

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Муравей движется по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0(-1; \sqrt{3})$ и $N_0(2\sqrt{3}; 2)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a, \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6, \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

R_1 - радиус 1 окружности

$$R_1 = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = 2$$

R_2 - радиус второй окружности

$$R_2 = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$$

$$\frac{R_2}{R_1} = 2, \text{ значит когда муха сделает 1}$$

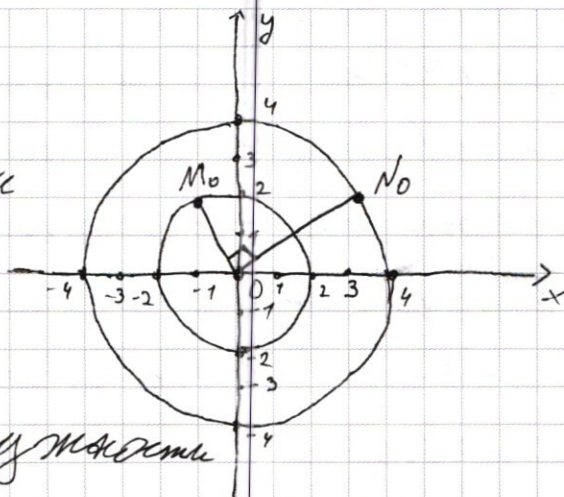
круг муравей сделает 2 круга и
итог будет такой же как и в
начале.

ω_1 и ω_2 - угловые скорости муравья и
муха.

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{v_1 R_2}{v_2 R_1} = 2$$

углы между осью x и мухой изначально
 30° , а угол между осью x и муравьем 120°
→ тогда между мухой и муравьем 90° .

Значит когда угол между мухой и
осью составит 60° угол между муравьем
и осью будет 60° .



если жук проползёт ещё 120° , то муравей проползёт 240° и оси снова встретятся точка встречи 180° .

ещё через 120° проползёт третья встреча, угол равен 300° , а затем оси вернутся на исходные позиции. (встреча — наименьшее расстояние)
и зная угол и радиус окружности найдём координаты жука в момент встречи.

$$A_1 (2; 2\sqrt{3}); A_2 (-4; 0); A_3 (2; -2\sqrt{3}).$$

$$\text{Ответ: } \{(2; 2\sqrt{3}); (-4; 0); (2; -2\sqrt{3})\}.$$

N2

$$12y = a - 3(a+b)x$$

$$y = \frac{a - 3(a+b)x}{12} \Rightarrow \text{одному } x \text{ сопоставлено одно } y.$$

Подставим во вторую часть

$$4bx + \frac{ab(a+b) - (a+b)^2 b x}{12} = 1$$

если линейное уравнение имеет бесконечно много решений, то коэффициент перед x равен 0.

$$\begin{cases} 4b - \frac{3(a+b)^2 b}{12} = 0 \\ \frac{ab(a+b)}{12} = 1 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1^{\circ} b = 0$$

тогда $\frac{ab(a+b)}{12} = 0 \neq 1$

нет решений

$$2^{\circ} b \neq 0$$

$$\begin{cases} 4 - \frac{3(a+b)^2}{12} = 0 \\ \frac{ab(a+b)}{12} = 1 \end{cases}$$

$$3(a+b)^2 = 48$$

$$a+b = \sqrt{\frac{48}{3}} = \sqrt{16} = 4$$

$$\frac{ab \cdot 4}{12} = 1$$

$$ab = 3$$

$$\begin{cases} a+b=4 \\ ab=3 \end{cases}$$

$$ab=3$$

$$a = 4 - b$$

$$b(4-b) = 3$$

$$-b^2 + 4b - 3 = 0$$

$$b=1 \quad a=3$$

$$b=3 \quad a=1$$

Ответ: $\{(1; 3); (3; 1)\}$.

$\sqrt{3}$

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6 = (x+2)(x+3)$$

сократим на $x+3$ обе части (если $x \neq -3$)
получим $\sqrt{x^3-x+10} = x+2$

$$\sqrt{x^3 - x + 10} = x + 2$$

$$x^3 - x + 10 = x^2 + 4x + 4$$

$$x^3 - x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x-2)(x^2+x-3)=0$$

$x = 2$ подходит

решим уравнение $x^2 + x - 3 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+12}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Подставим значения

$$\sqrt{\left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right)^3 - \frac{-1-\sqrt{13}}{2} + 10} \stackrel{?}{=} \frac{3-\sqrt{13}}{2} < 0$$

не подходит.

$$\sqrt{\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)^3 - \frac{-1+\sqrt{13}}{2} + 10} \stackrel{?}{=} \frac{3+\sqrt{13}}{2}$$

$$\sqrt{\frac{13\sqrt{13}-39+13\sqrt{13}-1}{8} + \frac{2-2\sqrt{13}}{4} + \frac{40}{4}} = \sqrt{\frac{8\sqrt{13}-20}{4} + \frac{42-2\sqrt{13}}{4}} =$$

$$= \frac{\sqrt{22+8\sqrt{13}}}{2} = \frac{|3+\sqrt{13}|}{2} \text{ подходит}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ 2; \frac{\sqrt{13}-1}{2} \right\}.$$

№5

$$1400 = 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1^k$$

т.е. еще в числе 3 цифры 2.

$$8 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 3} = 8 \cdot 21 \cdot 10 = 1680$$

↑
количество

способов поставить 7

↑
количество

способов поставить
2 пятёрки

↑
количество

способов поставить
3 двойки.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2° в числе есть цифра 4:

$$8 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 3360$$

↑ ↑ ↑ ↑

количество способов поставить 7 количество способов поставить 6 количество способов поставить 5 количество способов поставить 4

3° в числе есть цифра 8:

$$8 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot 5 = 4 \cdot 21 \cdot 10 = 840$$

↑ ↑ ↑

количество способов поставить 7 количество способов поставить 6 количество способов поставить 5

$$1680 + 840 + 3360 = 1680 + 4200 = 5880$$

Ответ: 5880

N4

1° $x > 1$

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 2x^2 > 0$$

$$2x^2 - 2x + 1 > 0$$

$$D = 9 - 16 = -7 < 0$$

$$D = 4 - 8 = -4 < 0$$

верно всегда

2° $x < 1$

$$2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$(x+1)(2x^3 + x^2 - 3x + 1) \geq 0$$

подставим $a = \sqrt{b}$

$$2(a^3 - 3a^2\sqrt{b} + 3ab - b\sqrt{b}) + (a^2 - 2a\sqrt{b} + b) - 3(a - \sqrt{b}) + 1 = 0$$

$$3\sqrt{b} = 6a^2 + 2a + 2b$$

$$2a^3 + 3ab + a^2 + b - 3a + 1 = 0$$

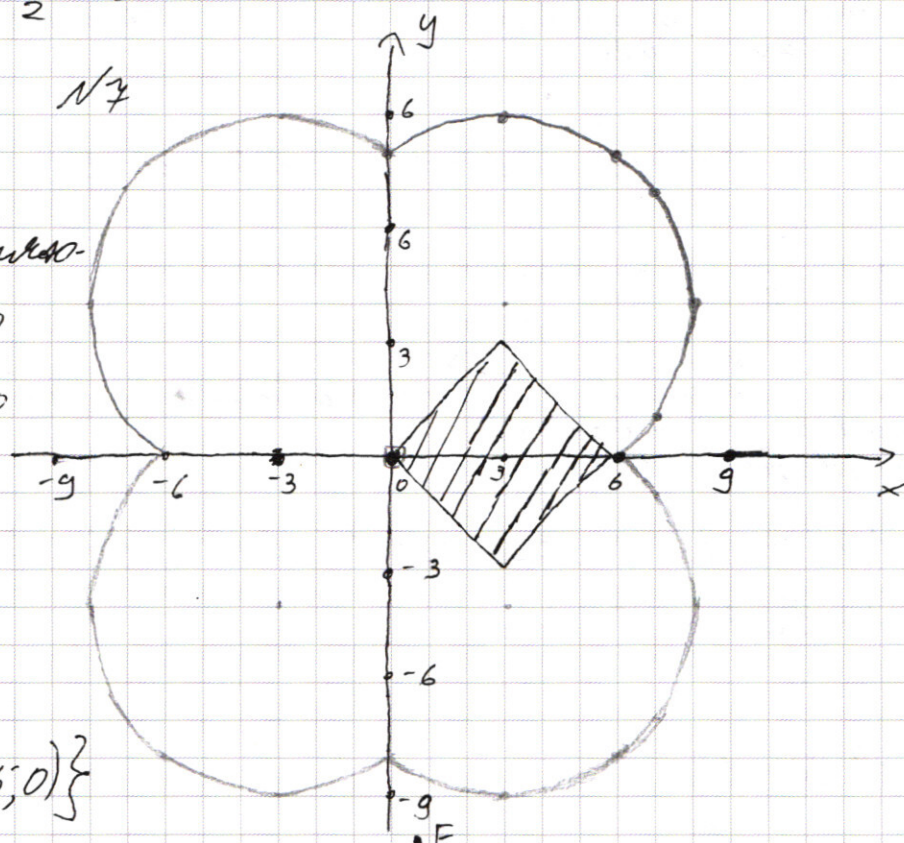
$$2a^3 + 3a\left(\frac{3}{2} - 3a^2 - a\right) + a^2 + \frac{3}{2} - 3a^2 - a - 3a + 1 = 0$$

$$-7a^3 - 5a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{5}{2} = 0$$

N_4
 $\frac{1}{2}$ - множество
 точек удовлетворяю-
 щих 1 условию

1 - множество
 точек удовле-
 творяющих
 2 условиям.

Ответ: $\{(0;0); (6;0)\}$



$$CF = \sqrt{CB^2 + BF^2}$$

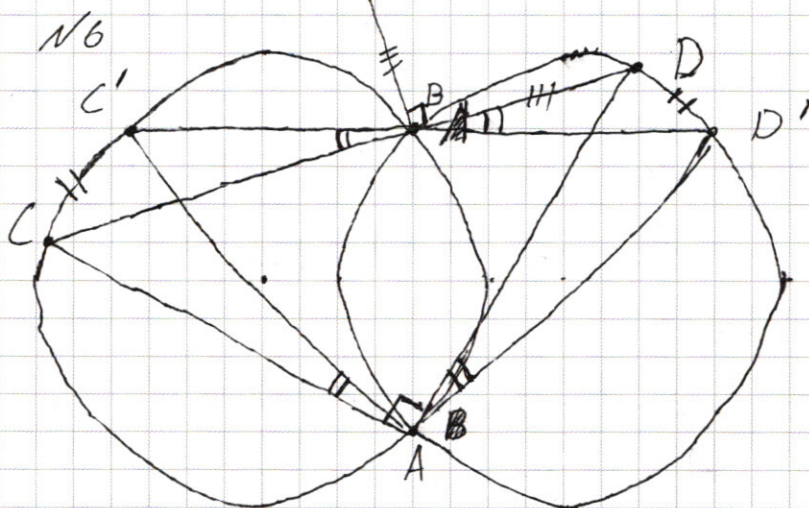
$$= \sqrt{CB^2 + BD^2}$$

$$= \sqrt{CB^2 + BD^2}$$

C' и D' таковы что

$$C'B = BD'$$

$$B \in C'D'$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\angle C'AD' = \angle CAD - \angle CAC' + \angle DAD' = 90^\circ$$

на равные
дуги

$$\angle C'BA = 90^\circ; \angle C'AB = 45^\circ.$$

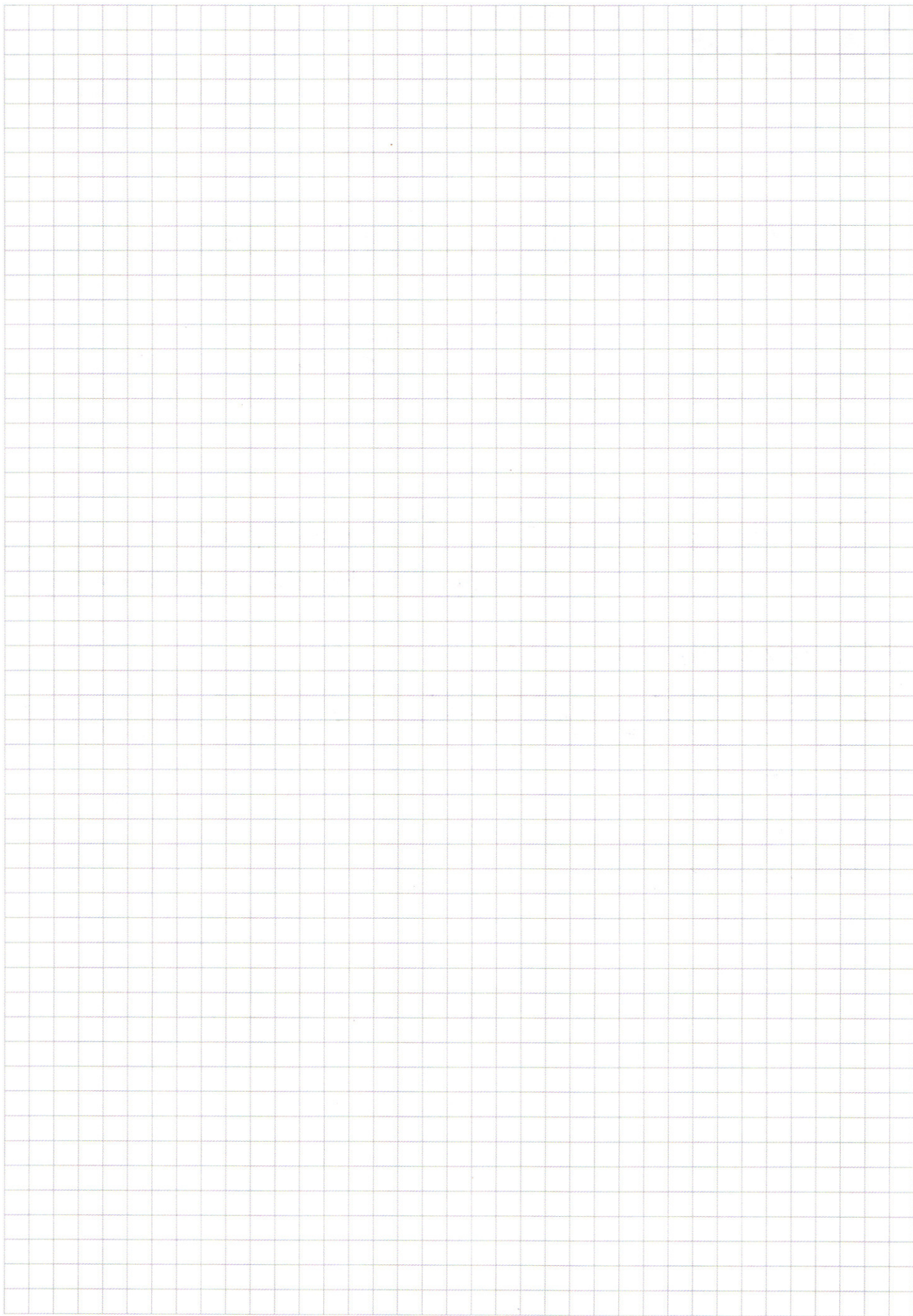
⇓

$$C'B = BA = \frac{1}{\sqrt{2}} AC' = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2R = 1 \text{ так как } C'A \\ = \sqrt{2} \cdot 9 \text{ диаметр.}$$

Аналогично $BD' = 9\sqrt{2}$

$$CF = \sqrt{CB^2 + BF^2} = \sqrt{CB^2 + BD'^2} = \sqrt{C'B^2 + BD'^2} = \sqrt{162 + 162} = \\ = \sqrt{324} = 18$$

Ответ: 18.



☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



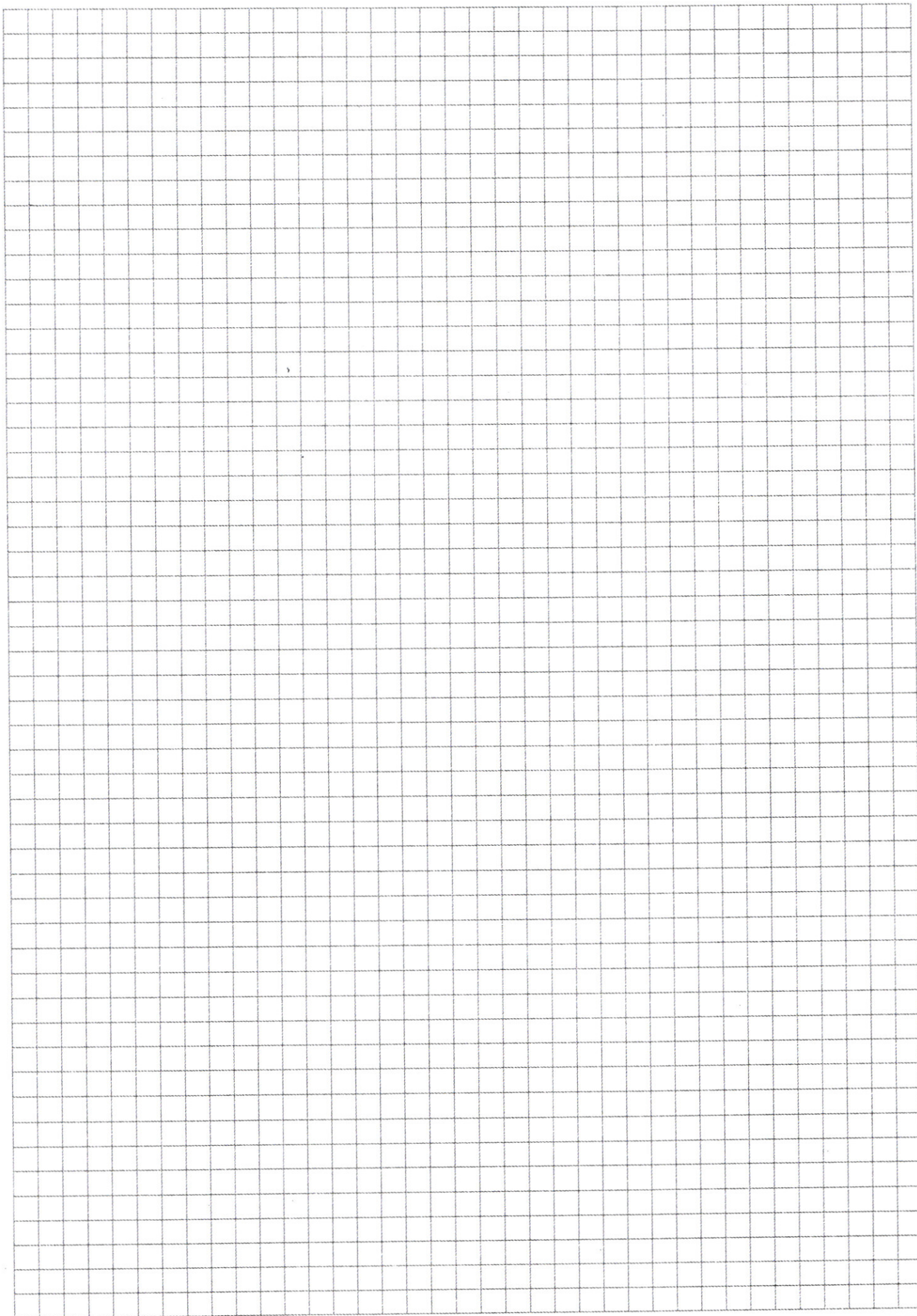
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



Согласие на обработку персональных данных

Я, **Павлов Михаил Дмитриевич**, паспорт **40 18 122483**, выдан **ГУ МВД России по СПб и ЛО 7 сентября 2018 г.**, зарегистрирован по адресу **г Санкт-Петербург, пр-кт Луначарского, д 23**,

даю свое согласие Образовательному Фонду «Талант и успех», зарегистрированному по адресу: Российская Федерация, 354349, Краснодарский край, г. Сочи, Олимпийский проспект, д. 40, являющемуся оператором по формированию и ведению государственного информационного ресурса о детях, проявивших выдающиеся способности (далее - оператор), на обработку следующих персональных данных:

- фамилия, имя, отчество (при наличии);
- дата рождения;
- реквизиты документа, удостоверяющего личность;
- наименование организаций, осуществляющих образовательную деятельность, в которых обучаюсь;
- класс / курс;
- сведения о получении образования вне организаций, осуществляющих образовательную деятельность (в форме семейного образования или самообразования);
- наименования образовательных программ, по которым обучаюсь;
- сведения об обучении по индивидуальному учебному плану в организации, осуществляющей образовательную деятельность;
- сведения об индивидуальных достижениях по итогам участия в олимпиадах и иных интеллектуальных и (или) творческих конкурсах, мероприятиях, направленных на развитие интеллектуальных и творческих способностей, способностей к занятиям физической культурой и спортом, интереса к научной (научно-исследовательской), творческой, физкультурноспортивной деятельности, а также на пропаганду научных знаний, творческих и спортивных достижений, подтвержденных соответствующими документами, выданными организаторами указанных мероприятий;
- страховой номер индивидуального лицевого счета страхового свидетельства обязательного пенсионного страхования;
- мои контактные данные (телефон, адрес электронной почты).

Я даю свое согласие на использование персональных данных исключительно в целях размещения их в государственном информационном ресурсе о детях, проявивших выдающиеся способности, сопровождения и мониторинга моего дальнейшего развития.

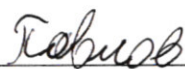
Настоящее согласие предоставляется мной на осуществление действий, включающих: сбор, систематизацию, накопление, хранение, уточнение (обновление, изменение), использование, обезличивание, блокирование, уничтожение персональных данных, а также на передачу такой информации третьим лицам, в случаях, установленных законодательными и нормативными правовыми документами.

Персональные данные, предоставлены мной сознательно и добровольно, соответствуют действительности и корректны.

Подтверждаю, что мной дано согласие на рассылку рекламного, информационного характера от оператора и уполномоченных оператором лиц на указанный электронный адрес.

Я проинформирован, что оператор гарантирует обработку персональных данных в соответствии с действующим законодательством РФ.

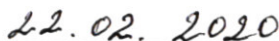
Настоящее согласие действует бессрочно, но может быть отозвано в любой момент по соглашению сторон или в случае нарушения оператором требований законодательства о персональных данных.



(Подпись)



(Расшифровка подписи)



(Дата)

**Согласие законного представителя (родителя)
на обработку персональных данных несовершеннолетнего**

Я, Павлова Марина Николаевна
(ФИО родителя или законного представителя)
паспорт 4018 287440 выдан 14.03.19 г. ГУ МВД России по
СПб а 10
(серия, номер) (когда и кем выдан)

(в случае опекунов указать реквизиты документа, на основании которого осуществляется опека или попечительство)

зарегистрированный по адресу: СПб Ленинский пр-т,
д. 96, корп. 1, кв. 282

даю свое согласие Образовательному Фонду «Талант и успех», зарегистрированному по адресу: Российская Федерация, 354349, Краснодарский край, г. Сочи, Олимпийский проспект, д. 40, являющемуся оператором по формированию и ведению государственного информационного ресурса о детях, проявивших выдающиеся способности (далее - оператор), на обработку следующих персональных данных:

- фамилия, имя, отчество (при наличии) ребенка;
- дата рождения ребенка;
- реквизиты документа, удостоверяющего личность ребенка;
- наименование организаций, осуществляющих образовательную деятельность, в которых обучается ребенок;
- класс / курс;
- наименования образовательных программ, по которым обучается ребенок;
- сведения об обучении по индивидуальному учебному плану в организации, осуществляющей образовательную деятельность;
- сведения об индивидуальных достижениях ребенка по итогам участия в олимпиадах и иных интеллектуальных и (или) творческих конкурсах, мероприятиях, направленных на развитие интеллектуальных и творческих способностей, способностей к занятиям физической культурой и спортом, интереса к научной (научно-исследовательской), творческой, физкультурно-спортивной деятельности, а также на пропаганду научных знаний, творческих и спортивных достижений, подтвержденных соответствующими документами, выданными организаторами указанных мероприятий;
- страховой номер индивидуального лицевого счета страхового свидетельства обязательного пенсионного страхования ребенка;
- контактные данные ребенка (телефон, адрес электронной почты);
- мои контактные данные (телефон, адрес электронной почты).

Я даю свое согласие на использование персональных данных несовершеннолетнего исключительно в целях размещения их в государственном информационном ресурсе о детях, проявивших выдающиеся способности, сопровождения и мониторинга его дальнейшего развития.

Настоящее согласие предоставляется мной на осуществление действий, включающих: сбор, систематизацию, накопление, хранение, уточнение (обновление, изменение), использование, обезличивание, блокирование, уничтожение персональных данных, а также на передачу такой информации третьим лицам, в случаях, установленных законодательными и нормативными правовыми документами.

Персональные данные, предоставлены мной сознательно и добровольно, соответствуют действительности и корректны.

Подтверждаю, что мной дано согласие на рассылку рекламного, информационного характера от оператора и уполномоченных оператором лиц на указанный электронный адрес.

Я проинформирован(а), что оператор гарантирует обработку персональных данных в соответствии с действующим законодательством РФ.

Настоящее согласие действует бессрочно, но может быть отозвано в любой момент по соглашению сторон или в случае нарушения оператором требований законодательства о персональных данных.

Лас
(Подпись)

Павлова М. Н.
(Расшифровка подписи)

22.02.2020 г.
(Дата)

