

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Вокруг птичьей кормушки в одной плоскости с ней по двум окружностям с одинаковой скоростью летают синица и снегирь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой кормушка (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Синица движется по часовой стрелке, а снегирь – против. В начальный момент времени синица и снегирь находятся в точках $M_0(\sqrt{3}; 3)$ и $N_0(6; -2\sqrt{3})$ соответственно. Определите координаты всех положений снегиря, в которых расстояние между птицами будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a, \\ 3bx + (a-b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2|x+1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 7000. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 7 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10, \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

синусы — $x^2 + y^2 = 12$
 $M_0(\sqrt{3}; 3)$
 $R_1 = 2\sqrt{3}$
 $C_1 = 4\sqrt{3}\pi$

косинусы — $x^2 + y^2 = 48$
 $N_0(6; -2\sqrt{3})$
 $R_2 = 4\sqrt{3}$
 $C_2 = 8\sqrt{3}\pi$

2 круга синусы = 1 круг косинусы (время)

$$\omega_{\text{син}} = \sqrt{2} \cdot \omega_{\text{кос}}$$

Через $t \leq t_{\text{сн}}$: $M(x_m, y_m)$ и $N(x_n, y_n)$

$$\lg \varphi_1 = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi_1 = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

$$\lg \varphi_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varphi_2 = 330^\circ = \frac{11\pi}{6}$$

$$\varphi_1' = \varphi_1 + 2 \cdot \omega_{\text{син}} \cdot t$$



$$\varphi_2' = \varphi_2 + \omega_{\text{кос}} \cdot t$$

$$\varphi_1' - \varphi_2' = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\varphi_1 - 2\omega_{\text{син}} \cdot t - \varphi_2 - \omega_{\text{кос}} \cdot t = 2\pi n$$

$$\frac{\pi}{3} - \frac{11\pi}{6} - 3\omega_{\text{син}} \cdot t = 2\pi n$$

$$\omega_{\text{син}} = \frac{2\pi}{t_{\text{сн}}}$$

$$2 \leq \frac{3\pi}{4} < 3$$

$$-3\omega_{\text{син}} \cdot t = 2\pi n + \frac{3\pi}{2}$$

$$-3 \cdot \frac{2\pi}{t_{\text{сн}}} \cdot t = 2\pi n + \frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{-3t}{t_{\text{сн}}} = n + \frac{3\pi}{4}$$

$$0 \leq t \leq t_{\text{сн}}$$

$$0 \leq \frac{t}{t_{\text{сн}}} \leq 1$$

$$-3 \leq \frac{-3t}{t_{\text{сн}}} \leq 0$$

$$\frac{3.314}{4} < \frac{3\pi}{4} < \frac{3.315}{4}$$

$$2.3550 < \frac{3\pi}{4} < 2.3625$$

$$2.3550 < \frac{3\pi}{4} - 2 < 2.3625$$

$$-3, -4, -5$$

$$\omega_{\text{син}} \cdot t \in 4\pi + \frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{-3t}{t_{\text{сн}}} \Rightarrow 3\omega_{\text{син}} \cdot t = \frac{5\pi}{2}$$

$$t = \frac{5\pi}{6\omega_{\text{син}}} = \frac{5\pi}{12\pi} \cdot t_{\text{сн}} = \frac{5}{12} t_{\text{сн}}$$

$$(-3) \Rightarrow 3\omega_{\text{син}} \cdot t = -6\pi + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{3\pi}{2}$$

$$t = \frac{3\pi}{2\omega_{\text{син}}} = \frac{3\pi}{4\pi} \cdot t_{\text{сн}} = \frac{3}{4} t_{\text{сн}}$$

$$(-4) \Rightarrow 3\omega_{\text{син}} \cdot t = -8\pi + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{13\pi}{2}$$

$$t = \frac{13\pi}{6\omega_{\text{син}}} = \frac{13\pi}{12\pi} \cdot t_{\text{сн}} = \frac{13}{12} t_{\text{сн}}$$

$$(-5) \Rightarrow 3\omega_{\text{син}} \cdot t = -10\pi + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{17\pi}{2}$$

$$(-2) \Rightarrow 3\omega_{\text{син}} \cdot t = -4\pi + \frac{3\pi}{2} = -\frac{5\pi}{2}$$

$$\text{ан } t = \frac{5\pi}{6\omega_{\text{син}}} = \frac{5\pi}{12\pi} \cdot t_{\text{сн}}$$

$$(-1) \Rightarrow 3\omega_{\text{син}} \cdot t = -2\pi + \frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

$$t = \frac{\pi}{6\omega_{\text{син}}} = \frac{\pi}{12\pi} \cdot t_{\text{сн}} = \frac{1}{12} t_{\text{сн}}$$

N2

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a \\ 3bx + (a-b^2)y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2a-2b)x + 6y - a = 0 \\ 3b \cdot x + (ab-b^2) \cdot y - 1 = 0 \end{cases}$$

Прямые совпадают.

$$\begin{cases} 3b = k \cdot (2a-2b) \\ ab-b^2 = k \cdot 6 \\ -1 = k \cdot (-a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3b = \frac{2a-2b}{a} \\ ab-b^2 = \frac{6}{a} \\ k = \frac{1}{a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3ab = 2a-2b \\ a^2b-ab^2 = 6 \\ k = \frac{1}{a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3ab = 2(a-b) \\ ab(a-b) = 6 \\ k = \frac{1}{a} \end{cases}$$

$$a-b=3 \Rightarrow ab=2$$

$$b = \frac{2}{a} \Rightarrow a - \frac{2}{a} = 3$$

$$a^2-3a-2=0$$

$$D=17$$

$$a = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \Rightarrow b = \frac{4}{3 \pm \sqrt{17}}$$

$$a = \frac{3+\sqrt{17}}{2} \Rightarrow b = \frac{4}{3+\sqrt{17}} = \frac{4(\sqrt{17}-3)}{8} = \frac{\sqrt{17}-3}{2}$$

$$a = \frac{3-\sqrt{17}}{2} \Rightarrow b = \frac{4}{3-\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}+3}{2}$$

N3

$$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10 = (x+5)(x-2)$$

$$\text{Если } x = -5: (-5)^3 - 16(-5) + 25 = -125 + 80 + 25 = -20$$

$$x \neq -5$$

$$\sqrt{x^3-16x+25} = 2(x-2)$$

$$x^3-16x+25 = 4x^2-16x+16$$

Проверка

$$3^3-16 \cdot 3+25 = 52-48 = 4 \quad (+)$$

$$x = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^3 - \frac{16(1+\sqrt{13})}{2} + 25 &= \frac{1+3\sqrt{13}+3 \cdot 13+3 \cdot 13\sqrt{13}}{8} - \frac{16+16\sqrt{13}}{2} + 25 = \frac{40+42\sqrt{13}-128-112\sqrt{13}+200}{8} \\ &= \frac{112-70\sqrt{13}}{8} = \frac{28-17.5\sqrt{13}}{2} \approx 22 - \frac{11 \cdot 4}{4} = 11 \end{aligned}$$

$$-6x+6y = -2$$

$$3x+3y = 1$$

$$3x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = \frac{16}{3}$$

$$x = \pm \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$y = \pm \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 175 \\ \underline{50} \\ 675 \\ \underline{120} \\ 555 \\ \underline{1110} \\ 4450 \\ \underline{890} \\ 3560 \end{array}$$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^3 - \frac{64\sqrt{3}}{3} + 25 = \frac{-64 \cdot 3\sqrt{3}}{27} + \frac{64 \cdot 9\sqrt{3}}{27} + 25 = \\ &= \frac{-6 \cdot 64 \cdot \sqrt{3} + 25 \cdot 27}{27} = \frac{675-384\sqrt{3}}{27} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} ab = \frac{2}{3}(a-b) \\ \frac{2}{3}(a-b)^2 = 6 \\ k = \frac{1}{a} \end{cases} \quad \begin{cases} ab = \frac{2}{3}(a-b) \\ (a-b)^2 = 9 \\ k = \frac{1}{a} \end{cases}$$

$$a-b = -3 \Rightarrow ab = -2$$

$$b = -\frac{2}{a} \Rightarrow a + \frac{2}{a} = -3$$

$$a^2+3a+2=0$$

$$D=1$$

$$a = -1 \Rightarrow b = 2$$

$$a = -2 \Rightarrow b = 1$$

$$\text{Ответ: } (-1, 2), (-2, 1)$$

$$\left(\frac{\sqrt{17}+3}{2}, \frac{\sqrt{17}-3}{2}\right), \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}, \frac{\sqrt{17}+3}{2}\right)$$

$$x^3-16x+25 \geq 0$$

$$x^3-4x^2+9=0$$

$$(x^3-3x^2)-(x^2-3x)-(3x-9)=0$$

$$x^2(x-3)-x(x-3)-3(x-3)=0$$

$$(x^2-x-3)(x-3)=0$$

$$\begin{cases} x=3 \\ x^2-x-3=0 \end{cases}$$

$$D=1+12=13$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\frac{14 \pm 2\sqrt{13}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{1}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

$$6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2|x+1| + 1 \geq 0$$

$$6x^4 - 5x^2|x+1| + (x+1)^2 \geq 0$$

$$5x^2|x+1| \leq 6x^4 + (x+1)^2$$

$$(|x+1|)^2 - 5x^2 \cdot |x+1| + 6x^4 = 0$$

$$D = 25x^4 - 24x^4 = x^4$$

$$\begin{cases} |x+1| = \frac{5x^2 + \sqrt{x^4}}{2} = 3x^2 \\ |x+1| = \frac{5x^2 - \sqrt{x^4}}{2} = 2x^2 \end{cases}$$

$$\frac{(x+1)^2}{x^4} - \frac{5|x+1|}{x^2} + 6 \geq 0$$

$$t = \frac{|x+1|}{x^2} \Rightarrow t \geq 0$$

$$t^2 - 5t + 6 \geq 0 \quad (t-2)(t-3) \geq 0$$

$$t \in (-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$$

$$t \in [0; 2] \cup [3; +\infty)$$

$$\{2 \in [0; 4] \cup [9; +\infty)$$

$$\frac{|x+1|}{x^2} \in [0; 2] \cup [3; +\infty)$$

$$x \geq -1: \frac{x+1}{x^2} \in [0; 2] \cup [3; +\infty)$$

$$x \geq -1: 3x+1 \in [0; 2x^2] \cup [3x^2; +\infty)$$

$$0 \leq a \leq 2 \quad x \in [0; 2]$$

$$\begin{cases} x+1 = ax^2 \\ ax^2 - x - 1 = 0 \\ D = 1 + 4a \end{cases}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2a} \leq -1$$

$$\begin{aligned} 1 \pm \sqrt{1+4a} &\leq -2a \\ 1+1+4a \pm 2\sqrt{1+4a} &\leq -2a \\ 2+6a \pm 2\sqrt{1+4a} &\leq -2a \end{aligned}$$

$$x \leq -1: \begin{cases} -x-1 \geq 0 \\ -x-1 \leq 2x^2 \\ -x-1 \geq 3x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + x + 1 \geq 0 \\ 3x^2 + x + 1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in \emptyset \\ x \in \emptyset \end{cases}$$

$$x \leq -1$$

$$|x+1| \in [-0; 2x^2] \cup [3x^2; +\infty)$$

$$-x-1 \in [0; 2x^2] \cup [3x^2; +\infty)$$

$$\text{I} \quad (|x+1| - 3x^2)(|x+1| - 2x^2) \geq 0$$

$$|x+1| = 3x^2$$

$$3x^2 - x - 1 = 0$$

$$D = 1 + 12 = 13$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{6}$$

$$3x^2 + x + 1 = 0$$

$$D < 0$$

$$x \in \emptyset$$

$$\frac{(x+1)^2}{x^4} \in [0; 4] \cup [9; +\infty)$$

$$x = -1$$

$$(x+1)^2 = 4x^4$$

$$4x^4 - x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$(4x^4 - 4x^3) + (4x^3 - 4x^2) + (3x^2 - 3x) + (x - 1) = 0$$

$$4x^3(x-1) + 4x^2(x-1) + 3x(x-1) + (x-1) = 0$$

$$(4x^3 + 4x^2 + 3x + 1)(x-1) = 0$$

$$x \geq -1:$$

$$x+1 \leq 2x^2$$

$$x+1 \geq 3x^2$$

$$x+1 \geq 3x^2$$

$$x+1 \geq 3x^2$$

$$x+1 \geq 3x^2$$

$$x+1 \geq 3x^2$$

$$x+1 \geq 3x^2$$

$$x+1 \geq 3x^2$$

$$x+1 \geq 3x^2$$

$$x+1 \geq 3x^2$$

$$x+1 \geq 3x^2$$

$$x+1 \geq 3x^2$$

$$x+1 \geq 3x^2$$

$$x+1 \geq 3x^2$$

$$x+1 \geq 3x^2$$

$$\text{II} \quad |x+1| = 2x^2$$

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$D = 1 + 8 = 9$$

$$\begin{cases} x = \frac{1+3}{4} = 1 \\ x = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$2x^2 + x + 1 = 0$$

$$D < 0$$

$$x \in \emptyset$$

$$x \in (-\infty; -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1-\sqrt{3}}{6}; \frac{1+\sqrt{3}}{6}] \cup [1; +\infty)$$

$$\cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 =$$

$$\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 = 0$$

$$\tan \varphi_1 - \tan \varphi_2 = -1$$

$$-\sin \varphi_1$$

25

abcdefgh

$$a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f \cdot g \cdot h = 7000$$

3, 2, 3, 5, 7, 1

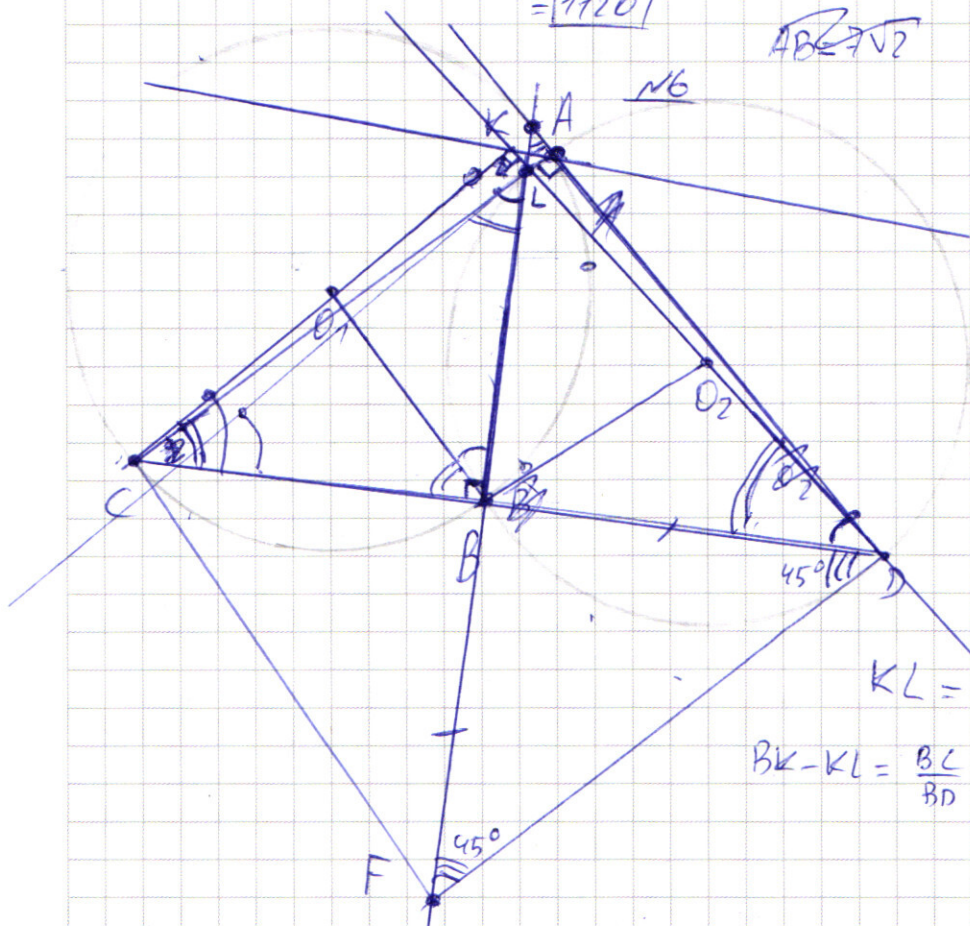
$$\frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 56 \cdot 20 = 1120$$

7000	2
3500	2
1750	2
875	5
175	5
35	5
7	7
1	1

$$7000 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 1$$

$$| -x - y - 5 | + | -x + y - 5 | \leq 10$$

$$\left| -\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}} \right| + \left| \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}} \right| \leq \frac{10}{\sqrt{2}}$$



$$\omega_1(O; R_1) \ll \omega_2(O_2; R_2)$$

$$R_1 = R_2 = 7$$

$$B \in CD$$

$$\angle CAD = 90^\circ$$

$$C \in \omega_1, P \in \omega_2$$

$$BF = BD$$

$$CF = ?$$

$$KL = BK - BL = BK - \frac{BC}{BD} \cdot BK = \frac{BD - BC}{BD} \cdot BK$$

$$BK - KL = \frac{BC}{BD} \cdot BK$$

$$y = -x - 5$$

$$y = x + 5$$

$$CF = BC^2 + BD^2 = CL^2 - BL^2 + DK^2 - BK^2 = CL^2 + DK^2 - 2BL^2 - BK^2 =$$

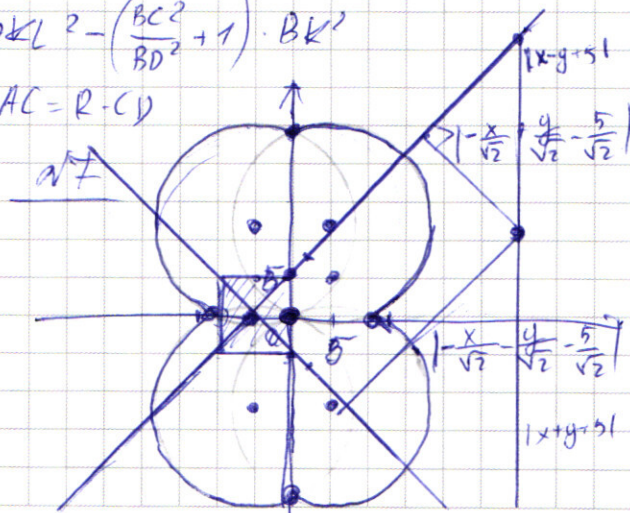
$$= (AC - AL)^2 + (AD + AK)^2 - (BK - KL)^2 - BK^2 = AC^2 - 2ACAL + AL^2 + AD^2 + 2ADAK +$$

$$+ AK^2 - BK^2 + 2BK KL + KL^2 - BK^2 = CD^2 + KL^2 - \left(\frac{BC^2}{BD^2} + 1 \right) \cdot BK^2$$

$$\frac{CO_1}{CK} = \frac{CB}{CD} = \frac{R}{DK} = \frac{R}{AC}$$

$$CB \cdot AC = R \cdot CD$$

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |x - y + 5| \leq 10 \\ (|x| - 5)^2 + (|y| - 12)^2 = 13^2 \end{cases}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Дано:

ПЗСК с центром в точке $O(0;0)$

синица по часовой стрелке

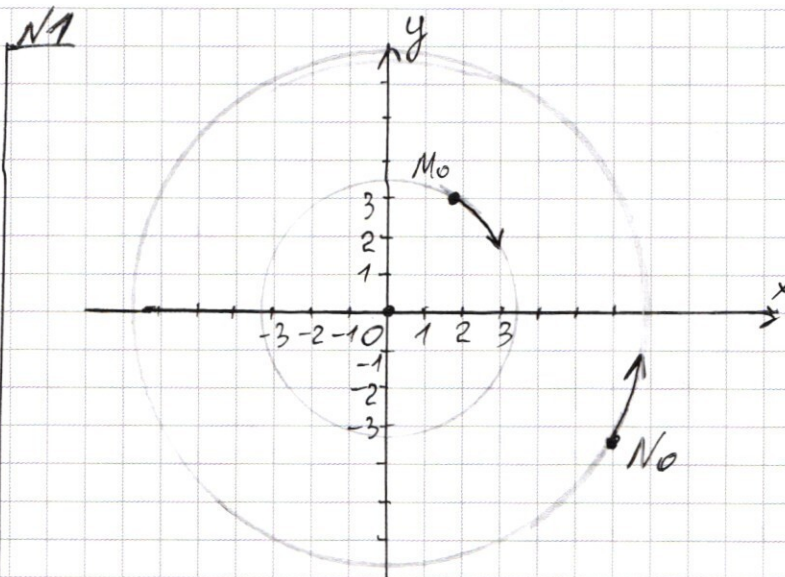
снелерь против часовой стрелки

$M_0(\sqrt{3}; 3)$ — синица

$N_0(6; -2\sqrt{3})$ — снелерь

координаты снелеря при

$\min \rho(M_x; N_x)$ — ?



Решение:

1) Докажем, что расстояние между M_x и N_x (положениями синицы и снелеря в какой-то момент времени) минимально, если $M_x \in ON_x$.

Пусть OM_x образует угол φ_1 с "+" направлением Ox ,

а ON_x — угол φ_2 с "+" направлением Ox .

Тогда $x_{\text{син}} = OM_x \cdot \cos \varphi_1$, $y_{\text{син}} = OM_x \cdot \sin \varphi_1$

$x_{\text{снел}} = ON_x \cdot \cos \varphi_2$, $y_{\text{снел}} = ON_x \cdot \sin \varphi_2$

$$(\rho(M_x; N_x))^2 = (x_{\text{снел}} - x_{\text{син}})^2 + (y_{\text{снел}} - y_{\text{син}})^2 = (ON_x \cdot \cos \varphi_2 - OM_x \cdot \cos \varphi_1)^2 + (ON_x \cdot \sin \varphi_2 - OM_x \cdot \sin \varphi_1)^2$$

2) $ON_x = R_{\text{снел}}$, $OM_x = R_{\text{син}}$. Найдём $R_{\text{снел}}$ и $R_{\text{син}}$, зная M_0 и N_0 .

$$R_{\text{син}} = OM_0 = \sqrt{(\sqrt{3}-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$R_{\text{снел}} = ON_0 = \sqrt{(6-0)^2 + (-2\sqrt{3}-0)^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

минус, т.к.
движутся в
разных направл.

Заметим, что $R_{\text{снел}} = 2 \cdot R_{\text{син}} \Rightarrow$ (при $v_{\text{син}} = v_{\text{снел}}$) $\omega_{\text{син}} = 2 \cdot \omega_{\text{снел}}$, где ω — угловая скорость

$$\begin{aligned}
 3) \text{ Тогда } (\rho(M_x; N_x))^2 &= (R_{\text{син}} \cdot \cos \varphi_2 - R_{\text{син}} \cdot \cos \varphi_1)^2 + (R_{\text{син}} \cdot \sin \varphi_2 - R_{\text{син}} \cdot \sin \varphi_1)^2 = \\
 &= R_{\text{син}}^2 \cdot (2 \cdot \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1)^2 + R_{\text{син}}^2 \cdot (2 \cdot \sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)^2 = \\
 &= R_{\text{син}}^2 \cdot (4 \cos^2 \varphi_2 - 4 \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \cos^2 \varphi_1 + 4 \sin^2 \varphi_2 - 4 \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 + \sin^2 \varphi_1) = \\
 &= R_{\text{син}}^2 \cdot (4(\sin^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_2) + (\sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1) - 4(\sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2)) = \\
 &= R_{\text{син}}^2 \cdot (5 - 4(\sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2))
 \end{aligned}$$

Тогда $\rho(M_x; N_x)$ становится меньше (извлекаем корень, $\rho(M_x; N_x) \geq 0$),
 если $\sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2$ становится больше
 Максимальное значение этого выражения достигается только
 в случае $\varphi_1 = \varphi_2$ и равно 1. $\varphi_1 = \varphi_2 \Rightarrow M_x \in ON_x$ (ЧТД)

4) Доказав, что $M_x \in ON_x$, перейдем в полярную СК, начало
 к-рей совпадает с точкой $O(0;0)$, а полярная ось — с "+"
 направлением OX . ~~А(φ, R)~~ полярная СК: $A(\varphi, R) \begin{cases} x_A = R \cdot \cos \varphi \\ y_A = R \cdot \sin \varphi \end{cases}$
 Тогда $M_0(\arctg(\frac{3}{\sqrt{3}}), R_{\text{син}}) = M_0(\frac{\pi}{3}, R_{\text{син}})$ (в I четверти)
 $N_0(\arctg(\frac{-2\sqrt{3}}{6}), R_{\text{син}}) = N_0(-\frac{\pi}{6}, 2 \cdot R_{\text{син}})$ (в II четверти)
 За время $t_{\text{син}}$ снайпер пролетит 1 круг, а снайпер — $2 \cdot (R_{\text{син}}) = 2 \cdot R_{\text{син}}$
 $t_{\text{син}} = 2 \cdot t_{\text{син}}$

5) Чтобы $M_x \in ON_x$: $\varphi_{\text{син}} x - \varphi_{\text{син}} 0 = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$\varphi_{\text{син}} 0 + \omega_{\text{син}} \cdot t - (\varphi_{\text{син}} 0 - 2 \cdot \omega_{\text{син}} \cdot t) = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\varphi_{\text{син}} 0 - \varphi_{\text{син}} 0 + 3 \omega_{\text{син}} \cdot t = 2\pi n$$

$$3 \omega_{\text{син}} \cdot t = 2\pi n + \varphi_{\text{син}} 0 - \varphi_{\text{син}} 0$$

$$3 \cdot \frac{2\pi}{t_{\text{син}}} \cdot t = 2\pi n + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = 2\pi n + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{6t}{t_{\text{син}}} = 2n + \frac{1}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n \in [0; 2] \\ n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftarrow$$

$$0 \leq t \leq t_{\text{син}} \\ 0 \leq \frac{6t}{t_{\text{син}}} \leq 6$$

6) Если $n=0$: $\frac{t}{t_{\text{син}}} = \frac{1}{12}$

~~т.к. $t_{\text{син}} = 2 \cdot t_{\text{син}}$~~

$$\varphi_{\text{син}} x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi t}{t_{\text{син}}} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x = R_{\text{снел}} \cdot \cos 0 = R_{\text{снел}} = 4\sqrt{3} \text{ (из п.2)} \\ y = R_{\text{снел}} \cdot \sin 0 = 0 \end{cases}$$

7) Если $n=1$: $\frac{t}{t_{\text{снел}}} = \frac{5}{12}$

$$\varphi_{\text{снел}} = \varphi_{\text{снел}0} + \frac{2\pi t}{t_{\text{снел}}} = -\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\begin{cases} x = R_{\text{снел}} \cdot \cos \frac{2\pi}{3} = 4\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{3} \\ y = R_{\text{снел}} \cdot \sin \frac{2\pi}{3} = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6 \end{cases}$$

8) Если $n=2$: $\frac{t}{t_{\text{снел}}} = \frac{9}{12}$

$$\varphi_{\text{снел}} = \varphi_{\text{снел}0} + \frac{2\pi t}{t_{\text{снел}}} = -\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{6} = \frac{4\pi}{6}$$

$$\begin{cases} x = R_{\text{снел}} \cdot \cos \frac{4\pi}{3} = 4\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{3} \\ y = R_{\text{снел}} \cdot \sin \frac{4\pi}{3} = 4\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -6 \end{cases}$$

Ответ: $(4\sqrt{3}; 0)$, $(-2\sqrt{3}; 6)$, $(-2\sqrt{3}; -6)$

N2

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a \\ 3bx + (a-b^2)y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2a-2b)x + 6y - a = 0 \\ 3b \cdot x + (ab-b^2) \cdot y - 1 = 0 \end{cases}$$

Полученные ур-ия имеют вид $Ax + By + C = 0$ - общее ур-ие прямой.

Система имеет бесконечное кол-во решений, если прямые, задаваемые этими ур-иями совпадают.

$$\text{Или } \frac{3b}{2a-2b} = \frac{ab-b^2}{6} = \frac{1}{a}$$

$$\begin{cases} 3ab = 2a-2b \\ a^2b - ab^2 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3ab = 2(a-b) \\ ab(a-b) = 6 \end{cases}$$

$$ab = \frac{6}{a-b} \text{ и } ab = \frac{2}{3}(a-b)$$

$$\frac{6}{a-b} = \frac{2}{3}(a-b)$$

$$(a-b)^2 = 9$$

$$\textcircled{I} \text{ Если } a-b=3: ab=2 \Rightarrow b = \frac{2}{a} \Rightarrow a - \frac{2}{a} = 3$$

$$a^2 - 2 = 3a$$

$$a^2 - 3a - 2 = 0$$

$$D = 17$$

$$\begin{cases} a = \frac{3+\sqrt{17}}{2} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{17}-3}{2} \\ a = \frac{3-\sqrt{17}}{2} \Rightarrow b = \frac{-\sqrt{17}-3}{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{II} \text{ Если } a-b=-3: ab=-2 \Rightarrow b = -\frac{2}{a} \Rightarrow a + \frac{2}{a} = -3$$

$$a^2 + 3a + 2 = 0$$

$$D = 1$$

$$\begin{cases} a = -1 \Rightarrow b = 2 \\ a = -2 \Rightarrow b = 1 \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{\sqrt{17}+3}{2}, \frac{\sqrt{17}-3}{2} \right), \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}, \frac{-\sqrt{17}-3}{2} \right), (-1; 2), (-2; 1).$$

N3

$$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$$

$$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = (x+5)(x-2)$$

$$\text{Если } x = -5: x^3 - 16x + 25 = -125 + 80 + 25 = -20 \Rightarrow \text{под корнем}$$

$$\text{отрицательное число} \Rightarrow x \neq -5$$

Тогда поделим обе части ур-ня на $x+5$.

$$\frac{1}{2}\sqrt{x^3-16x+25} = x-2$$

$$\sqrt{x^3-16x+25} = 2(x-2)$$

$$x^3 - 16x + 25 = 4x^2 - 16x + 16$$

$$x^3 - 4x^2 + 9 = 0$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 365 \\ \hline 2190 \end{array}$$

Условие возведения в квадрат:

$$\begin{cases} x^3 - 16x + 25 \geq 0 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(x^3 - 3x^2) - (x^2 - 3x) - (3x - 9) = 0$$

$$x^2(x-3) - x(x-3) - 3(x-3) = 0$$

$$(x^2 - x - 3)(x-3) = 0$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ x^2 - x - 3 = 0 \quad D = 13 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \end{cases} \quad 2$$

Проверка. ~~$x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$~~ 1) $x = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$, $\frac{1 - \sqrt{13}}{2} < 2 \Rightarrow x \neq \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$

Подставляем значения x в условие возведения в квадрат и смотрим его верность (условия).

2) $x = 3$ $x > 2$

$$\left. \begin{aligned} 3^3 - 16 \cdot 3 + 25 = 4 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 3$$

3) $x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$ $\frac{1 + \sqrt{13}}{2} > \frac{1 + 3}{2} = 2$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right)^3 - 16 \cdot \frac{1 + \sqrt{13}}{2} + 25 &= \frac{1 + 3\sqrt{13} + 3 \cdot 13 + 13\sqrt{13}}{8} - \frac{64 + 64\sqrt{13}}{8} + \frac{200}{8} = \\ &= \frac{40 + 16\sqrt{13} - 64 - 64\sqrt{13} + 200}{8} = \frac{176 - 48\sqrt{13}}{8} = 22 - 6\sqrt{13} \end{aligned}$$

$\sqrt{13} < 3,65$, так как $(3,65)^2 = 13,3225 \Rightarrow 6\sqrt{13} < 6 \cdot 3,65$

$22 - 6\sqrt{13} > 22 - 6 \cdot 3,65$

$22 - 6\sqrt{13} > 22 - 21,9 = 0,1 \left\{ \Rightarrow 22 - 6\sqrt{13} > 0 \Rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \text{ подходит} \right.$

Ответ: $x \in \left\{ 3; \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right\}$.

N4

$$6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2 |x+1| + 1 \geq 0$$

$$6x^4 - 5x^2 |x+1| + (x+1)^2 \geq 0$$

$$(1x+1)^2 - 5 \cdot x^2 \cdot |x+1| + 6 \cdot (x^2)^2 \geq 0$$

$$D = 25x^4 - 24x^4 = x^4$$

$$\begin{cases} |x+1| = \frac{5x^2+x^2}{2} = 3x^2 \\ |x+1| = \frac{5x^2-x^2}{2} = 2x^2 \end{cases}$$

~~Вспомогательные методы интервалов~~

~~$$\begin{array}{c} 1x+1 \\ 2x^2 \\ 3x^2 \end{array} \quad \begin{array}{c} + \\ - \\ - \end{array} \quad \begin{array}{c} x+1 \\ x+1 \\ x+1 \end{array}$$~~

~~$$|x+1| \geq 0 : |x+1| \in [0; 2x^2]$$~~

$$|x+1| \geq 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{При } |x+1| = 3x^2 \text{ или } |x+1| = 2x^2 \text{ значение} \\ \text{выражения равно 0} \end{array} \right\} \Rightarrow |x+1| \in [0; 2x^2] \cup [3x^2; +\infty)$$

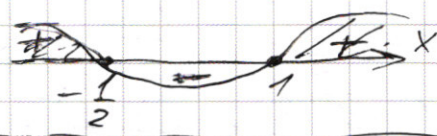
Коэффициент перед $(|x+1|)^2$ 1 > 0

① Если $x \geq -1$:

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x+1 \leq 2x^2 \\ x+1 \geq 3x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ 2x^2 - x - 1 \geq 0 \\ 3x^2 - x - 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - x - 1 \geq 0 & D = 9 \\ 3x^2 - x - 1 \geq 0 & D = 13 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

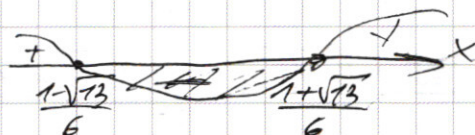


$$x \in (-\infty; -\frac{1}{2}] \cup [1; +\infty)$$

$$x \in \left[\frac{1-\sqrt{13}}{6}; \frac{1+\sqrt{13}}{6} \right]$$

$$\frac{1-\sqrt{13}}{6} > \frac{1-4}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1+\sqrt{13}}{6} < \frac{1+4}{6} = \frac{5}{6} < 1$$



Тогда объединение промежутков: $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}] \cup \left[\frac{1-\sqrt{13}}{6}; \frac{1+\sqrt{13}}{6} \right] \cup$

Но в данном случае $x \geq -1$: $\cup [1; +\infty)$

$$\text{Тогда } x \in \left[-1; -\frac{1}{2} \right] \cup \left[\frac{1-\sqrt{13}}{6}; \frac{1+\sqrt{13}}{6} \right] \cup [1; +\infty)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

II Если $x \leq -1$:

$$\begin{cases} -x-1 \geq 0 \\ -x-1 \leq 2x^2 \\ -x-1 \geq 3x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -1 \\ 2x^2+x+1 \geq 0 \\ 3x^2+x+1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2+x+1 \geq 0 \\ 3x^2+x+1 \leq 0 \end{cases}$$

$$D < 0, 2 > 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$D < 0, 3 > 0 \Rightarrow x \in \emptyset$$

$$x \in \mathbb{R}$$

Но в данном случае $x \leq -1$: $x \in (-\infty; -1]$

Объединяем I и II случаи раскрытия модуля:

$$x \in (-\infty; -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1-\sqrt{13}}{6}; \frac{1+\sqrt{13}}{6}] \cup [1; +\infty)$$

Ответ: $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1-\sqrt{13}}{6}; \frac{1+\sqrt{13}}{6}] \cup [1; +\infty)$.

N5

Пусть нужное восьмизначное число $x = \overline{abcdefgh}$

Тогда $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f \cdot g \cdot h = 7000$

Разложим 7000 на простые множители: $7000 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 7$

Необходимо, чтобы в разложении 7000 присутствовали
всего однозначных чисел (необязательно простых)

Варианты таких разложений: (формула перестановки с повторениями)

1) $7000 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 1$

$$n = \frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 56 \cdot 20 = 1120$$

2) $7000 = 4 \cdot 2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1$

$$n = \frac{8!}{3! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2} = 56 \cdot 60 = 3360$$

$$3) 7000 = 8 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 1^3$$

$$n = \frac{8!}{3! \cdot 3!} = 1120$$

Общее кол-во цифр повт = $1120 + 3360 + 1120 = 5600$ (чисел) — по правилу сложения в комбинаторике

Ответ: 5600 чисел.

N7

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10 \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169 \end{cases}$$

Систему будем решать графически.

I $(|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169$

График данного ур-ия представляет собой фигуру, полученную путём отражения части окружности $(x-5)^2 + (y-12)^2 = 169$, лежащей в I четверти ($x \geq 0, y \geq 0$), относительно

OX и OY (~~двух~~ осевая симметрия) и точки O (центр симметрии).

II $|x+y+5| + |x-y+5| \leq 10$

$x+y+5=0$ и $x-y+5=0$ — ур-ия прямых

$$\left| -\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}} \right| + \left| -\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}} \right| \leq \frac{10}{\sqrt{2}}$$

Приведём их к нормированному виду.

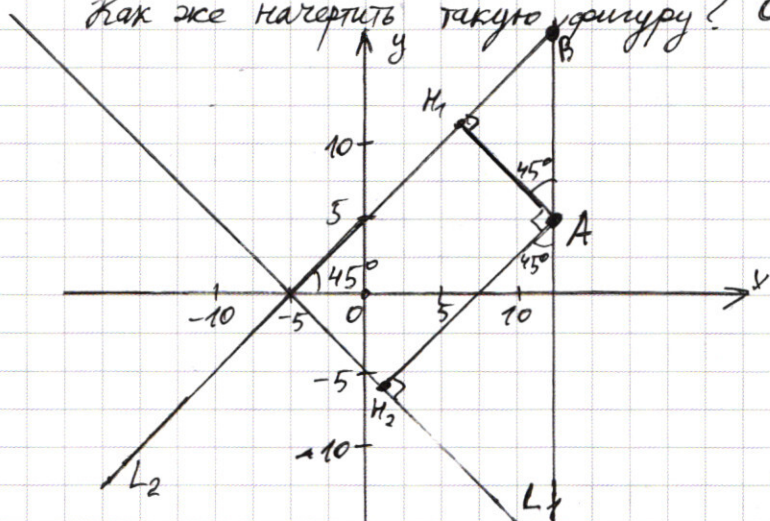
График данного ур-ия представляет

$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

собой фигуру, для каждой точки (A) которой верно следующее:

$$\rho(A; L_1) + \rho(A; L_2) \leq \frac{10}{\sqrt{2}}, \text{ где } L_1: x+y+5=0 \text{ и } L_2: x-y+5=0$$

Как же нарисовать такую фигуру? Ответ ниже.



$$AH_1 = \left| \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}} \right|$$

$$AH_2 = \left| \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}} \right|$$

$$AH_1 + AH_2 \leq \frac{10}{\sqrt{2}}$$

$$AB \parallel OY, AB \cap L_2 = B.$$

$$AB = \frac{AH_1}{\cos 45^\circ} = |x+y+5|$$

$$AB \cap L_1 = C \Rightarrow AC = \frac{AH_2}{\cos 45^\circ} = |x-y+5|$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Таким образом, точка $A(x, y)$ является решением нер-ва $|x+y+5| + |x-y+5| \leq 10$, если $AB \parallel OY$, $AB \cap L_2 = B$, $AB \cap L_1 = C$

(II) $BC \leq 10$ По есть $BC = |x+y+5| + |x-y+5|$

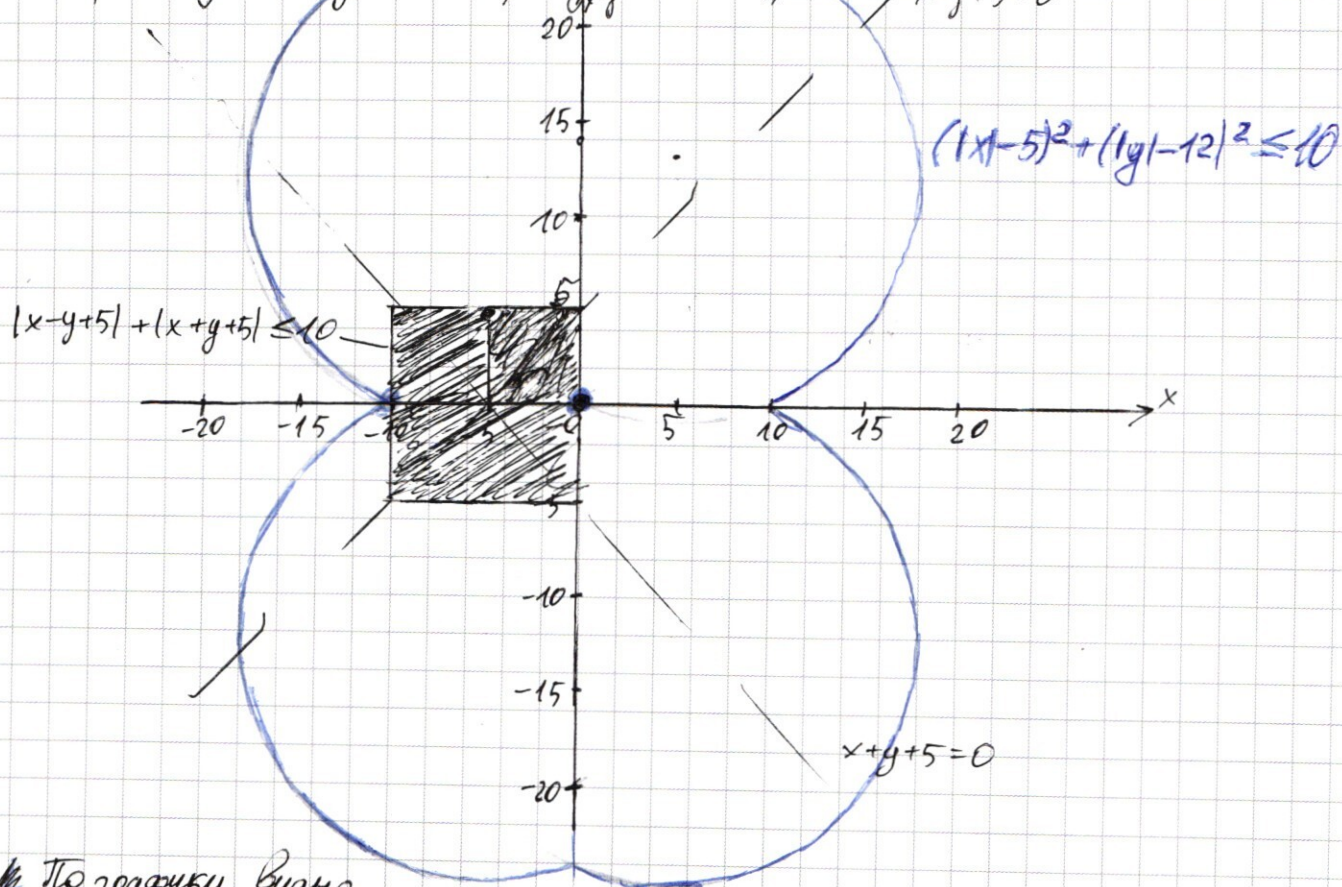
Аналогично доказываем, что если $AB \parallel OX$, $AB \cap L_2 = B$, $AB \cap L_1 = C$

(II) $BC \leq 10$, то точка A является решением нер-ва

Соединив два эти условия, получим, что на координатной плоскости решением данного нер-ва является квадрат с вершинами

в точках ~~$(-5, 5)$, $(0, 5)$, $(0, 0)$ и $(-5, 0)$~~ . $(-10, 5)$, $(0, 5)$, $(0, -5)$, $(-10, -5)$.

Нанесем две полученные фигуры в ПДСК. $x-y+5=0$



По графику видно, что две эти фигуры пересекаются в 2 точках: $(0, 0)$ и $(-10, 0)$.

Ответ: $(-10, 0)$ и $(0, 0)$.

№6

Дано:

$\omega_1(O_1; R_1)$ и $\omega_2(O_2; R_2)$

$R_1 = R_2 = 7$

$\omega_1 \cap \omega_2 = \{A; B\}$

$C \in \omega_1, D \in \omega_2$

$B \in CD, \angle CAD = 90^\circ$

$BF \perp CD, BF = BD$

A и F по разные стор. от CD

$CF = ?$

$CF = 2R = 2 \cdot 7 = 14$ (из условия)

Ответ: $CF = 14$.

