МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 2 ШИФ[

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Вокруг птичьей кормушки в одной плоскости с ней по двум окружностям с одинаковой скоростью летают синица и снегирь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой кормушка (общий центр окружностей) находится в точке $O(0;0)$. Синица двигается по часовой стрелке, а снегирь – против. В начальный момент времени синица и снегирь находятся в точках $M_0\left(\sqrt{3};3\right)$ и $N_0\left(6;-2\sqrt{3}\right)$ соответственно. Определите координаты всех положений снегиря, в которых расстояние между птицами будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b, при каждой из которых система уравнений
$$\begin{cases} 2(a-b)x+6y=a, \\ 3bx+(a-b)by=1 \end{cases}$$
имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25}=x^2+3x-10$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $6x^4+x^2+2x-5x^2|x+1|+1\geqslant 0$.

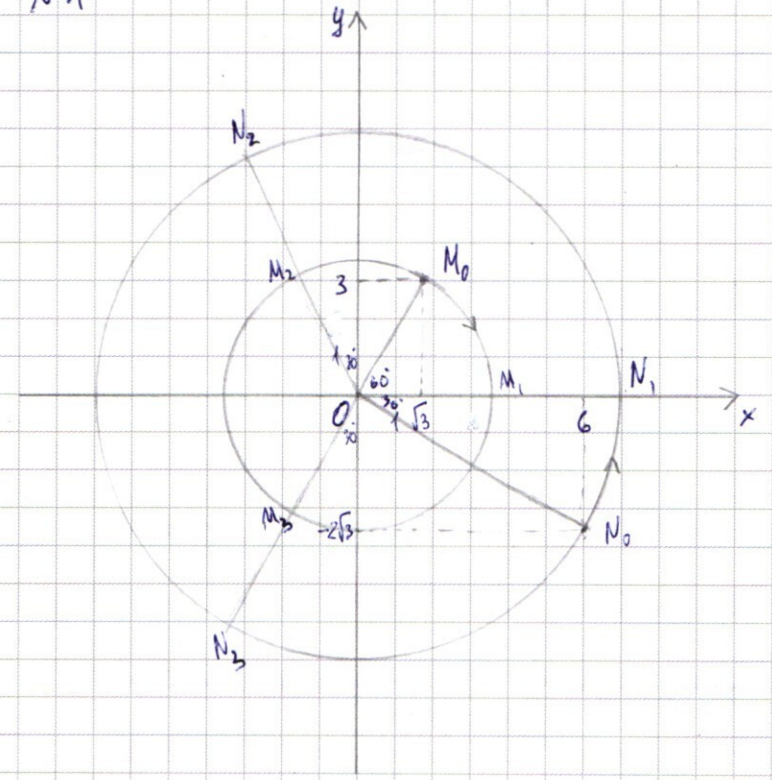
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 7000. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 7 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD=90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF=BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

7. [6 баллов] Решите систему
$$\begin{cases} |x+y+5|+|x-y+5|\leqslant 10, \\ (|x|-5)^2+(|y|-12)^2=169. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1



Сначала найдём радиусы окр-ей по т. Пифагора:

R окр. синицы $= \sqrt{3^2+(\sqrt3)^2} = 2\sqrt3 = OM_0$

R окр. снегиря $= \sqrt{6^2+(-2\sqrt3)^2} = 4\sqrt3 = ON_0$.

Их скорости одинаковы и пусть равны v.

Для синицы $v = 1°$ за ед. врем. $= \frac{2\pi\cdot 2\sqrt3}{360°}$.

Для снегиря $v = 0{,}5°$ за ед. врем., т.к. его окр. в 2р. длиннее окр. синицы $\left(\frac{2\pi\cdot 4\sqrt3}{2\pi\cdot 2\sqrt3} = 2\right)$.

Найдём, когда они в первый раз будут на одной прямой с т. O.

~~Пусть A~~ Введём точки $A(\sqrt3; 0)$ и $B(6; 0)$.

ΔOM_0A прямоуг., гипот. $OM_0 = 2\,OA$ катета $\Rightarrow \angle OM_0A = 30°$, $\angle M_0OA = 60°$.

ΔON_0B прямоуг., гипот. $ON_0 = 2\,N_0B$ катета $\Rightarrow \angle N_0OB = 60°$.

Когда синица пролетит дугу 60° ~~св~~ и окажется на луче Ox (в т. M_1), снегирь пролетит дугу 30° ей навстречу и окажется на том же луче (в т. N_1). Это первый раз, когда синица, снегирь и центр обр. одну прямую. Назовём такое положение „встречей".

До след. „встречи" они вместе должны пролететь целый круг, а т.к. синица пролетает угол, в 2 р. ~~меньший~~, больший, снегирь пролетит $\frac{1}{3}$ от $360° = 120°$, и окажется в т. N_2 такой, что $\angle N_2Oy = 30°$.

Далее они снова пролетят углы друг до „встречи" снегирь опять 120°, окажется в т. N_3, $\angle N_3Oy = 150°$.

След. „встреча" произойдет снова на луче Ox в т. M_1 и N_1, и далее положения будут повторяться.

В моменты „встреч" синица и снегирь будут на кратчайшем расст. друг от друга, равном $R_N - R_M$. В любой другой момент синица, снегирь и центр обр. $\triangle ONM$, и расст. между N и M $x > ON - OM = R_N - R_M$ (по нер-ву Δ-ка).

Найдем коорд. точек N_1, N_2, N_3. $N_1(4\sqrt{3}; 0)$, $N_2(-2\sqrt{3}; 6)$, $N_3(-2\sqrt{3}; -6)$.

Ответ: $(4\sqrt{3}; 0)$, $(-2\sqrt{3}; 6)$, $(-2\sqrt{3}; -6)$.

№5

$7000 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 7$. Нам нужно найти все последовательности из 8 цифр, в произведении дающие это число. Заметим, что 5 и 7 нельзя ни с чем $\neq 1$ перемножить, чтобы получилась цифра, поэтому в записи обязательно есть 5, 5, 5, 7. 2^3 из 4-х цифр можно получить след. способами: $2\cdot2\cdot2\cdot1$, $4\cdot2\cdot1\cdot1$, $8\cdot1\cdot1\cdot1$.

Получилось 3 набора: 7,5,5,5,2,2,2,1; 7,5,5,5,4,2,1,1; 7,5,5,5,8,1,1,1.

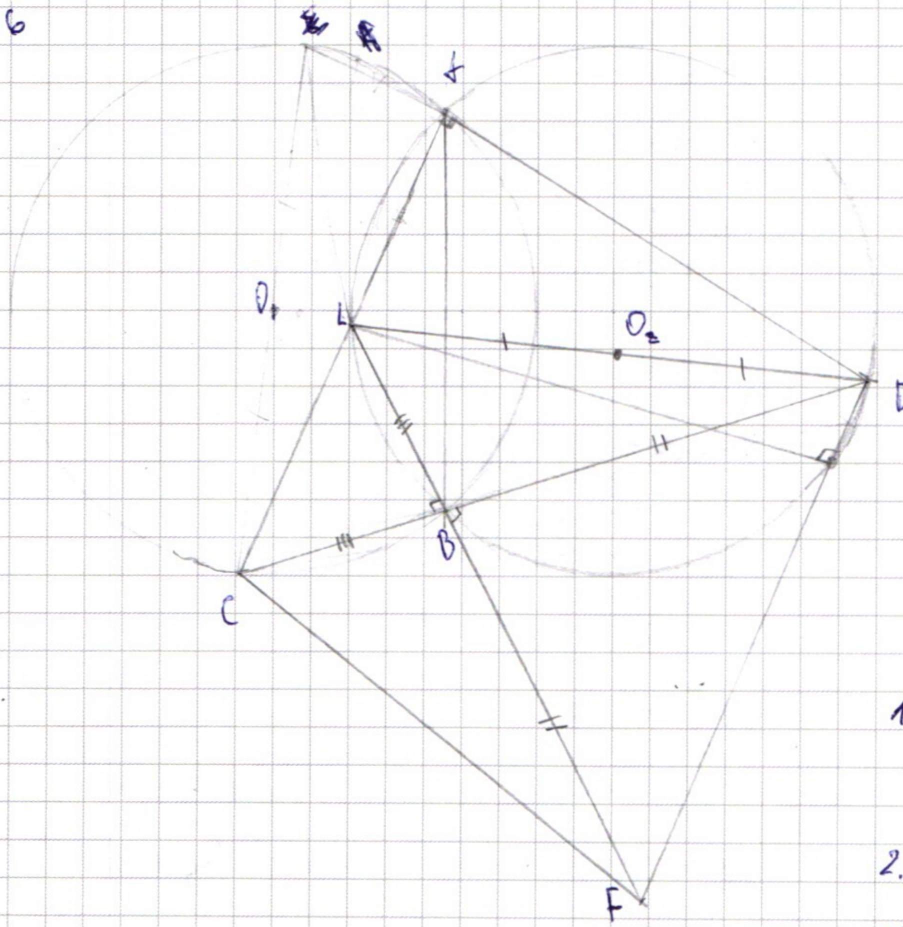
Из 1-го $\frac{8!}{3!\cdot3!}$ чисел, из 2-го $\frac{8!}{3!\cdot2!}$ чисел, из 3-го $\frac{8!}{3!\cdot3!}$ чисел. Сложим.

$\frac{2\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot3\cdot2} + \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot2}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}} = 8\cdot7\cdot5\cdot2(4+6) = 5600$.

Ответ: 5600 чисел.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6



Дано: окр. $(O_1, 7)$, окр. $(O_2, 7)$ перес. в т. A, B, $C \in$ окр. (O_1), $D \in$ окр. (O_2), CBD – прямая, $\angle CAD = 90°$, $\angle CBF = 90°$, $BF = BD$.

Найти: CF.

Решение:

1. Отметим на окр. (O_2) т. L такую, что LD – диаметр.
2. $\angle LAD$ – впис., ~~угол~~ опир. на диаметр $\Rightarrow \angle LAD = 90°$ $\Rightarrow L \in CA$. $\angle LBD$ – впис., опир. на диам. $\Rightarrow \angle LBD = 90° \Rightarrow L \in FB$.
3. $\angle BAL$ впис. в окр. (O_2) ~~на в~~ $= \angle BAC$, впис. в окр. (O_1). Радиусы окр. равны $\Rightarrow$ $\Rightarrow BL = BC$.
4. $\triangle BLD = \triangle BCF$ по 2 стор. и $\angle$ между ними

$BD = BF$ (по усл.)
$\angle LBD = \angle CBF = 90°$ $(LF \perp CD)$
$BL = BC$ (по п. 3)

$\Rightarrow \triangle BLD = \triangle BCF \Rightarrow CF = LD = 2R$ (диаметр) $= 14$.

Ответ: $CF = 14$.

№7

Второе равенство – ур-е окр-ти. На графике изобр. его решения с учётом модулей.

Рассмотрим 1-е нер-во и возможные пары сочетаний знаков чисел под модулями.

1. $x+y+5 \geq 0 \quad x-y+5 \geq 0$

$\begin{cases} x+y \geq -5 \\ x-y \geq -5 \end{cases} \quad x \geq -5$

$x+\cancel{y}+\cancel{5}+x-\cancel{y}+\cancel{5} \leq 10$

$x \leq 0$

$x \in [-5;0]$

2. $x+y+5 \geq 0 \quad x-y+5 \leq 0$

$\begin{cases} x+y \geq -5 \\ x-y \leq -5 \end{cases} \quad y \geq 0$

$\cancel{x}+y+\cancel{5}-\cancel{x}+y-\cancel{5} \leq 10$

$y \leq 5$

$y \in [0;5]$

3. $x+y+5 \leq 0 \quad x-y+5 \geq 0$

$\begin{cases} x+y \leq -5 \\ x-y \geq -5 \end{cases} \quad y \leq 0$

$-\cancel{x}-y-\cancel{5}+\cancel{x}-y+\cancel{5} \leq 10$

$y \geq -5$

$y \in [-5;0]$

4. $x+y+5 \leq 0 \quad x-y+5 \leq 0$

$\begin{cases} x+y \leq -5 \\ x-y \leq -5 \end{cases} \quad x \leq -5$

$-x-\cancel{y}-5-x+\cancel{y}-5 \leq 10$

$x \geq -10$

$x \in [-10;-5]$.

Все решения наход. в промежутке $x \in [-10;0]$, $y \in [-5;5]$ (объединение).

На графике возможные решения (~~уже~~ с учётом обоих усл-ий) выделены жирной линией (нек-ые решения не видны, они наход. симметрично отно. прямых Ox и Oy.

(0;0) подходит.

Из 1-го нер-ва след., что $\begin{cases} x+y+5 \leq 10 \\ x-y+5 \leq 10 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y \leq 5 \\ x-y \leq 5 \end{cases}$ $\begin{cases} y \leq 5-x \\ y \geq x-5 \end{cases}$ На графике заштрих. допустимые знач-я.

Заметим, что в этот промежуток попадают кроме (0;0) только ~~решения~~ выделенные решения при $x \leq -10$. (-10; 0) подходит.

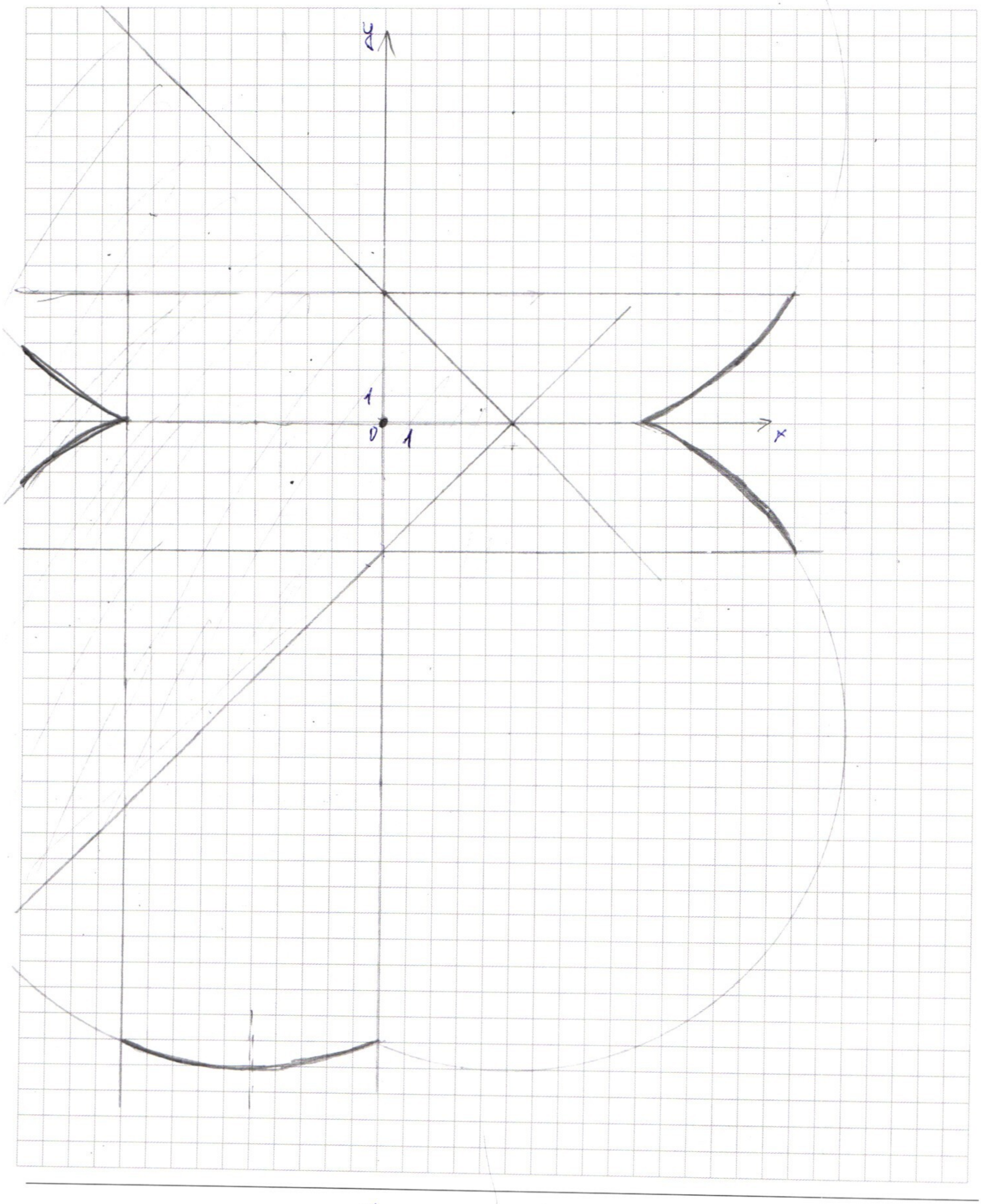
Любое из оставшихся решений: $x < -10$, $|y| \leq 5$. Пусть $x = -10-a$, $a > 0$.

Тогда $|x+y+5|+|x-y+5| = |-5-a+y|+|-5-a-y|$. Т.к. $|y| \leq 5$, оба модуля раскрыв. со знаком –. $10+2a > 10$, а по усл. должно быть ≤ 10. Ост. реш. не подходят.

Ответ: (0; 0), (-10; 0).

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№2

$$\begin{cases} 2(a-b)x+6y=a & |:2 \\ 3bx+(a-b)by=1 & |:b\neq 0 \end{cases}$$, т.к. если $b=0$, то $0=1$, что неверно

$$\begin{cases} (a-b)x+3y=\frac{a}{2} \\ 3x+(a-b)y=\frac{1}{b} \end{cases} \qquad \begin{cases} (a-b+3)(x+y)=\frac{a}{2}+\frac{1}{b} \\ (a-b-3)(x-y)=\frac{a}{2}-\frac{1}{b} \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=\frac{\frac{a}{2}+\frac{1}{b}}{a-b+3} \\ x-y=\frac{\frac{a}{2}-\frac{1}{b}}{a-b-3} \end{cases}$$ – x,y опред. однозначно

Если бы у исходной сист. было не 1 реш., то и здесь бы было не одно.

Ответ: таких пар не существует.

№3

$$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25}=x^2+3x-10 \quad |\cdot 2$$

$$(x+5)\left(\sqrt{x^3-16x+25}-2x+4\right)=0$$

$x=-5$ или $\begin{cases} x^3-16x+25\geq 0 \\ x\geq 2 \\ x^3-16x+25=4x^2-16x+16 \Leftrightarrow x^3-4x^2+9=0 \end{cases}$

$x^2(x-4)+9=0 \Rightarrow x<4$

~~$x=3$,~~

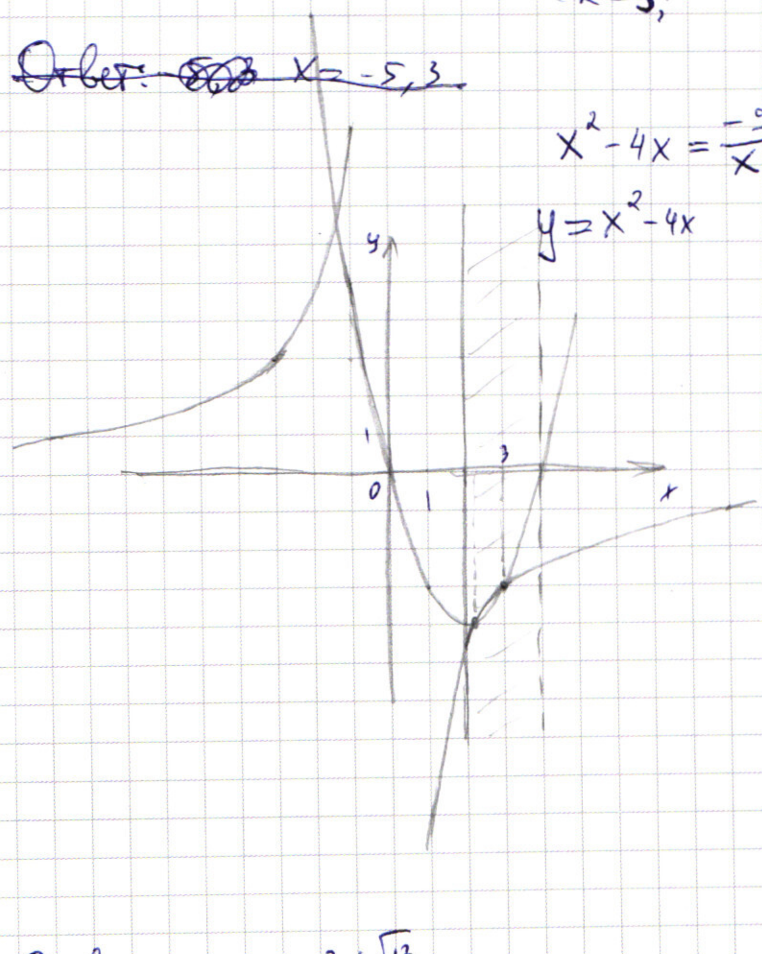
~~$x^2(x-4)=-9$~~

~~$x-4=\frac{-9}{x^2}=-\left(\frac{3}{x}\right)^2$~~

~~Ответ: $x=-5, 3$.~~

$$x^2-4x=\frac{-9}{x}$$

$y=x^2-4x \qquad y=\frac{-9}{x}$



~~Пус~~ Одно из реш. $x=3$, найдем второе.

Пусть $x=2+a$, $0<a<1$.

Подставим в $x^3-4x^2+9=0$.

$8+6a^2+12a+a^3-4a^2-16a-16+9=0$

$a^3+2a^2-4a+1=0$

$(a-1)(a^2+a+1)+2(a-1)^2=0$

$(a-1)(a^2+a+1+2a-2)=0$

$(a-1)(a^2+3a-1)=0$

$a=1 \quad a=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$ Подходит $a=\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$

Ответ: $-5, 3, \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$6x^4+x^2+2x-5x^2|x+1|+1\geq 0$

$x\geq -1$

$6x^4+x^2+2x-5x^3-5x^2+1\geq 0$

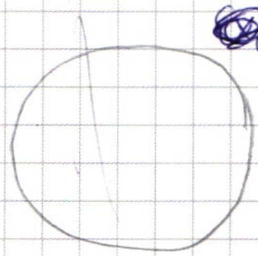
$6x^4-5x^3-4x^2+2x+1\geq 0$

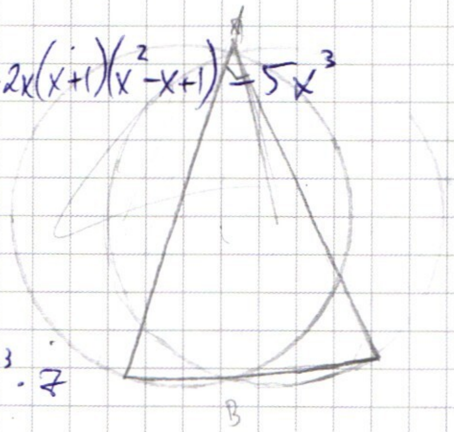
$x<-1$

$6x^4+x^2+2x+5x^3+5x^2+1\geq 0$

$6x^4+5x^3+6x^2+2x+1\geq 0$

$(2x^2-1)^2+2x(x+1)(x^2-x+1)=5x^3$





$\cancel{7000}\,|\,2^3$ $\quad 7000=2^3\cdot 5^3\cdot 7$

$\frac{8\;7\;6\;5\;4\;3\;2}{3\;2\;3\;2}$ $\quad \frac{8\;7\;6\;5\;4\;3\;2}{2\;2\;2}$

$8\cdot 7\cdot 5\cdot 4\cdot 2+8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 2=8\cdot 7\cdot 5\cdot 4(2+3)$

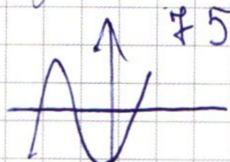
$56\cdot 100=5600$

7555 2221

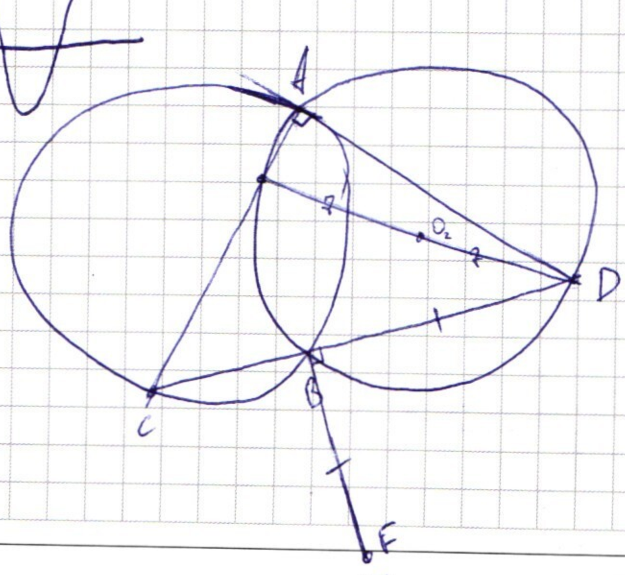
4211

8111

$\cancel{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}$ $\quad \frac{8!}{3!\,3!}$ $\quad \frac{8!}{3!\,2!}$ $\quad \frac{3!}{3!\,3!}$

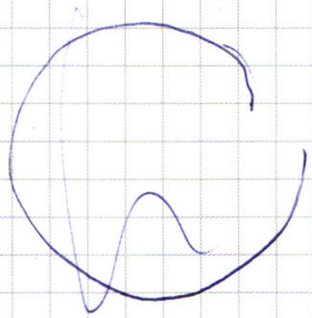


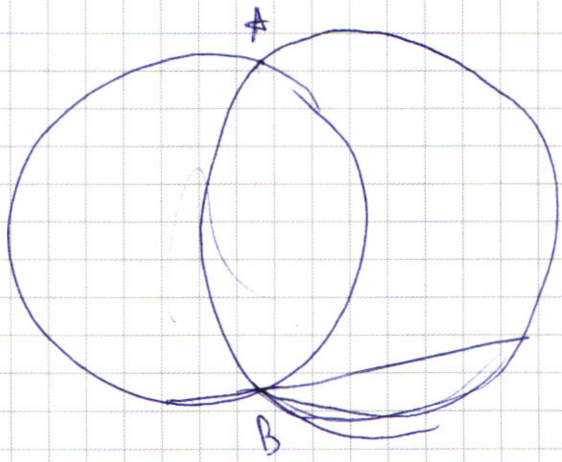
$\begin{cases}|x+y+5|+|x-y+5|\leq 10\\ (|x|-5)^2+(|y|-12)^2=169\end{cases}$

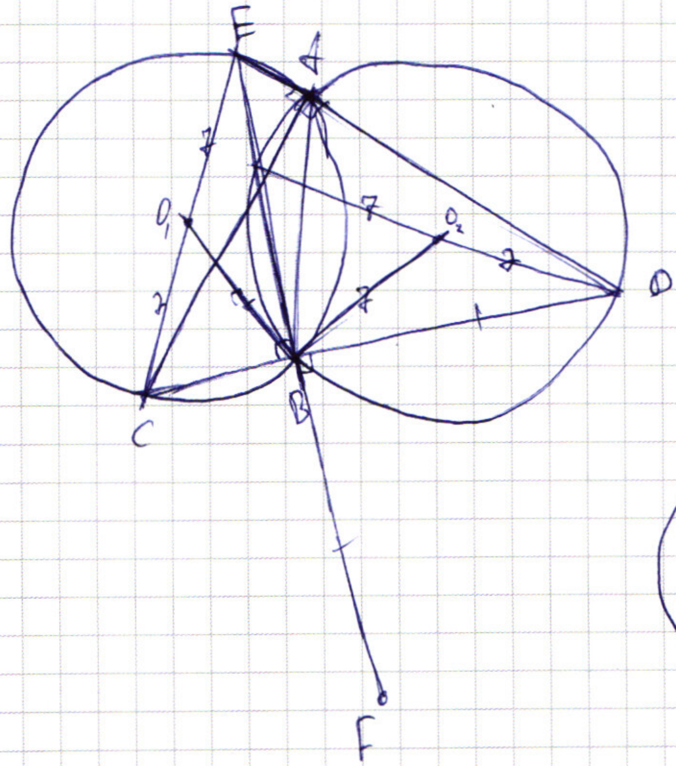


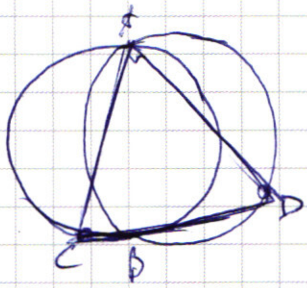
☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

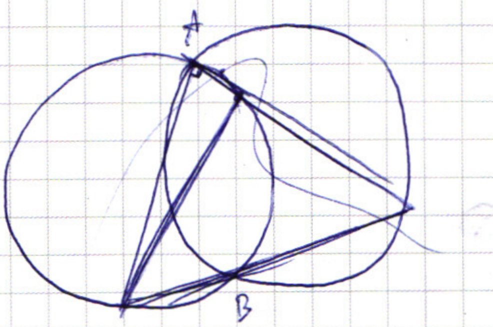
Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

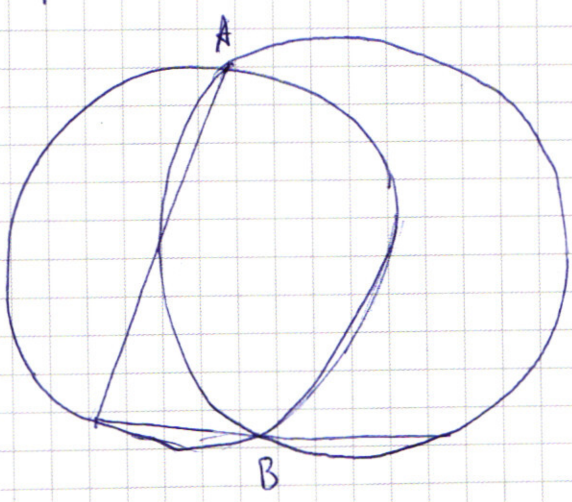










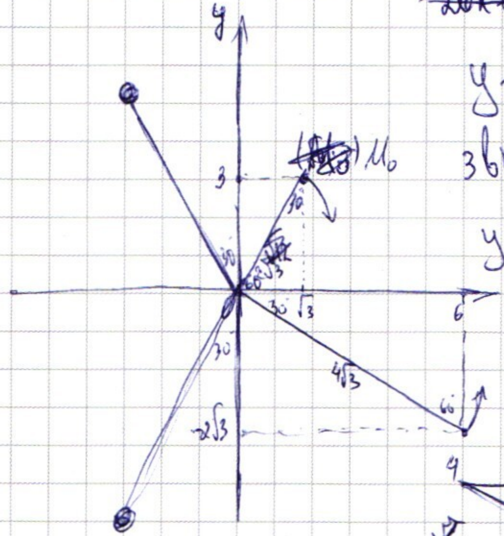


☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$x^3-4x^2+9=0$

$x=3$

~~$2bx+6y=0$~~

$y=bx$

M - секунды

N - секунды

$3bx-b^2y=1$

$y(3-b^2)=1$

$y=\frac{1}{3-b^2}$

$3+9=12$

$36+12=48$

$\sqrt{48}=\sqrt{4\cdot 12}$

~~$(3-2x)(3+2x)$~~

$x^2(x-4)+9=0$

$x^2(x-4)=-9$

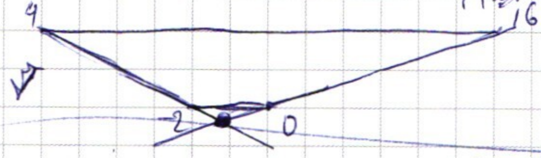
$x-4<0$

$x<4$

N $\frac{2\pi 4\sqrt3}{720}$

M $\frac{2\pi\cdot 2\sqrt3}{360}$ за ед. врем. 1° за ед. вр.

0,5° за ед. вр.



60 ед. вр.

30 ед. вр.

$x^2(x-4)=-9$

$\begin{cases}2(a-b)x+6y=a\\ 3bx+(a-b)by=1\end{cases}$

$\begin{cases}2ax-2bx+6y=a\\ 3bx+aby-b^2y=1\end{cases}$

[4;16] [-2;0]

$\begin{cases}2ax-2bx+6y=a\\ 3x+ay-by=\frac16\end{cases}$

$9+4=13$

$(2+a)^3-16(2+a)+25=$

$=8+6a^2+12a+a^3-32-16a+25=$

$=a^3+6a^2-4a+33$

~~$(a-b)(2x-by)+6y-3bx=a-1$~~ $-3\pm\sqrt{13}$ $4+4a+a^2$

$\begin{cases}(a-b)x+3y=\frac a2\\ 3x+(a-b)y=\frac16\end{cases}$

$(a-b)(x+y)+3y+3x=\frac a2+\frac16$

$(a-b)(x-y)+3y-3x=\frac a2-\frac16$

$(4-a)^3-16(4-a)+25$

$64-48a+12a^2-a^3-64+16a+25$

$-a^3+12a^2-32a+89$

$(x+y)(a-b+3)$

$(x-y)(a-b-3)$

$a^3+6a^2-4a+33+b^3-12b^2+32b-89=0$

$a^3+b^3+6a^2-12b^2-4a+32b-56=0$

$x^3-16x+25=4x^2-16x+16=4(x-2)^2$

~~$x^3-16x+25=(2x-4)^2$~~

$-x^3+8x^2-16x+7=$

~~$=-(x-7)(x-1)(x-1)$~~

$\sqrt{x^3-16x+25}=2x-4$

$x\geq 2$

$x(x+4)(x-4)+25=$

$\boxed{8-64}-\boxed{32-64}+25\geq 0$

$x^3-16x+25\geq 0$

$x^3-4x^2+9=0$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$

$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{} = (x+5)(x-2)$

$(x+5)\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^3-16x+25}-(x-2)\right)=0$

$(x+5)\left(\sqrt{\frac{1}{4}x^3-4x+\frac{25}{4}}-x+2\right)=0$

$\left(\frac{1}{2}\sqrt{}\right.$

$x+y+5\leq 10$

$x-y+5\leq 10$

$\cancel{-x(x+4)(x-4)+25}$

$(x\quad)(x\quad)(x\quad) = x^3-16x+25$

$\frac{1}{2}\sqrt{x^3-16x+25} = x-2$

$\sqrt{x^3-16x+25} = 2x-4$

$x^3-16x+25 = 4x^2-16x+16$

$\cancel{x^3-4x^2+9=0}$

$\cancel{x^3+(3+2x)(3-2x)=0}$

$(x+5)(x^2-5x+25) = 4x^2+116$

$= 4(x^2+29)$

$x^3+25 = 4x^2+16$

$x^3+8 = 4x^2-1$

$\underbrace{(x+2)}_{\geq 0}\underbrace{(x^2-2x+4)}_{\geq 0} = (2x+1)(2x-1)$

$5+5$

$x<-10$

$-10 \quad -5 \quad 0$

$-x-y-5+x-y+5\leq 10$

$-2y\leq 10$

$-y\leq 5$

$-2x\leq 20$

$x\geq -10$

$\boxed{x\geq -5}$

$x+y\leq 5$

$x-y\leq 5$

$y\leq 5-x$

$y\geq x-5$

$x+y+5\geq 0$ $\quad$ $x-y+5\geq 0$

$x\geq -5$

$2x\leq 0$

$\cancel{-125+80+25}$

$x+y+5<0$ $\quad$ $x-y+5\geq 0$

$-2y\leq 10$

$y<0$

$y\geq 5$

$x+y\leq 5$

$x-y\geq -5$

$2y<0$

$x+y+5\geq 0$ $\quad$ $x-y+5<0$

$y>0$

$y\leq 5$

$x+y+5-x+y-5\leq 10$

$x+y\geq -5$

$x-y<-5$

$2y>0$

$x+y+5<0$ $\quad$ $x-y+5<0$

$x<-5$

$x\geq 0$

$x\geq 2$

$\cancel{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}$

$x+y\geq -5$

$x-y\geq -5$

$x\geq -5$

$|5+a+y|+|-5+a-y|\leq 10$

$5+a+y+5+a-y$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)