

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Вокруг цветка в одной плоскости с ним по двум окружностям летают шмель и пчела. Скорость пчелы в полтора раза больше скорости шмеля. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой цветок (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Пчела движется по часовой стрелке, а шмель – против. В начальный момент времени пчела и шмель находятся в точках $M_0\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ и $N_0(2; 0)$ соответственно. Определите координаты всех положений шмеля, в которых расстояние между ним и пчелой будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все тройки целочисленных параметров a , b и c , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y + cz = c, \\ 3x + by + 4z = 4b \end{cases}$$

не имеет решений.

3. [4 балла] Решите неравенство $(\sqrt{x^3 - 10x + 7} + 1) \cdot |x^3 - 18x + 28| \leq 0$.

4. [5 баллов] Решите уравнение $2x^4 + x^2 - 6x - 3x^2|x - 3| + 9 = 0$.

5. [5 баллов] Бросили 70 игральных костей (кубиков с цифрами от 1 до 6 на гранях; вероятность выпадения каждой из граней одна и та же) и посчитали сумму выпавших чисел. Какая из вероятностей больше: того, что сумма больше 350, или того, что сумма не больше 140?

6. [4 балла] Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D , пересекает прямую ℓ_2 в точках V и E , а также вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2VE равно $\frac{5}{4}$. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1 .

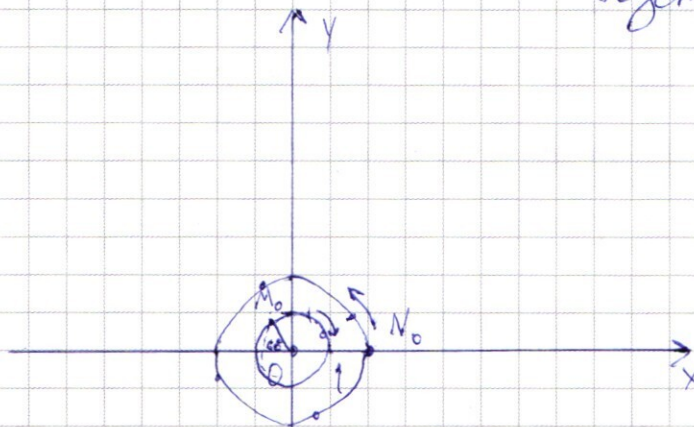
7. [7 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} a^2 - 2ax - 6y + x^2 + y^2 = 0, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = 25 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1)



Пусть V_{π} — скор. ионы,

V — иониз

$$V_{\pi} = 1,5 V$$

Схематично

изобразим

M_0 и N_0

у иониз радиус
($0^2 + 2^2 = 4$) 2;

у ионы радиус 1, м.к.

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$$

Их угловые скорости соответственно

$$\omega_{\pi} = \frac{V_{\pi}}{1} = 1,5 V, \quad \omega = \frac{V}{2}$$

$$\omega_{\pi} = 1,5 V \quad \omega = 0,5 V$$

П.к. они движутся на встречу, то
угловая скорость их сближения $\Delta\omega = \omega_{\pi} + \omega = 2V$

До первой встречи время $t = \frac{120^\circ}{\Delta\omega}$ (м.к.)

$\sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, значит между ними $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

$t = \frac{120^\circ}{2V}$, иониз за это время пройдет

$$\omega \cdot t = 0,5 V \cdot \frac{120^\circ}{2V} = 30^\circ. \text{ П.к. его коор.}$$

$$\sin(30^\circ) \cdot 2 = 1; \quad \cos(30^\circ) \cdot 2 = \sqrt{3} \quad (\sqrt{3}; 1)$$

Затем время до следующ. встр. $t = \frac{360^\circ}{\Delta\omega}$

и иониз пройдет $0,5 V \cdot \frac{360^\circ}{2V} = 90^\circ$

Его координаты станут $(\sqrt{3}; -1)$ (аналогично)
 И так, они "встретятся" еще в точках
 $(-\sqrt{3}; -1)$ и $(1; -\sqrt{3})$, а затем вновь будут
 проходить по тем же точкам.

Естественно, расстояние кратчайшее из-за
 того что расстояние между ними —
 разность радиусов (т.е. 1)

Ответ: $(\sqrt{3}; 1); (\sqrt{3}; -1); (-\sqrt{3}; -1); (1; -\sqrt{3})$

3) ОДЗ $x^3 - 10x + 7 \geq 0$

Записав ОДЗ, можно сократить на
 скобку $\sqrt{x^3 - 10x + 7} + 1 \geq 1$, без изменения
 знака. Значит $|x^3 - 18x + 28| \leq$. Здесь
 может достигаться только равенство, где
 всегда модуль ≥ 0 . $\begin{cases} x^3 - 18x + 28 = 0 & (\text{подбором } x=2) \\ x^3 - 10x + 7 \geq 0 \end{cases}$

$$x^3 - 18x + 28 = (x-2)(x^2 + 2x - 14) = x^3 + 2x^2 - 14x - 2x^2 - 4x + 28 = x^3 - 18x + 28$$

$$D = 4 + 4 \cdot 14 = 4 \cdot 15 = 60$$

$$x_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{60}}{2}$$

За $x=2$ не подходит по ОДЗ

$$x = \frac{-2 + \sqrt{60}}{2} \quad \frac{-2 + \sqrt{60}}{2} \quad 7 \leq \sqrt{60} \leq 8; \quad 5 \leq -2 + \sqrt{60} \leq 6$$

$$2,5 \leq \frac{-2 + \sqrt{60}}{2} \leq 3$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{\sqrt{60}-2}{2}\right)^3 - 10 \cdot \frac{\sqrt{60}-2}{2} + 7 = \frac{60\sqrt{60} - 3 \cdot 60 \cdot 2 + 3 \cdot \sqrt{60} \cdot 4 - 8}{8} \geq 60 \geq 76$$

$$+ \left(5 \cdot \frac{2-\sqrt{60}}{2}\right) + 7 \geq 0 \quad \text{оценивая, получаем}$$

$$\geq -30$$

$$\frac{48\sqrt{60} - 368}{8} + 10 - 5\sqrt{60} + 7$$

$$6\sqrt{60} - 46 + 10 - 5\sqrt{60} + 7 \leq 0$$

$$-\left(\frac{+2+\sqrt{60}}{2}\right)^3 + 10 \cdot \frac{+2+\sqrt{60}}{2} + 7 = -\frac{(60\sqrt{60} + 3 \cdot 60 \cdot 2 + 3 \cdot \sqrt{60} \cdot 4 + 8)}{8}$$

не подходит

$$-\frac{48 + 2\sqrt{60} - 368}{8} + 10 + 5\sqrt{60} + 7$$

$$-9\sqrt{60} - 46 + 10 + 5\sqrt{60} + 7 < 0$$

Ответ: нет решений.

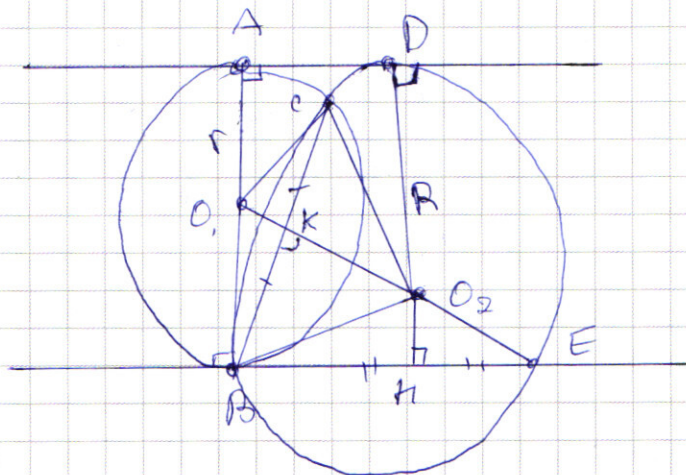
5*) S — сумма всех вышедших очков.

$$S_{\min} = 70 \quad S_{\max} = 6 \cdot 70 = 420$$

70 можно получить одним способом, как и 420, 71 (70 способов, как и 419).

Рассуждая аналогично, придём к выводу, что 139 можно получить столько же способами, сколько и 351, но мы можем ещё получить 140, а 350 уже нет, поэтому. Значит, 140. Ответ: S не больше 140. Потому что вариантов больше $\Rightarrow$ сумма больше вероятно.

б)



$$\frac{S_{BO, CO_2}}{S_{O_2 BE}} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{R}{r} = ?$$

Введём обозн., как на рисунке.

$O_2 H = 2r - R$ ($A D H B$ - прямоуго.) (хорды $AB \parallel$ и радиусы $\perp$ хорд.)

$$BH^2 = R^2 - (2r - R)^2 = R^2 - (4r^2 - 4Rr + R^2) = 4Rr - 4r^2$$

$BH = HE$ и $CK = KB$ т.к. радиусы $\perp$ хорде делят её пополам, а O, O_2 - линии центров и

BC - общ. хорда

$$\triangle O, BO_2 = \triangle O, CO_2 \text{ (по 3 сторонам)}$$

$$S_{O, BO_2} = \frac{BH \cdot O_2 B}{2} = \frac{2\sqrt{Rr - r^2} \cdot r}{2} = S_{O, CO_2}$$

$$2S_{O, BO_2} = S_{O, BCO_2} = 2r\sqrt{Rr - r^2}$$

$$S_{O_2 BE} = \frac{O_2 H \cdot BE}{2} = \frac{(2r - R) \cdot 2\sqrt{Rr - r^2}}{2}$$

$$\frac{S_{BO, CO_2}}{S_{O_2 BE}} = \frac{5}{4} = \frac{2r\sqrt{Rr - r^2}}{(2r - R) \cdot 2\sqrt{Rr - r^2}}$$

$$4r = 10r - 5R$$

$$5R = 6r$$

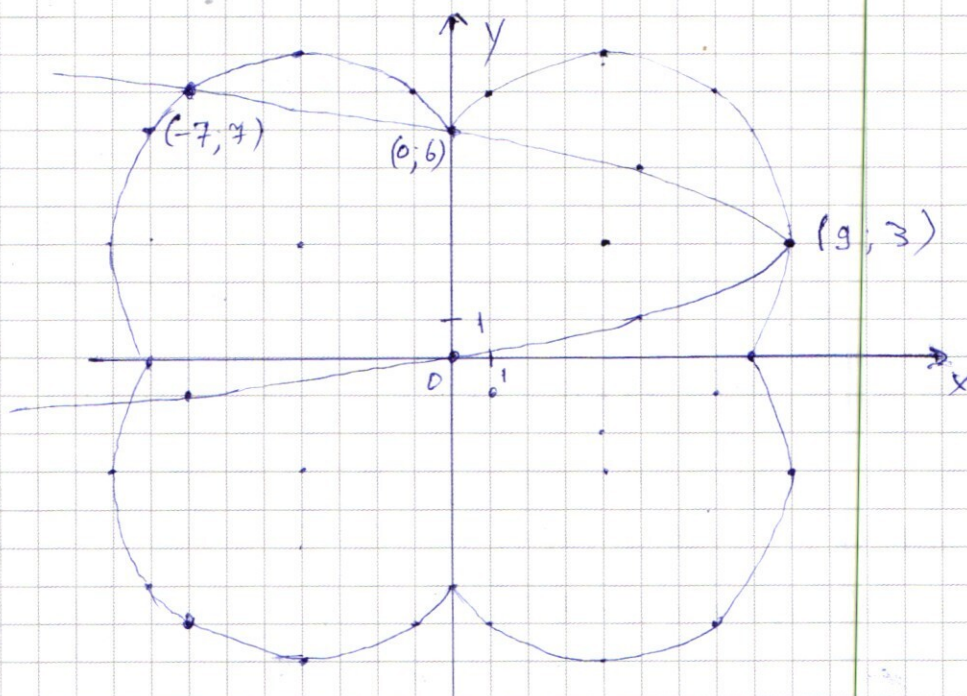
$$\frac{R}{r} = \frac{6}{5}$$

Ответ: $\frac{6}{5}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$7) \begin{cases} a^2 - 2ax - 6y + x^2 + y^2 = 0 & (1) \\ ((x) - 4)^2 + ((y) - 3)^2 = 25 & (2) \end{cases}$$

(2) задает на координатной плоскости 4 непересекающиеся окружности с радиусом 5



$$x^2 - 2ax + a^2 = -y^2 + 6y - \text{парабола с ветвями влево}$$

$$y_0 = \frac{-6}{-2} = 3 \quad x_0 = 9$$

$$x^2 - 2ax + a^2 - \text{может параболы с ветвями вправо} \quad x_0 = \frac{2a}{2} = a$$

т.е. она как бы "едит" по оси x и $y_0 = a^2 - 2a^2 + a^2 = 0$

Чтобы было два решения, надо чтобы $x^2 - 2ax + a^2$ (ветви вверх) пересекало 2 точки пересечения $-y^2 + 6y$ и группы окружностей. В противном случае в верхней полуокружности только 4 точки.

Подставим их все

$$3 = 81 - 18a + a^2 \quad a^2 - 18a + 78 = 0 \quad D = 324 - 4 \cdot 78$$

(если через точку $(9; 3)$)

$$= 324 - 312 = 12$$

$$a = \frac{18 \pm \sqrt{12}}{2} = 9 \pm \sqrt{3}$$

С другой стороны, остальные точки

могут быть $(0; 0)$; $(0; 6)$; $(-7; 1)$.

$$0 = a^2 \quad a \neq 0 \text{ не подходит.} \quad 6 = a^2 \quad a = \pm \sqrt{6} \text{ не подходит.}$$

$$1 = 49 + 14a + a^2 \quad a^2 + 14a + 42 = 0$$

$$D = 196 - 168 = 28$$

Получается, что решений

$$a = \frac{-14 \pm \sqrt{28}}{2} = -7 \pm \sqrt{7}$$

нет, т.к. не в каком случае

знакение a не совпадает. Ответ: нет решений

2) Очевидное решение $a=3 \quad b=2 \quad c=4$

тогда
$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 4 \\ 3x + 2y + 4z = 8 \end{cases} \quad \text{что неверно}$$

Ответ: $a=3 \quad b=2$
 $c=4$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$4) 1) x - 3 \geq 0 \quad x \geq 3$$

$$2x^4 + x^2 - 6x - 3x^3 + 9x^2 + 9 = 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 10x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$x^3(2x - 3) - 3(2x - 3) + 10x^2 = 0$$

$$(2x - 3)(x^3 - 3) = -10x^2 \quad \text{т.к. } x \geq 3, \text{ то}$$

$$\geq 0 \quad \neq 0$$

, значит, левое произведение
не может быть отрицат. ~~и~~ не подходит

$$2) x - 3 \leq 0 \quad x \leq 3$$

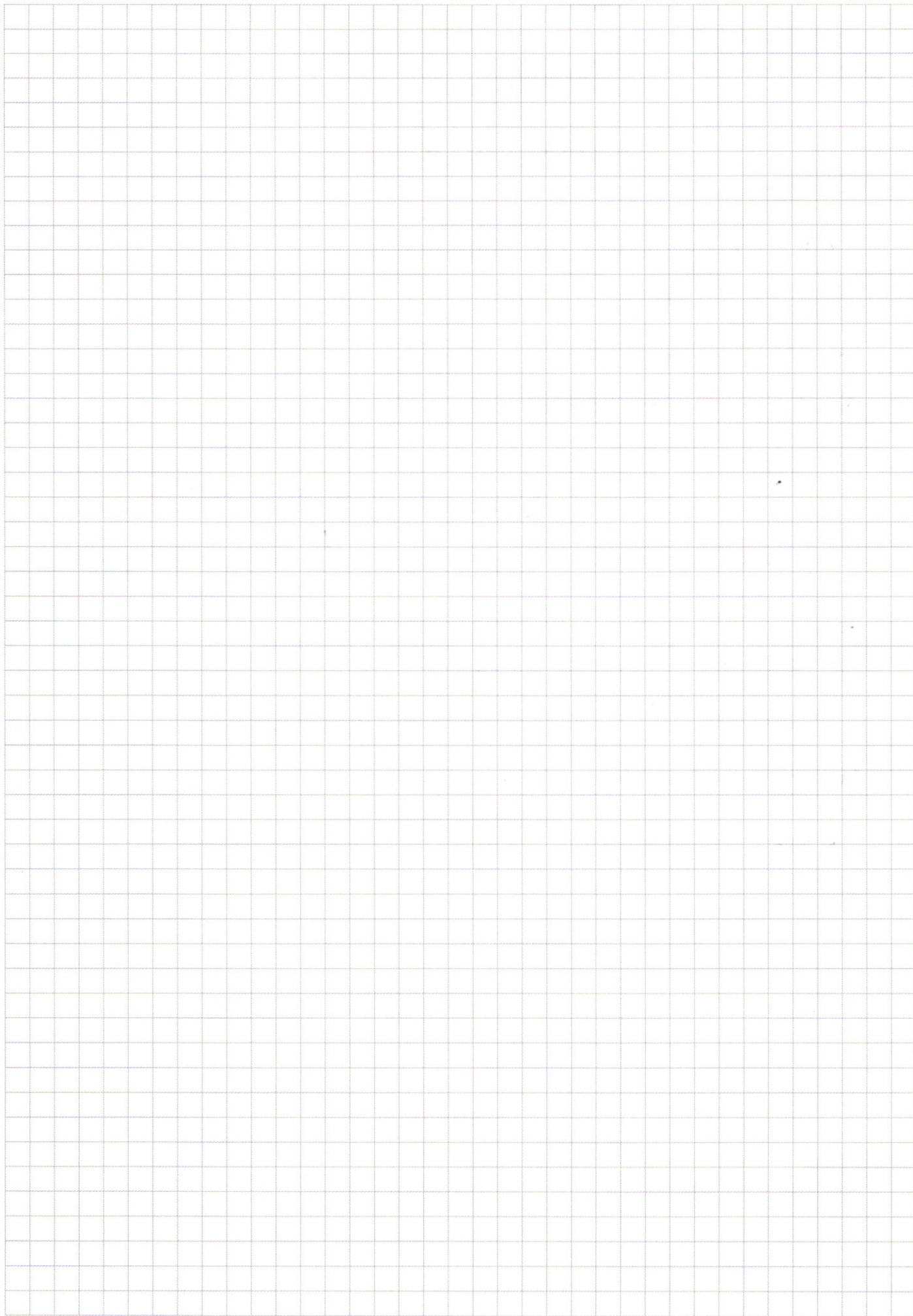
$$2x^4 + x^2 - 6x + 3x^3 - 9x^2 + 9 = 0$$

$$2x^4 - 8x^2 + 3x^3 - 6x + 9 = 0 \quad \text{Подберем } x = 1$$

$$(x - 1)(2x^3 + 5x^2 - 3x - 9) = 0$$

$$x = 1 \quad \text{подходит} \quad x = 3$$

Ответ: 1



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $V_n = 1,5 V_w$

$\Pi \chi - M_0 \quad \text{и} \quad \text{и} \text{и} - M_0$

$D = 4 + 4 \cdot 14 = 60$

$(x-2)(x-\frac{-2 \pm \sqrt{60}}{2})(x-\frac{-2-\sqrt{60}}{2}) = 0$

$\frac{-4,5 \pm \sqrt{60}}{2} \approx 5$
 $7 \leq \sqrt{60} \leq 8$

$(\frac{-2+\sqrt{60}}{2})^3 - 10(\frac{-2+\sqrt{60}}{2}) + 7 =$

$\frac{60\sqrt{60} - 3 \cdot 60 \cdot 2 + 3 \cdot 60 - 4 - 8}{8}$
 $W_w = 2 \cdot V_w$

$W = \frac{V}{n}$

$W_w = \frac{V_w}{2}$

$W_n = \frac{1,5 V_w}{1}$

$W_n - W_w = 1,5 V_w - 0,5 V_w = 1 \cdot V_w$

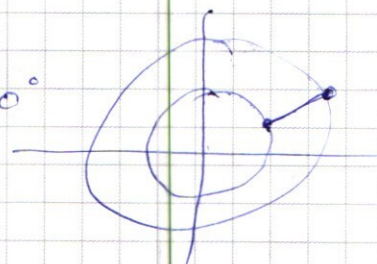
$\varphi = 240^\circ$

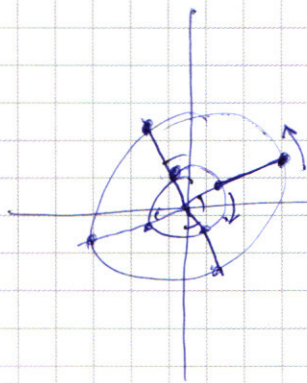
$\frac{\varphi}{\Delta W} = \frac{240^\circ}{V_w}$

$\Delta W = W_n + W_w = 2 V_w$

$t = \frac{120^\circ}{2 V_w}$

$\frac{V_w}{2} \cdot \frac{120^\circ}{2 V_w} = 30^\circ$





$$t = \frac{360}{2V_{\text{м}}}$$

$$\frac{V_{\text{м}}}{2} \cdot \frac{360^\circ}{2V_{\text{м}}} = 90^\circ$$

$$t = \frac{360}{2V_{\text{м}}}$$

$$\frac{V_{\text{м}}}{2}$$

$$h_{x_1}; h_{x_2} = \sqrt{3}; 1$$

$$-1; \sqrt{3}$$

$$-\sqrt{3}; -1$$

$$1; -\sqrt{3}$$

$$\begin{array}{r} 1 \ 2 \\ \times 6 \ 25 \\ \hline 3 \ 1 \ 2 \ 5 \\ + 2 \ 5 \ 0 \\ \hline 1 \ 5 \ 6 \ 2 \ 5 \end{array}$$

2) a, b, c

$$\begin{cases} ax + 2y + cz = 0 \\ 3x + by + 4z = 4b \end{cases}$$

$$x(3-a) + y(b-2) + z(4-c) = 4b-c$$

$$3x - ax + by - 2y + 4z - cz = 4b - c = 0$$

$$3x + 2y + 4z = 4$$

$$3x + 2y + 4z = 4b$$

$$b(y-4) = -z(c-4)$$

$$343 - 40 + 7$$

Нет р-н.

$$\begin{array}{r} 6 \\ 1 \ 4 \ 9 \\ \hline 3 \ 4 \ 3 \end{array}$$

$$3) (\sqrt{x^3 - 10x + 7} + 1) \cdot |x^3 - 18x + 28| \leq 0$$

$$OD3 \quad x^3 - 10x + 7 \geq 0$$

$$x^3 - 10x + 7 \geq 0$$

$$x^3 - 18x + 28 - 21 \geq 0$$

$$x^3 - 18x + 28 = 0$$

$$x = 2$$

$$(x-2)(x^2 + 2x - 14) = 0$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 18x + 28 \quad | \quad x-2 \\ \hline x^3 - 2x^2 \\ \hline -2x^2 - 18x \\ \hline -2x^2 - 4x \\ \hline -14x + 28 - (14x + 28) \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2x^4 + x^2 - 6x - 3x^2 |x-3| + 9 = 0$$

$$x - 3 \geq 0$$

$$x \geq 3$$

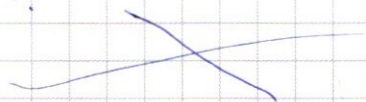
$$2x^4 + x^2 - 6x - 3x^3 + 9x^2 + 9 = 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 10x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$2x^2(x^2 + 5) - 3x(x^2 + 2) \quad (x+3)(x-\sqrt{1,5})(x+\sqrt{1,5})x^2$$

$$2x(x^3 - 3) - 3(x^3 - 3) + 10x^2 = 0$$

$$(x^3 - 3)(2x - 3) = -10x^2 \quad (x+3)(2x^2 - 3) - x^2$$



$$x \leq 3$$

$$x - 3 \leq 0$$

$$2x^4 + x^2 - 6x + 3x^3 - 9x^2 + 9 = 0$$

$$2x^4 + 3x^3 - 8x^2 - 6x + 9 = 0 \quad x = 1$$

$$\begin{array}{r} -2x^4 + 3x^3 - 8x^2 - 6x + 9 \\ \underline{2x^4 - 2x^3} \\ -5x^3 - 8x^2 - 6x + 9 \end{array} \quad \begin{array}{r} x-1 \\ \hline 2x^3 + 5x^2 - 3x - 9 \\ \hline 2x^2 + 5x - 3 \end{array} \quad x = \frac{-5 \pm 4}{4} = \frac{1}{4}; -3$$

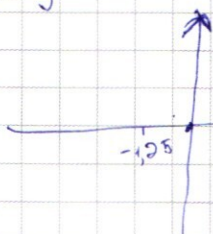
$$\begin{array}{r} -5x^3 - 8x^2 \\ \underline{5x^3 - 5x^2} \\ -3x^2 - 6x - 8x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -3x^2 - 6x \\ \underline{-3x^2 + 3x} \\ -9x - 8x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -9x - 8x^2 \\ \underline{-9x + 9} \\ -8x^2 + 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -8x^2 + 9 \\ \underline{-8x^2 + 24x - 16} \\ 24x - 7 \end{array}$$

$$-128 + 80 + 12 - 9$$



$$(2x^3 + 5x^2 - 3x - 9)(x-1) = 0$$

$$54 + 45 - 9 - 9$$

$$-2 + 5 + 3 - 9$$

$$-16 + 20 + 6 - 9 = 1$$

$$-54 + 45 + 9 - 9 = 0$$

$$(x-1)(x(x-\frac{1}{4})(x+3)-9)$$

$$70 \text{ cc.} \quad \frac{140}{70} = 2 \quad \frac{1}{6^{70}} \quad 4\left(\frac{2}{6}\right)^{70}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 6 \overline{) 640} \end{array}$$

$$\frac{2}{6}$$

$$\frac{1}{6^{10}}$$

1 → 2

4 6

4 6

7) $\frac{1}{6 \cdot 10} - \text{все } 5, \text{ послед. } 6$

$$1 \left(\frac{2}{6} \right)^{70} = \frac{1}{3^{70}} - 6 \approx 5$$

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$$

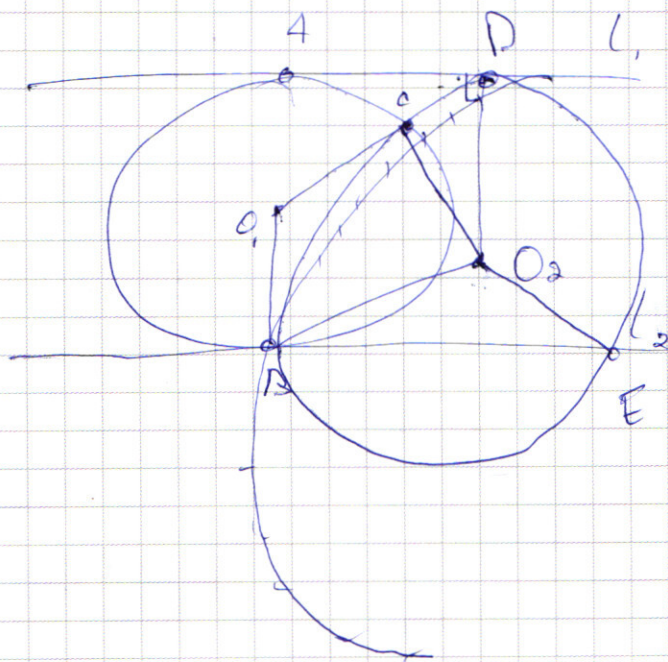
$$\downarrow \left(\frac{2}{6}\right)^{70} = \frac{1}{3}^{70} - 1$$

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} =$$

6.

$$\frac{S_{\text{BO}, \text{CO}_2}}{S_{\text{O}_2 \text{BE}}} = \frac{5}{4}$$

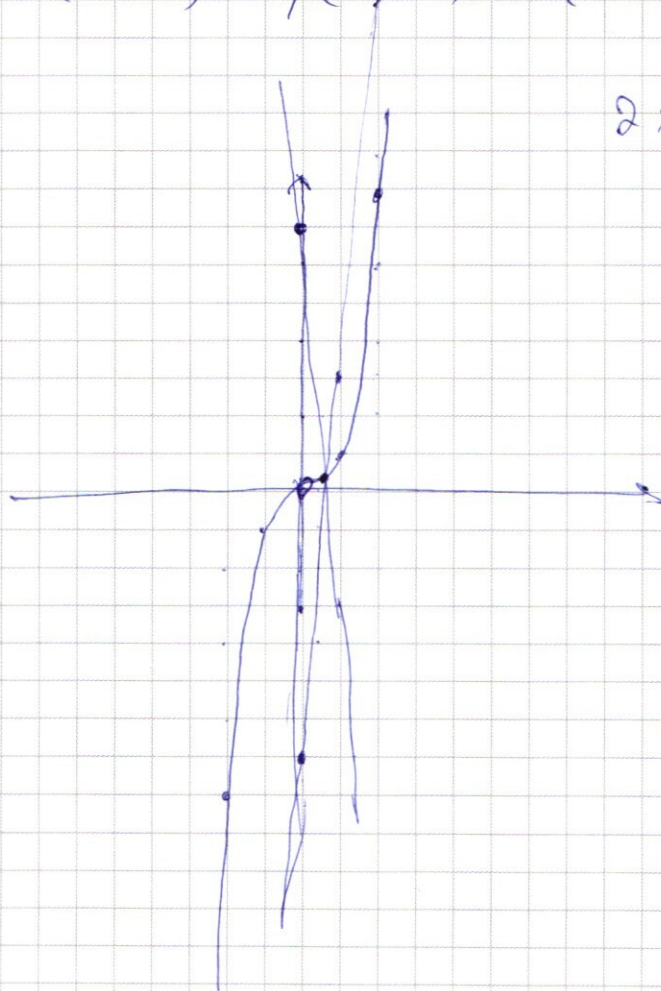
$$\frac{R_1}{R_2} = 1$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} ax + by + cz = c \\ 3x + by + 4z = 4b \end{cases} \quad a=3 \quad b=2 \quad c=4$$

$$x(3-a) + y(b-\cancel{a}) + z(4-c) = 4b-c$$



$$2x^3 = 3x + 9 - 5x^2$$

$$-5x^2 + 3x + 9$$

$$x_0 = \frac{-3}{-10} = 0,3$$

$$\begin{aligned} y_0 &= -5 \cdot 0,09 + 0,9 + 9 \\ &= -0,45 + 0,9 + 9 \\ &= 9,45 \end{aligned}$$



2

6

$$S_{\max} = \underline{420}$$

$$S_{\min} = \underline{70}$$

$$\frac{71}{\cancel{48}351}$$

mm

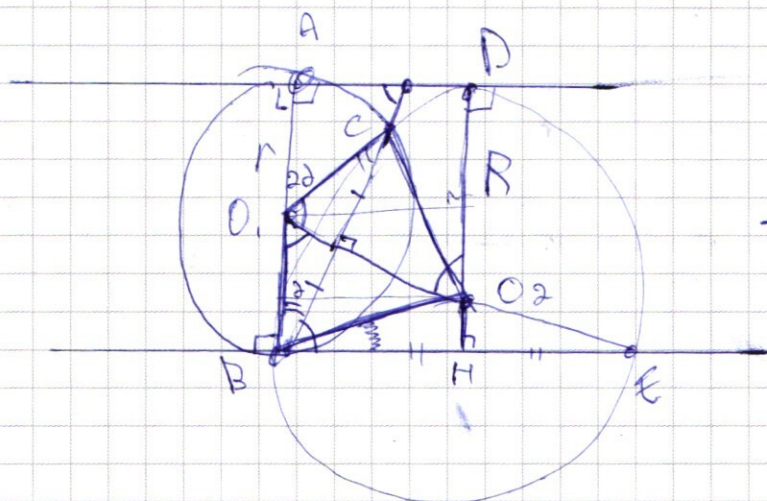
$$\frac{70}{351}$$

Омквн : 140

71 - 419

$$\begin{cases} ax + 2y + cz = c \\ 3x + by + 4z = 4b \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$180^\circ + 90^\circ + 90^\circ$$

360-2d

$$90$$

 ~~180~~ + 2 + 180

$270 + 6$

$$\odot_2 H = 2r - R$$

$$BF = 2 \cdot \sqrt{R^2 - (2r - R)^2}$$

$$= 2V R^2 - (4r^2 - 4Rr + R^2)$$

$$2\sqrt{4Rr-4r^2} = 4\sqrt{Rr-r^2}$$

$$S_{O_2CO_2} = \frac{2\sqrt{Rr-r^2} \cdot n}{2} = S_{O_2CO_2}$$

$$S_{O_2CO_2B} = 2V R \overbrace{r-r^2} \cdot n$$

$$S_{2BE} = \frac{2 \sqrt{Rr - r^2} \cdot (2r - R)}{2}$$

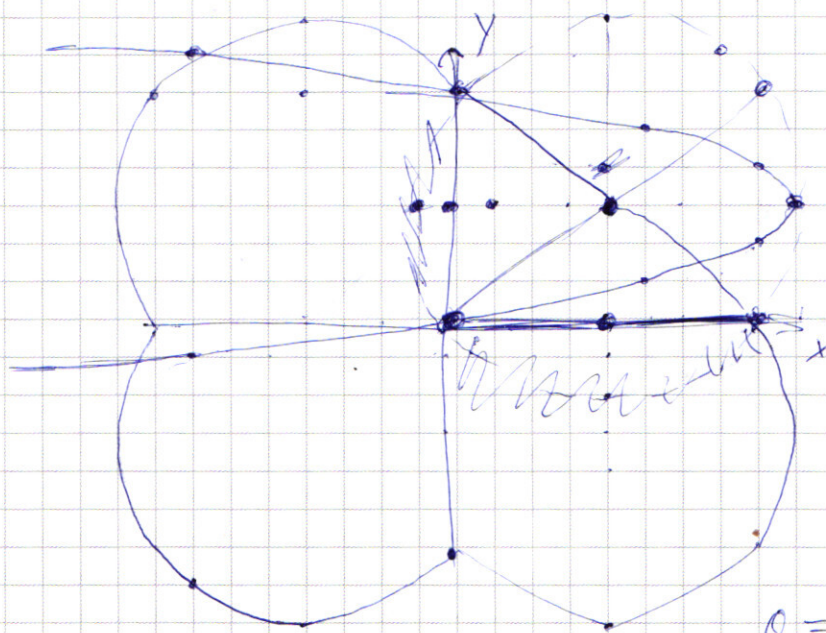
$$\frac{r}{2r-R} = \frac{5}{4}$$

$$4R = 10r \Rightarrow 5R$$

$$5R = 6 \Rightarrow \frac{R}{1} = \frac{6}{5}$$

$$\begin{cases} a^2 - 2ax - 6y + x^2 + y^2 = 0 \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = 25 \end{cases}$$

2 реш. a - ?



$$y = \sqrt{-x^2 + 6y + 2ax - a^2}$$

$$\neq -x^2 + 6y$$

$$x \geq 0 \quad y \leq 0$$

$$(-x-4)^2 + (-y-3)^2 = 25$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = -y^2 + 6y$$

$$0 = a^2 \quad a = 0$$

$$x_0 = \frac{+2a}{2} = a$$

$$y_0 = a^2 - 2a^2 + a^2 = 0$$

$$9; 3 \quad 3 = \cancel{81} 0$$

$$3 = \cancel{81} 81 - 18a + a^2$$

$$6 = a^2$$

$$a^2 = \pm \sqrt{6}$$

$$a^2 - 18a + 78 = 0$$

$$D = 324 - 312 = 12$$

$$a = \frac{18 \pm \sqrt{12}}{2} = 9 \pm \sqrt{3}$$

$$6 = a^2 \quad a = \pm \sqrt{6}$$

$$7 = 49 + 14a + a^2$$

$$a^2 + 14a - 42 = 0 \quad D = 196 + 168$$

$$a = \frac{-14 \pm \sqrt{364}}{2}$$

$$\begin{array}{r} x \begin{array}{l} 14 \\ + 14 \end{array} \\ \hline 364 \\ \hline 6 \\ \times 18 \\ \hline 108 \\ + 1461 \\ \hline 324 \end{array}$$