

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Муравей движется по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0(-1; \sqrt{3})$ и $N_0(2\sqrt{3}; 2)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a, \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6, \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Такое расстояние достигается когда $\alpha = 0$ или $\varphi_n = \varphi_m$.

$$\varphi_n(t) = \frac{\pi}{6} + 2\omega t; \quad \varphi_m(t) = \frac{2}{3}\pi + \omega t. \quad \text{М. е. движется}$$

по окр.-ти, то $\varphi_n + 2\pi \cdot k = \varphi_m$, где $k \in \mathbb{Z}$, тогда

$$1) \quad \frac{\pi}{6} + 2\omega t = \frac{2}{3}\pi - \omega t \Rightarrow \frac{3}{2}\omega t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega t = \frac{\pi}{3}, \text{ тогда}$$

$$\varphi_{n1} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}; \quad \text{тогда } y_1 = \sin \varphi_{n1} \cdot R_n = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = 2\sqrt{3}$$

$$x_1 = \cos \varphi_{n1} \cdot R_n = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2 \Rightarrow x_1; y_1 = (2; 2\sqrt{3})$$

$$2) \quad 2\pi + \frac{\pi}{6} + 2\omega t = \frac{2}{3}\pi - \omega t \Rightarrow \frac{3}{2}\omega t = -\frac{7}{6}\pi \Rightarrow \omega t = -\frac{7}{6}\pi$$

$$\varphi_{n2} = \frac{\pi}{6} - \frac{7}{6}\pi = -\frac{\pi}{2}; \quad y_2 = \sin \varphi_{n2} \cdot R_n = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = -2\sqrt{3}$$

$$x_2 = \cos \varphi_{n2} \cdot R_n = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2 \Rightarrow x_2; y_2 = (2; -2\sqrt{3})$$

$$3) \quad 4\pi + \frac{\pi}{6} + 2\omega t = \frac{2}{3}\pi - \omega t \Rightarrow \frac{3}{2}\omega t = -\frac{7}{6}\pi \Rightarrow \omega t = -\frac{7}{6}\pi$$

$$\varphi_{n3} = \frac{\pi}{6} - \frac{7}{6}\pi = -\pi \Rightarrow y_3 = \sin \varphi_{n3} \cdot R_n = 0, \quad x_3 = \cos \varphi_{n3} \cdot R_n = -4 \Rightarrow x_3; y_3 = (-4; 0)$$

$$4) \quad 6\pi + \frac{\pi}{6} + 2\omega t = \frac{2}{3}\pi - \omega t \Rightarrow \frac{3}{2}\omega t = -\frac{11}{6}\pi \Rightarrow \omega t = -\frac{11}{6}\pi$$

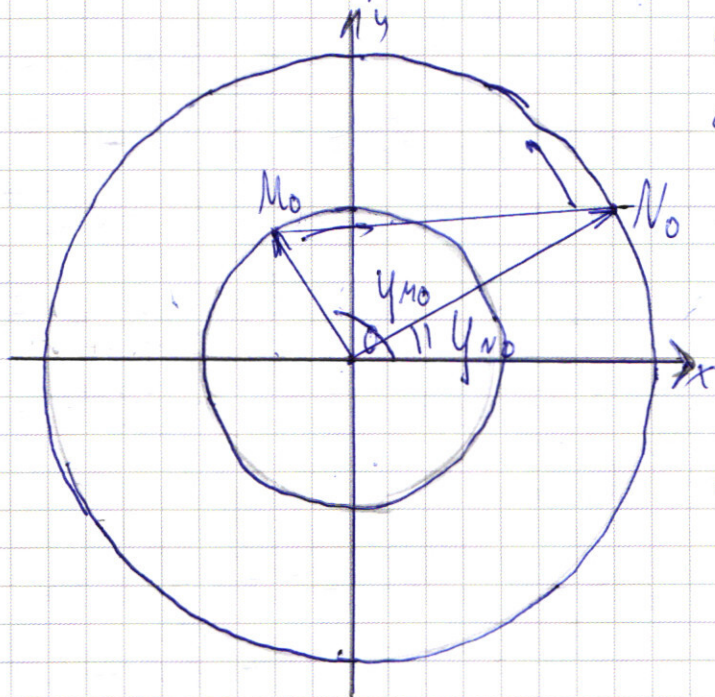
$$\varphi_n = \frac{\pi}{6} - \frac{11}{6}\pi = -\frac{10}{6}\pi = -\frac{5}{3}\pi = -\frac{5}{3}\pi + 2\pi = \frac{1}{3}\pi - \text{«встреча»}$$

при этом уже уже была и дальше все начнется
повторяться $\Rightarrow$, тогда:

Ответ: $x; y = (2; 2\sqrt{3}), (2; -2\sqrt{3}), (0; -4)$

11

П.к траектории это окружности с центром в точке $O(0;0)$, то все точки на окружности должны удовлетворять ур-ию $x_i^2 + y_i^2 = R_i^2$. Отсюда найдем радиусы окружностей жука и муравья. $R_m^2 = (-1)^2 + (\sqrt{3})^2 = 1+3=4 \Rightarrow R_m=2$ - радиус муравья, $R_n^2 = (2\sqrt{3})^2 + 2^2 = 4 \cdot 3 + 4 = 16 \Rightarrow R_n=4$ - радиус жука. Положения жука и муравья на окр-ях однозначно определяется углом поворота радиус-вектора φ_i . Угловые скорости жука и муравья $= \omega_n = \frac{v}{R_n}$, $\omega_m = \frac{v}{R_m}$, где v - их линейные скорости. П.к радиус окр-ти жука в 2 раза больше, чем муравья, то $\omega_n = 2\omega_m = 2\omega$



Пусть φ_{m0} и φ_{n0} - начальные углы жука и муравья, тогда $\tan \varphi_{m0} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi_{m0} = \frac{\pi}{6}$, $\tan \varphi_{n0} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi_{n0} = \frac{\pi}{6}$

Найдем ур-ие движения. Покажем, что расстояние между жуком и муравьем $= 2$ м, когда их радиус-векторы на одной прямой. Пусть угол между радиус-векторами α ($\alpha \leq \pi$). Тогда по т. косинусов $MN^2 = R_m^2 + R_n^2 - 2R_m \cdot R_n \cdot \cos \alpha = 16 + 4 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \cos \alpha = 20 - 16 \cos \alpha$. $\cos \alpha \in (-1; 1) \Rightarrow MN_{\min}^2 = 20 - 16 = 4 \Rightarrow MN_{\min} = 2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$a = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1 = 3; 1 \Rightarrow b = 1; 3$$

2) ~~а~~ $a + b = -4$: $ab \cdot (-4) = 12 \Rightarrow ab = -3 \Rightarrow b = -\frac{3}{a}$, тогда

$$a - \frac{3}{a} + 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{a^2 + 4a - 3}{a} = 0 \Leftrightarrow a^2 + 4a - 3 = 0, a \neq 0$$

$$D = 16 + 3 \cdot 4 = 16 + 12 = 28 = 2^2 \cdot 7$$

$$a = \frac{-4 \pm 2\sqrt{7}}{2} = -2 \pm \sqrt{7} = -2 + \sqrt{7}; -2 - \sqrt{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = -\frac{3}{-2 - \sqrt{7}} = \frac{3}{\sqrt{7} + 2}; -\frac{3}{-2 + \sqrt{7}} = \frac{3}{2 - \sqrt{7}}$$

~~Ответ~~ Рассмотрим случай, когда $a = 0$.

$$36x + 12y = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x$$

$$46x + yb^2 = 1 \Rightarrow y = \frac{1 - 46x}{b^2} = -\frac{4}{b}x + \frac{1}{b^2}$$

Также прямые должны совпадать; $\Rightarrow$

$$\begin{cases} -\frac{3}{4} = -\frac{4}{b} \\ \frac{1}{b^2} = 0 \end{cases} \text{ но } \frac{1}{b^2} \neq 0 \text{ при любом } b \Rightarrow a \neq 0$$

Ответ: $a, b = (3; 1), (1; 3), (-2 - \sqrt{7}; \frac{3}{\sqrt{7} + 2}), (\sqrt{7} - 2; \frac{3}{2 - \sqrt{7}})$

м 2

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

Рассмотрим случаи, когда $b \neq 0$ и $a+b \neq 0$.

- 1) $b \neq 0$: $4bx \neq 0$ и $(a+b)y \cdot b \neq 0$, тогда 2-е уравнение дает $0 \neq 1 \Rightarrow$ нет решений при любых x, y .
- 2) $a+b \neq 0$: 1-е уравнение дает $12y = a$, но из этого однозначно определяется $y \Rightarrow$ решение будет не при любых x, y .

Получается, что $b \neq 0$ и $a+b \neq 0$. Тогда 1-е уравнение задаёт прямую $y = \frac{a - 3(a+b)x}{12} = -\frac{a+b}{4}x + \frac{a}{12}$,

а 2-е задаёт прямую $y = \frac{1-4bx}{b(a+b)} = -\frac{4}{a+b}x + \frac{1}{b(a+b)}$

Пересечение этих прямых и есть решение системы, но две прямые пересекаются только в одной точке, значит чтобы решением системы были все x, y , то эти прямые должны совпасть. Это возможно если их коэффициенты и свободные члены равны, тогда получаем:

$$\begin{cases} -\frac{a+b}{4} = -\frac{4}{a+b} \\ \frac{a}{12} = \frac{1}{b(a+b)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2 = 16 \\ ab(a+b) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=4 \\ a+b=-4 \\ ab(a+b)=12 \end{cases}$$

1) $a+b=4$: $\Rightarrow ab \cdot 4 = 12 \Rightarrow ab = 3$, тогда $\begin{cases} a+b=4 \\ ab=3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow b = \frac{3}{a}$, подставляем в первое: $a + \frac{3}{a} - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 - 4a + 3}{a} = 0 \Rightarrow a^2 - 4a + 3 = 0, a \neq 0$$

$$D = 16 - 3 \cdot 4 = 4 = 2^2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2^3 - 2 + 10 = 8 + 8 = 16 \Rightarrow x = 2 - \text{подходит}$$

$$\frac{(-1-\sqrt{13})^3}{8} - \frac{-1-\sqrt{13}}{2} + 10 = \frac{-1 \cdot (1+\sqrt{13})^3}{8} + \frac{1+\sqrt{13}}{2} + 10 =$$

$$= \frac{-1(1+2\sqrt{13}+13)(1+\sqrt{13})}{8} + \frac{1+\sqrt{13}}{2} + 10 =$$

$$= -\frac{1}{8} \cdot (1+\sqrt{13})(14+2\sqrt{13}) + 10 + \frac{1+\sqrt{13}}{2} =$$

$$= -\frac{1}{4}(1+\sqrt{13})(7+\sqrt{13}) + 10 + \frac{1+\sqrt{13}}{2} = -\frac{7+8\sqrt{13}+\sqrt{13} \cdot 7+13}{4} +$$

$$+ 10 + \frac{1+\sqrt{13}}{2} = -5 - 2\sqrt{13} + 10 + \frac{1+\sqrt{13}}{2} =$$

$$= 5,5 - \frac{3}{2}\sqrt{13} \approx \text{заменяем, что } 3,7^2 = 13,69, \text{ что}$$

$$\text{большее, чем } 13 \Rightarrow \sqrt{13} < 3,7 \Rightarrow \sqrt{30,25} - \sqrt{\frac{117}{4}} =$$

$$= \sqrt{30,25} - \sqrt{29,25} > 0 \Rightarrow x = \frac{-1-\sqrt{13}}{2} - \text{подходит.}$$

$$x = \frac{\sqrt{13}-1}{2}; \quad \frac{(\sqrt{13}-1)^3}{8} - \frac{\sqrt{13}-1}{2} + 10 = \frac{(\sqrt{13}-1)^3}{8} - \frac{\sqrt{13}}{2} + 10,5$$

$$\sqrt{13}-1 > 0 \Rightarrow (\sqrt{13}-1)^3 > 0$$

$$\sqrt{13} < \sqrt{100} \approx 10 \Rightarrow 10,5 - \frac{\sqrt{13}}{2} > 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{13}-1}{2} - \text{подходит.}$$

Ответ: $x = 2; \frac{\sqrt{13}-1}{2}; \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$

$$\sqrt[3]{(x+3)\sqrt{x^3-x+10}} = x^2+5x+6; \text{ разложим кв. трёхчлен}$$

x^2+5x+6 - на множители.

$$x^2+5x+6=0, D=25-24=1 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm 1}{2} = -3; -2,$$

тогда $x^2+5x+6 = (x+3)(x+2)$

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = (x+3)(x+2) \Rightarrow$$

$$(x+3) \left(\sqrt{x^3-x+10} - x - 2 \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3=0 \\ \sqrt{x^3-x+10} - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ \sqrt{x^3-x+10} = x+2 \end{cases}$$

Так же должно выполняться, что

$$x^3-x+10 \geq 0$$

$$\sqrt{x^3-x+10} = x+2 \quad |^{\text{кр}} \text{ - возведём в квадрат:}$$

$$x^3-x+10 = x^2+4x+4 \Leftrightarrow x^3-x^2-5x+6=0 \quad f(x)$$

Заметим, что $f(2)=0$: $2^3-2^2-5 \cdot 2+6 = 8-4-10+6 =$
 $= 14-14=0$, тогда по м. Безу $f(x) : x-2$

$$\begin{array}{r} x^3-x^2-5x+6 : x-2 \\ \underline{x^3-2x^2} \\ x^2-5x+6 \\ \underline{x^2-2x} \\ -3x+6 \\ \underline{-3x+6} \\ 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow x^3-x^2-5x+6 = (x-2)(x^2+x-3)$$

значит $x^3-x^2-5x+6=0$

$$\begin{cases} x-2=0 \\ x^2+x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x^2+x-3=0 \end{cases}$$

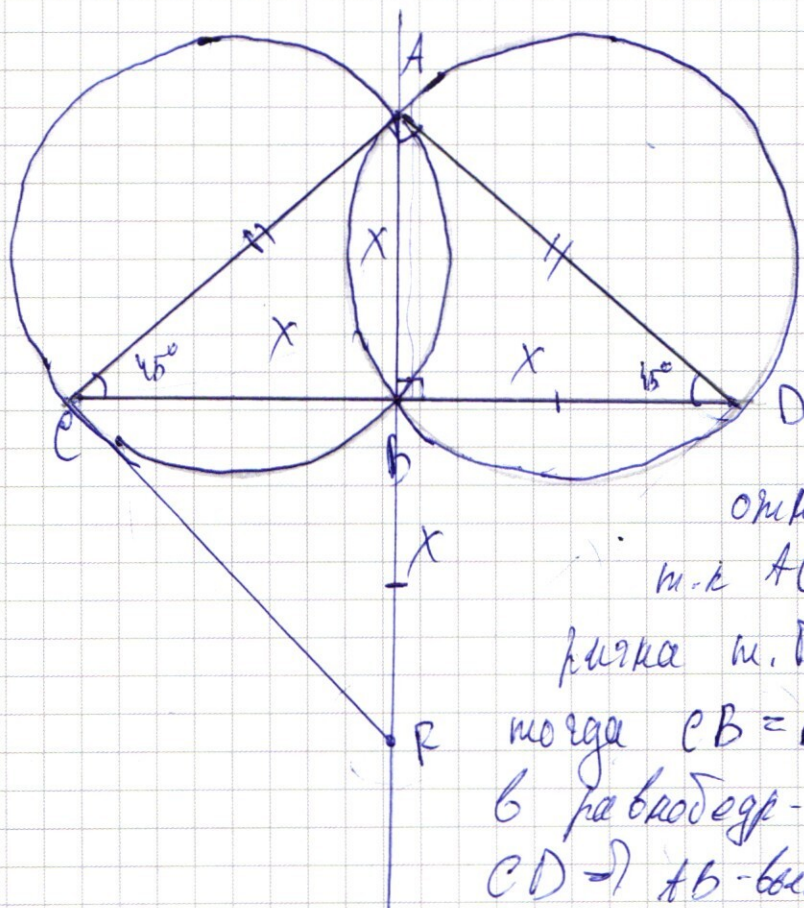
$$x^2+x-3=0, D=1+12=13 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2} = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}, \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$$

Подставим все полученные x ($x=-3, 2, \frac{-1-\sqrt{13}}{2}, \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$)
 в x^3-x+10 и проверим, чтобы это было больше 0.

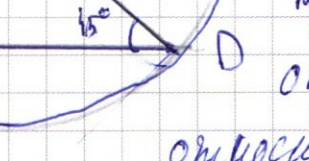
$$-3^3+3+10 = 13-27 = -14 < 0 \Rightarrow x \neq -3$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6



П.к. $k_1 = k_2 = 9$, то
 $\angle ACD = \angle ADC = 45^\circ =$
 $= \frac{1}{2} \angle AOB$ (вписанный),
 Тогда $\Rightarrow ACD$ - равнобедренный

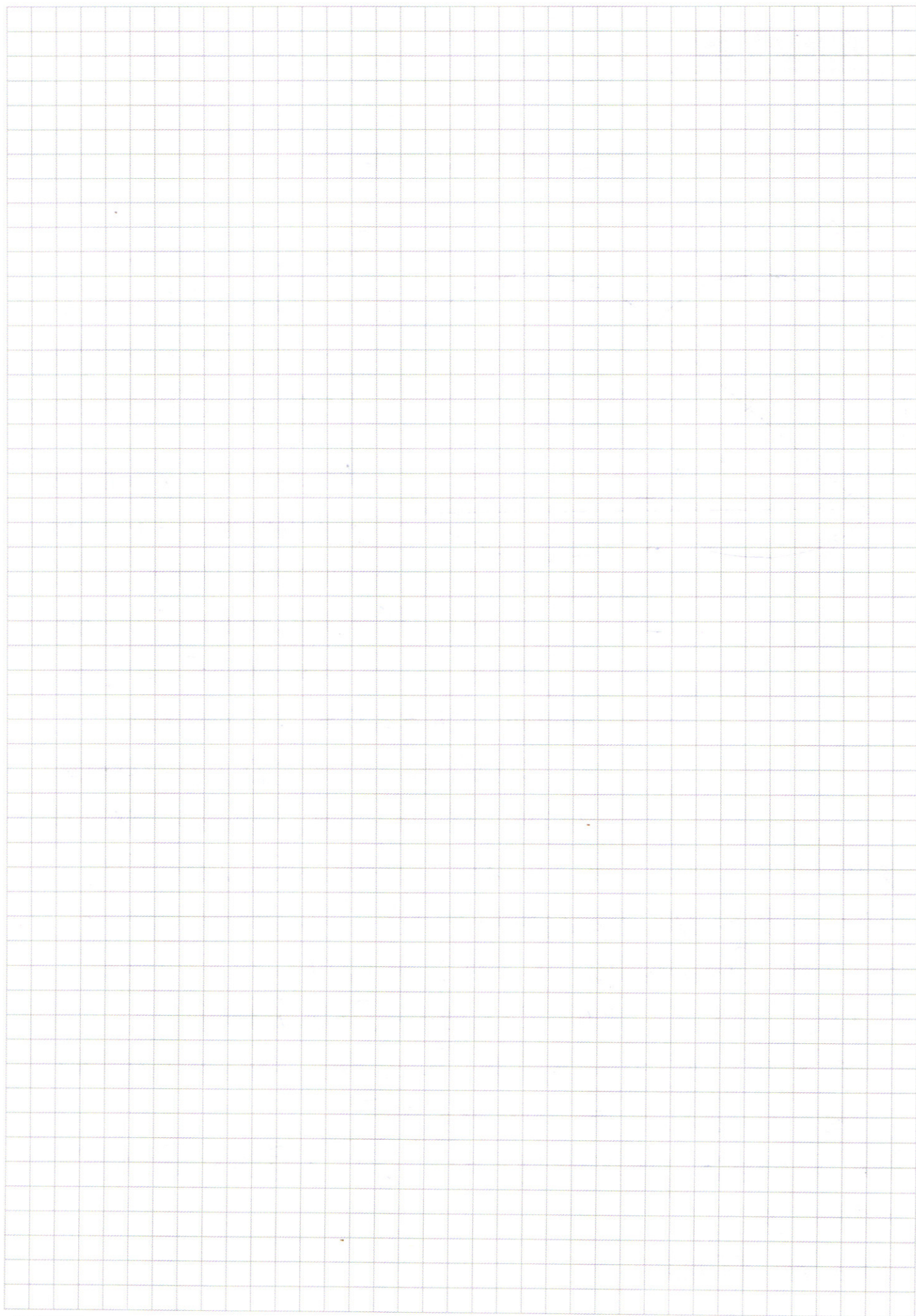

 Так же т.к $\angle 1 = \angle 2$, то
 окр-ти симметричны
 относительно прямой AB , а
 т.к $AC = AD$, то и т. C симмет-
 рична т. D отн. прямой AB , но
 тогда $CB = DB \Rightarrow AB$ -медиана
 в равнобедр-м $\triangle ACD$ к основанию
 $CD \Rightarrow AB$ -высота, значит $AB \perp CD$,

тогда есть две взаимно перпендикулярные СD и
через м. В $\Rightarrow$ они совпадают и АВ - перпендикуляр из
условия. Рассмотрим $\triangle ABC$: т.к. $\angle CBA = 90^\circ$, $\angle ACB = 45^\circ$,
то $\angle CAB = 45^\circ = \angle ACB \Rightarrow CB = AB = x$. По т. Пифагора:

$MO \perp AB \Rightarrow \angle AOB = 45^\circ \Rightarrow \angle AOB \Rightarrow CB = AB = x$. По т. Пифагора:
 $AC^2 = AB^2 + CB^2 \Rightarrow AC = \sqrt{2}x$. R - центр ABC - вписан в окр-ть,
 то $R = \frac{1}{2}AC = \frac{x}{2} = 9 \Rightarrow x = 9\sqrt{2}$.

По т. Пифагора для $\triangle OBF$: $OF = \sqrt{OB^2 + BF^2} = \sqrt{2}x = \sqrt{2 \cdot 9 \cdot 2} = 6$

Problem: $CF = 36$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

п 5

Задаем 1400 на калькулятор: $1400 = 2 \cdot 700 = 2 \cdot 2 \cdot 350 =$
 $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 175 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$

П.к. цифра числа ≤ 9 и ≥ 0 , то возможные цифры
в числе это 1, 2, 4, 5, 7. Есть 2 варианта числа.

- 1) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1$ — и их перестановки
- 2) $4 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ — а их перестановки

$$1) A = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8}$$

кол-во различных чисел равно числу перестановок
в числе также кол-во перестановок, когда одинаковые
цифры меняются местами. Общее число перестановок

$$8! , \text{ но 3 раза повт. } 2^3, 2 - 1^4, 2 - 1^4 \Rightarrow n_1 =$$

$$= \frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$$

- 2) $B = \overline{b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7 b_8}$, аналогично, только 8 цифр
"5" повторяется 2 раза, а "1" — 3. Тогда $n_2 = \frac{8!}{2! \cdot 3!} =$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 3} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 10$$

$$\text{Общее кол-во чисел } N = n_1 + n_2 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 + 8 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 10 =$$

$$= 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 (1 + 2) = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 = 56 \cdot 30 \cdot 3 = 56 \cdot 90 =$$

$$= \underline{5040}. \quad \text{Ответ: } \underline{5040}$$

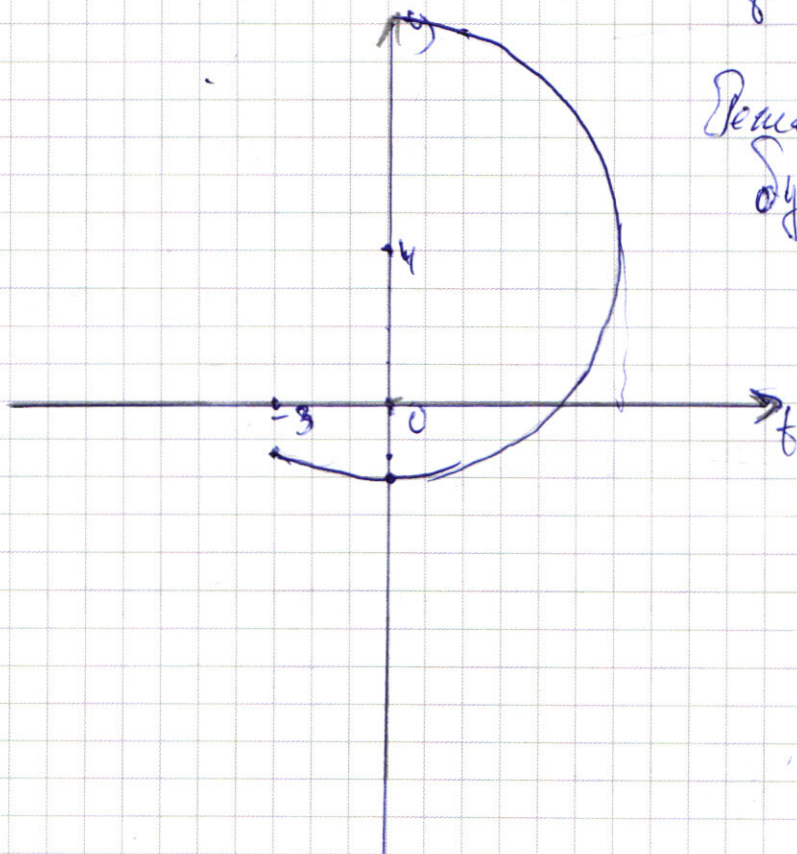
$|x-3-y| + |x-3+y| \leq 6$ — ~~расстояние~~ сумма расстояний между точками

$2(|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25$ — ~~конус~~ окружность, т.к. отрицательные x, y совпадают с положительными, радиус $\sqrt{25} = 5$ и вект $x_0; y_0 = (3; 4)$

т.к. 2-е ур-ие совпадает при $x, y \in \text{отр. } x, y$, то оно задаёт окр-ть (конус-то) при $x, y \geq 0$, тогда $|x|-3 = |x-3|$. Пусть $t = x-3$, тогда:

$$|t-y| + |t+y| \leq 6$$

$t^2 + (|y|-4)^2 = 25$ — в координатах $y(t)$ это ~~конус~~ часть окр-ти, радиуса 5 и центра в $t_0; y_0 = 0; 4$
 $t \in [-3; 5]$, т.к. $x \geq 0$.



Решением системы
будут участки, где
 $|t-y| + |t+y| \leq 6$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 9 \\ \hline 117 \\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ 520 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3,6 \\ \times 3,6 \\ \hline 216 \\ 1080 \\ \hline 12,96 \end{array}$$

$$\sqrt{13} < 3,7$$

$$3,6 < \sqrt{13} < 3,7$$

$$\begin{array}{r} 47 \\ \times 47 \\ \hline 329 \\ 4880 \\ \hline 3209 \end{array}$$

при $x \in (-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, \infty)$

$$3x^2 - 170 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{3}$$

$$\begin{array}{r} 3209 \\ \times 47 \\ \hline 22463 \\ + 28360 \\ \hline 150823 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 87 \\ \times 37 \\ \hline 2549 \\ + 110 \\ \hline 4369 \end{array}$$

$$(1 + \sqrt{13} + 2\sqrt{13}) \geq 14 + 2\sqrt{13} \geq 2(7 + \sqrt{13})$$

$$-2(7 + \sqrt{13}) / (1 + \sqrt{13}) \geq (7 + 4\sqrt{13} + \sqrt{13} + 13) \geq$$

$$= -2 / (20 + 8\sqrt{13}) \geq -8(5 + 2\sqrt{13})$$

$$-(5 + 2\sqrt{13}) + \frac{1 + \sqrt{13}}{2} + 10 \geq -2\sqrt{13} + \frac{\sqrt{13}}{2} + 5,5 =$$

$$\geq -\frac{3}{2}\sqrt{13} + \frac{11}{2} \geq \frac{1}{2}(11 - 3\sqrt{13}) = \frac{1}{2}(\sqrt{121} - \sqrt{117})$$

$70 \Rightarrow x = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$ - подходит

$(\sqrt{13} - 1)^3 + \frac{1 - \sqrt{13}}{2} + 10 > 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{13} - 1}{2}$ - подходит

Отв: $x = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}, \frac{\sqrt{13} - 1}{2}, 2$

~~$5 \cdot \sqrt{16} \geq 20$~~

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 9 \\ \hline 117 \\ - 824 \\ \hline 29,25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 37 \\ \times 15 \\ \hline 185 \\ + 370 \\ \hline 555 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5,5 \\ \times 5,5 \\ \hline 275 \\ 550 \\ \hline 3025 \end{array}$$

n4

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2 | x-1 | + 1 \geq 0$$

$$8x^3 + 2x - 2 = 6x \geq 0$$

$$8x^3 - 4x - 2 = 0; x \geq 0$$

$$8x^3 + 8x - 2 = 0; x < 0$$

n5

$$1400 = 2 \cdot 700 = 2 \cdot 2 \cdot 350 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 175 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$$

$$1) 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1$$

$$2) 4 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

$$1) A = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8} = 8! - 8 \cdot 7 - 8 \cdot 7 - 8 \cdot 7 \cdot 6$$

$$\overline{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}$$

$$\overline{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$2) B = \overline{b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7 b_8} = 8! - 8 \cdot 7 - 8 \cdot 7 \cdot 6$$

$$N = 2 \cdot 8! - 3 \cdot 8 \cdot 7 - 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 =$$

$$= 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 - 8 \cdot 7 \cdot 3 - 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 =$$

$$= 8 \cdot 7 \cdot (6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 - 3 - 10) =$$

$$= 56 \cdot (30 \cdot 16 \cdot 3 - 13) = 56 \cdot (90 \cdot 16 - 13) =$$

$$= 56 \cdot (144 - 13) = 56 \cdot 131 = 7336$$

$$\begin{array}{r} 96 \\ \times 16 \\ \hline 9 \\ \hline 144 \end{array}$$

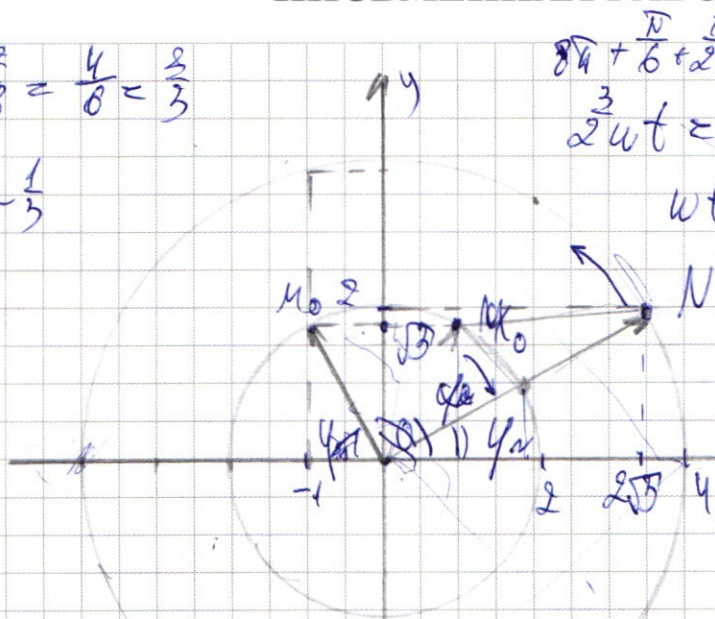
$$\begin{array}{r} 131 \\ \times 56 \\ \hline 786 \\ + 6550 \\ \hline 7336 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times 131 \\ \hline 504 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{180}{180} = \frac{12}{18} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{6}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$$



$$\frac{\pi}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\omega t = \frac{2}{3}\pi - \omega t$$

$$\frac{3}{2}\omega t = \frac{15}{2}\pi$$

$$\omega t = \frac{15}{3}\pi$$

$$R_{N0} = 4 \cdot 3 + 4 = 16 \Rightarrow$$

$$R_{N0} = 4$$

$$R_{M0} = 1 + 3 = 4 \Rightarrow$$

$$R_{M0} = 2$$

$$R_m^2 + R_n^2 - 2R_m \cdot R_n \cdot \cos \alpha \geq (R_n - R_m)^2$$

$$20 - 16 \cos \alpha \geq 4 - \cos \alpha$$

$$W_n = \frac{v}{R_n}, W_m = \frac{v}{R_m} \Rightarrow \frac{W_m}{W_n} = \frac{R_n}{R_m} = \frac{1}{2} \Rightarrow 36 - \max$$

$$\tan \varphi_{M0} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi_{M0} = 120^\circ = \frac{2}{3}\pi$$

$$\tan \varphi_{N0} = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi_{N0} = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

$$\varphi_n(t) = \varphi_{N0} + \omega t$$

$$\varphi_m(t) = \varphi_{M0} + \omega t$$

$$\varphi_n' = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\omega t$$

$$\varphi_m = \frac{2}{3}\pi + \omega t$$

$$\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\omega t = \frac{2}{3}\pi + \omega t \Rightarrow \frac{1}{2}\omega t = \frac{1}{3}\pi$$

$$\frac{3}{2}\omega t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega t = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \varphi_n = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi_m = \frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\omega t = \frac{2}{3}\pi - \omega t \Rightarrow \frac{3}{2}\omega t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega t = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{2}{3}\pi - \omega t = \frac{\pi}{6} + 2\omega t \Rightarrow \frac{1}{2}\pi = \frac{3}{2}\omega t \Rightarrow \omega t = \frac{\pi}{3}$$

$$y_m = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{6} - \frac{4}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\sin y_m = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y_m = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = 2\sqrt{3}$$

$$\cos y_m = \frac{1}{2} \Rightarrow x_m = 2$$

$$\frac{1}{6} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6} - \frac{4}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$2 - \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$2\pi + \frac{\pi}{6} + 2\omega t = \frac{2}{3}\pi - \omega t$$

$$\frac{4}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{6}{3} - \frac{5}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{2}\omega t = -\frac{2}{3}\pi \Rightarrow \omega t = -\frac{\pi}{3}$$

$$y_m = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{3}; y_m = \frac{2}{3}\pi - \pi = -\frac{\pi}{3}$$

$$\sin y_m = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y_m = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = -2\sqrt{3}$$

$$\cos y_m = \frac{1}{2} \Rightarrow x_m = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

$$\pi + \frac{\pi}{6} + 2\omega t = \frac{2}{3}\pi - \omega t \Rightarrow \frac{3}{2}\omega t = -\frac{1}{3}\pi \Rightarrow$$

$$\omega t = -\frac{2}{3}\pi \Rightarrow y_m = \frac{2}{3}\pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi$$

$$y_m = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{3}\pi = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow y_m; x_m = 0; -4$$

$$6\pi + \frac{\pi}{6} + 2\omega t = \frac{2}{3}\pi - \omega t \Rightarrow \frac{3}{2}\omega t = -\frac{11}{6}\pi \Rightarrow$$

$$\omega t = -\frac{11}{3}\pi \Rightarrow y_m = \frac{\pi}{6} - \frac{11}{6}\pi = -\frac{10}{6}\pi = -\frac{5}{3}\pi =$$

$$= -\frac{1}{3}\pi$$

$$\frac{\pi}{6} + 2\omega t = 2\pi + \frac{2}{3}\pi - \omega t \Rightarrow \frac{3}{2}\omega t = \frac{1}{3}\pi \Rightarrow \omega t = \frac{2}{3}\pi$$

$$y_m = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3}\pi = \frac{5}{6}\pi \Rightarrow \frac{3}{2}\omega t = \frac{5}{6}\pi \Rightarrow \omega t = \frac{5}{3}\pi$$

$$y_m = \frac{\pi}{6} + \frac{5}{6}\pi = \pi = \pi$$

Ответ: $(2; 2\sqrt{3})$, $(2; -2\sqrt{3})$, $(0; -4)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a \\ 4bx + (a+b)y = 1 \end{cases} \quad \text{— для любых } x, y$$

$$\cancel{3ax + 3bx} + 12y - a = \cancel{4bx + (a+b)y} - 1$$

$$\cancel{3ax + 12y} = a$$

$$12y = a$$

$$y = \frac{a - \cancel{3(a+b)x}}{12} = -\frac{a+b}{4}x + \frac{a}{12}$$

$$y = \frac{1 - 4bx}{(a+b)y} = -\frac{4}{a+b}x + \frac{1}{(a+b)y}$$

$$\begin{cases} -\frac{4}{a+b} = -\frac{a+b}{4} \Rightarrow 16 = (a+b)^2 \Rightarrow a+b = \pm 4 \\ \frac{a}{12} = \frac{1}{(a+b)y} \Rightarrow 12 = ab(a+b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=4 \\ 12=ab=3 \Rightarrow b=\frac{3}{a} \end{cases} \Rightarrow a + \frac{3}{a} - 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{a^2 - 4a + 3}{a} = 0$$

$$\begin{cases} a+b=-4 \\ ab=-3 \Rightarrow b=-\frac{3}{a} \end{cases} \Rightarrow a - \frac{3}{a} + 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{a^2 + 4a - 3}{a} = 0$$

$$a^2 - 4a + 3 \geq 0; D_1 = 16 - 3 \cdot 4 = 4 = 2^2$$

$$a^2 + 4a - 3 \geq 0; D_2 = 16 + 3 \cdot 4 = 28 = 7 \cdot 2^2$$

$$1) a = \frac{+4 \pm 2}{2} = +2 \pm 1 = +3; +1 \Rightarrow b = +1; +3$$

$$2) a = \frac{-4 \pm 2\sqrt{7}}{2} = -2 \pm \sqrt{7} = -2 - \sqrt{7}; -2 + \sqrt{7} \Rightarrow b = -\frac{3}{-2 - \sqrt{7}}; -\frac{3}{-2 + \sqrt{7}}$$

$$b = \frac{3}{\sqrt{7} + 2}; \frac{3}{\sqrt{7} - 2 - \sqrt{7}}$$

Область: $(3; 1)$, $(1; 3)$; $(-2-\sqrt{7}; \frac{3}{\sqrt{7}+2})$, $(\sqrt{7}-2; \frac{3}{2-\sqrt{7}})$

~ 4
 $(x+3) \sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$

~~$x^3-x+10 : x+3$~~ $x^2+5x+6 \geq 0$, $D = 25-24 = 1$
 $x = \frac{-5 \pm 1}{2} = \frac{-6}{2}, \frac{-4}{2} = -3, -2$

$(x+3) \sqrt{x^3-x+10} = (x+3)(x+2)$

$(x+3) (\sqrt{x^3-x+10} - x - 2) = 0$

$8-4-10+6 =$
 $= 4-10+6 =$
 $= 10-10 = 0$

$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ \sqrt{x^3-x+10} - x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ \sqrt{x^3-x+10} \geq x+2 \end{cases}$

$x^3-x+10 \geq x^2+4x+4 \Leftrightarrow x^3-x^2-5x+6 \geq 0$

$x^3-x^2-5x+6 : x-2$

$\frac{x^3-x^2-5x+6}{x-2} = \frac{x^3-2x^2}{x^2+x-3}$

$\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x}$
 $\frac{-3x+6}{-3x+6}$
 0

$\Rightarrow x^3-x^2-5x+6 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^2+x-3) = 0$

$\begin{cases} x-2 = 0 \\ x^2+x-3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x^2+x-3 = 0 \end{cases}$

$D = 1+12 = 13$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2} = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}; \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$

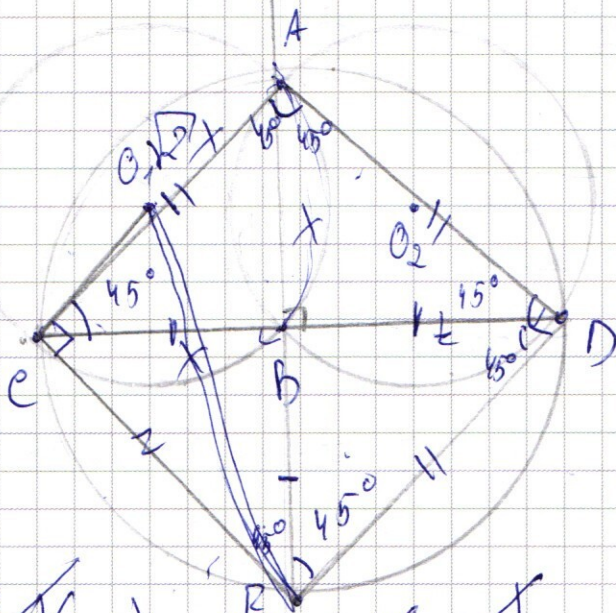
$x^3-x+10 \geq 0$, при $x = -3$: $-27+3+10 = -14 \Rightarrow x \neq -3$

при $x = 2$: $8-2+10 = 16 \Rightarrow x = 2$ - подходит

при $x = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$: $\frac{(-1-\sqrt{13})^3}{8} + \frac{-1-\sqrt{13}}{2} + 10$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^2 + 16^2 - 2x \cdot 16 \cdot \cos \alpha = y^2 + 16^2 + 2y \cdot 16 \cdot \cos \alpha$$



→ $ABCD$ - квадрат

→ $CR \perp A$

AB - высота, мед, бис-са

а AB - вписан в окр-ть ⇒

$$\Rightarrow \frac{1}{2} AC = R = 9 \Rightarrow \frac{x}{2} = 9 \Rightarrow$$

⇒ $x = 18$, тогда

$$\sqrt{2}x = 4.9 = 36 \Rightarrow CR = 36$$

$$\begin{aligned} (x+y)/(x-y) &= 2AB \cos \alpha (y \neq x) \\ x-y &= 2 \cdot 16 \cos \alpha \\ x^2 + y^2 + 2 \cdot 16^2 &= (2CD)^2 \end{aligned}$$

и 2

$$|x-3-y| + |x-3+y| \leq 6$$

$$(|x-3| + |y-4|)^2 = 25 \text{ — координатность с}$$

центрами $(3, 4)$ и радиус 5

$$1) x \geq 3+y, x \geq 3-y$$

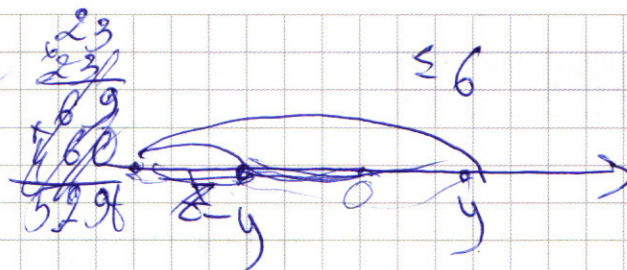
$$x-3-y+x-3+y \leq 6 \Leftrightarrow 2x-6 \leq 6 \Leftrightarrow x \leq 6$$

$$6 \geq 3+y, 6 \geq 3-y \Rightarrow y \leq 3, y \geq -3 \Rightarrow y \in [-3; 3]$$

$$x \geq 6 \quad x \leq 6 \quad \text{— как найти}$$

$$x \geq y+3, x \leq 3-y$$

$$x - y - 3 \geq 0, x - 3 + y \leq 0$$



$$|t-y| + |t+y| \leq 6$$

$$t \geq y, t \geq -y$$

$$t-y + t+y \leq 6 \Rightarrow t \leq 3$$

$$x+2z+2y \leq 6$$

$$t+y \leq 6$$

$$z+y \leq 3$$

$$t+2y \leq 3$$

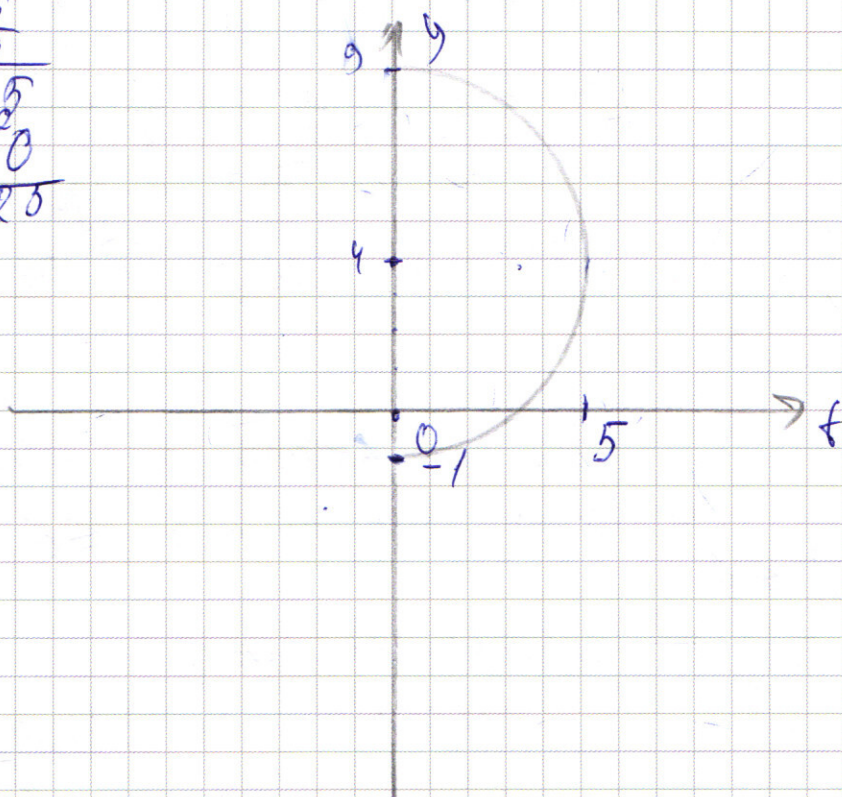
$$t \geq 2+4,2$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ +24 \\ \hline 96 \\ +580 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$|t-y| + |t+y| \leq 6$$

$$t^2 + (|y|-4)^2 = 25 - \text{pag. 5, центр } 0,4$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ +25 \\ \hline 125 \\ +500 \\ \hline 625 \end{array}$$



$$t \geq -y - 6 \text{ or } y \geq 0$$

$$t+y$$

$$t=y$$

$$t^2 + t^2 - 8t + 16 = 25$$

$$2t^2 - 8t - 9 = 0$$

$$D = 64 + 8 \cdot 9 =$$

$$64 + 72 = 136 =$$

$$= 2 \cdot 68 = 2 \cdot 2 \cdot 17 =$$

$$2 \cdot 4 \cdot 17 = 4 \cdot 17$$

$$t = \frac{8 \pm 2\sqrt{34}}{4} = 2 \pm \frac{\sqrt{34}}{2}$$

$$t = 2 + \sqrt{\frac{17}{2}} = 4$$

$$t \leq 2 + \sqrt{\frac{17}{2}}$$

$$2t \leq 6 \Rightarrow t \leq 3 \Rightarrow t \in [0; 3]; y \in [-1; 8]$$

$$t \geq 2 + \sqrt{\frac{17}{2}}; 2y \leq 6 \Rightarrow y \in [-1; 3]; t \in [0; 2.6]$$

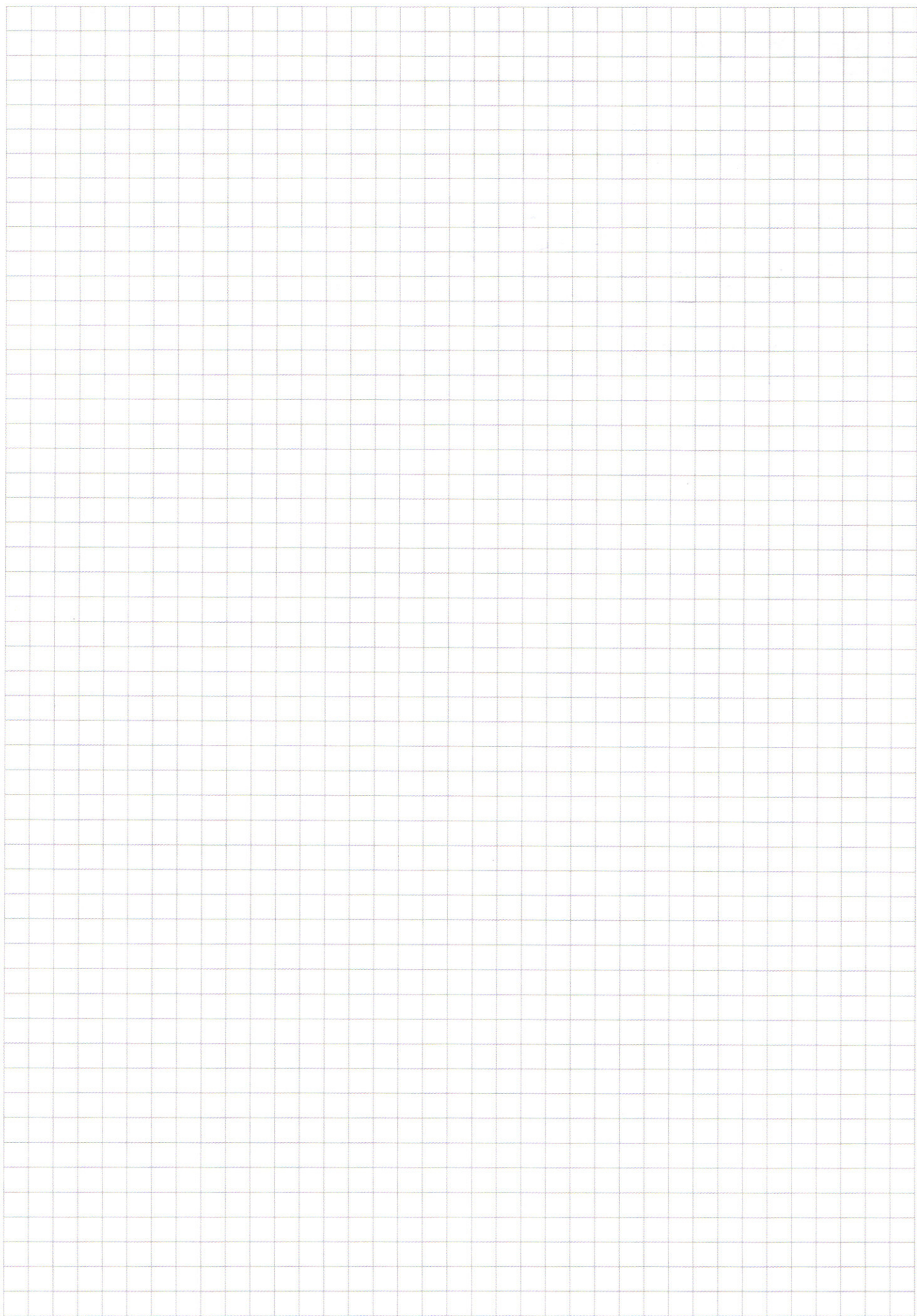
$$t \in [0; 2.6]$$

$$2 + \sqrt{\frac{17}{2}}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} & \text{а) } x-3 \in (0; 3] \cup [2+\sqrt{2}; 2\sqrt{2}-1) \\ & \text{б) } x \in [3; 6] \cup [5+\sqrt{2}; 2\sqrt{2}+3] \\ & y \in [-1; 8] \end{aligned}$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)