+4x^2-2x+1\geq 0$

для $x>1$ $2x^4+1-3x^3>0$

и $4x^2-2x>0$ т.к. чем больше степень, тем больше число. для $x=\frac{3}{2}$ $2x^4=3x^3$, для $x=1$ разница между ними равна 1 и при $x\uparrow$ она уменьшается

$4x^2>2x$ при всех $x>1$ т.к. $x^2>x$

~~для всех $0<x<1$ все числа меньше 1~~

$\Rightarrow 2x^4-3x^3+4x^2-2x+1\geq 0$

$2x^4+x^2-2x+3x^3-3x^2+1\geq 0$

$2x^4+3x^3-2x^2-2x+1\geq 0$

для $0<x<1$ $2x^3>2x^4$ т.к. с ростом степени число уменьшается. при $x=\frac{2}{3}$ $3x^3$ и $2x^2$ равны, при $x\downarrow$ $2x^2>3x^3$. Максимальная разница при $x=1$ и она равна 1

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

при $x=1$

$2x^4+x^2-2x-3x^2\cdot 0+1 = 2+1-2+1 = 2 > 0$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)