

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

4. [4 балла] Вокруг птичьей кормушки в одной плоскости с ней по двум окружностям с одинаковой скоростью летают синица и снегирь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой кормушка (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Синица движется по часовой стрелке, а снегирь – против. В начальный момент времени синица и снегирь находятся в точках $M_0(\sqrt{3}; 3)$ и $N_0(6; -2\sqrt{3})$ соответственно. Определите координаты всех положений снегиря, в которых расстояние между птицами будет кратчайшим.

5. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a, \\ 3bx + (a-b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

6. [4 балла] Решите уравнение $\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$.

7. [6 баллов] Решите неравенство $6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2|x+1| + 1 \geq 0$.

8. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 7000. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

9. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 7 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

10. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10, \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169. \end{cases}$$

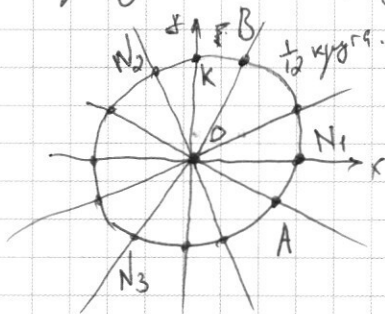
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

21

$$\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 9} = \sqrt{12} \text{ — радиус окружности сикнул.}$$

$$\sqrt{6^2 + 12} = \sqrt{48} = \sqrt{12} \cdot 2 \text{ — радиус окружности сикнуло.}$$

1) Из этого следует, что сикнуло сикнуло относительно
перпендикуляра в 2 раза больше, чем у сикнуло. ($P_M = 2 \cdot p_i \cdot \sqrt{12}$; $P_S = 2 \cdot p_i \cdot 2 \cdot \sqrt{12}$).



2) Разделим круг на 12 равных частей,
как на картинке. Тогда точка A —
— угловая точка сикнуло сикнуло —
сикнуло перпендикуляра, а точка B — угловая
точка сикнуло сикнуло. Это следует из:

$$(\sqrt{6 - \sqrt{3}})^2 + (3 + 2\sqrt{3})^2 = \sqrt{60},$$

$$\sqrt{12}^2 + \sqrt{48}^2 = \sqrt{60}^2 \text{ — треугольник AOB —}$$

— прямоугольный, а угол $\angle KOB = 30^\circ$.

Из 1) и 2) следует,
что они «встречаются»
в точках N_1, N_2, N_3 .
(это всё относительно
перпендикуляра!!!).

А тогда ~~координаты~~ координаты сикнуло:

I	$(\sqrt{48}; 0)$
II	$(-2\sqrt{3}; -6)$
III	$(-2\sqrt{3}; 6)$

Ответ:

, всего 3 ~~координаты~~ точки плоскости.

а) 2

1) $b=0 \rightarrow$ невозможно, так как из 2) $0 \neq 1$.

2) $b=9 \rightarrow$ возможно, так как $\begin{cases} 6y=9 \\ 3bx=1 \end{cases} \rightarrow$ только 1 решение.

3) $b \neq 0; b \neq 9$:

$$y = \frac{a-2(a-b) \cdot x}{6} = -\frac{1}{3}(a-b) \cdot x + \frac{a}{6} \quad \text{--- из I}$$

$$y = \frac{1-3bx}{(a-b) \cdot b} = -\frac{3}{(a-b)} \cdot x + \frac{1}{(a-b) \cdot b} \quad \text{--- из II}$$

Удобно упростить совпадающие пункты:

$$1) \begin{cases} \frac{1}{3}(a-b) = \frac{3}{(a-b)} \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{a}{6} = \frac{1}{(a-b) \cdot b} \end{cases}$$

$$\text{из 1) } \rightarrow \begin{cases} a = b+3 \\ a = b-3 \end{cases}$$

$$\text{из 2) } \rightarrow 6 = (a-b) \cdot a \cdot b$$

--- Случай 1: $a = b+3$

$$6 = 3 \cdot (b+3) \cdot b \rightarrow b^2 + 3b - 2 = 0 \rightarrow D = 9 + 8 = 17$$

$$b = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2} \rightarrow b = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}; a = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}$$

$$\rightarrow b = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}; a = \frac{9 + \sqrt{17}}{2}$$

--- Случай 2: $a = b-3$

$$6 = -3 \cdot (b-3) \cdot b \rightarrow b^2 - 3b + 2 = 0 \rightarrow D = 9 - 8 = 1$$

$$b = \frac{3 \pm 1}{2} \rightarrow b = 2; a = -1$$

$$\rightarrow b = 1; a = -2$$

$$\text{Order: } \left\{ \left(\frac{3 + \sqrt{17}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \right); \left(\frac{9 + \sqrt{17}}{2}, \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \right); (-1, 2); (-2, 1) \right\}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3.

Каждую часть возведем в квадрат и раскроем скобки.
получим:

$$x^5 + 6x^4 - 15x^3 - 91x^2 + 90x + 225 =$$

$$= (x-3) \cdot (x+5) \cdot (x+5) \cdot (x^2 - x - 3) = 0$$

$$\begin{cases} x=3 & \text{не подходит } (x^3 - 16x + 25 > 0) \\ x=-5 & \text{не подходит} \\ x^2 - x - 3 = 0 & \rightarrow D = 1 + 12 = 13 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

Ответ: $\frac{1 + \sqrt{13}}{2}$

№ 5

$$7000 = 7 \cdot 5^3 \cdot 2^3$$

Нужно у нас в число вст.

1) Если 2^3 представлено как 3 цифры.

У нас число состоит из цифр: 7, 5, 5, 5, 2, 2, 2, 1.

Тогда: таких чисел:

$$\frac{8!}{3! \cdot 3!}$$

2) Если 2^3 представлено как 2 цифры.

У нас число состоит из цифр: 7, 5, 5, 5, 2, 4, 1, 1.

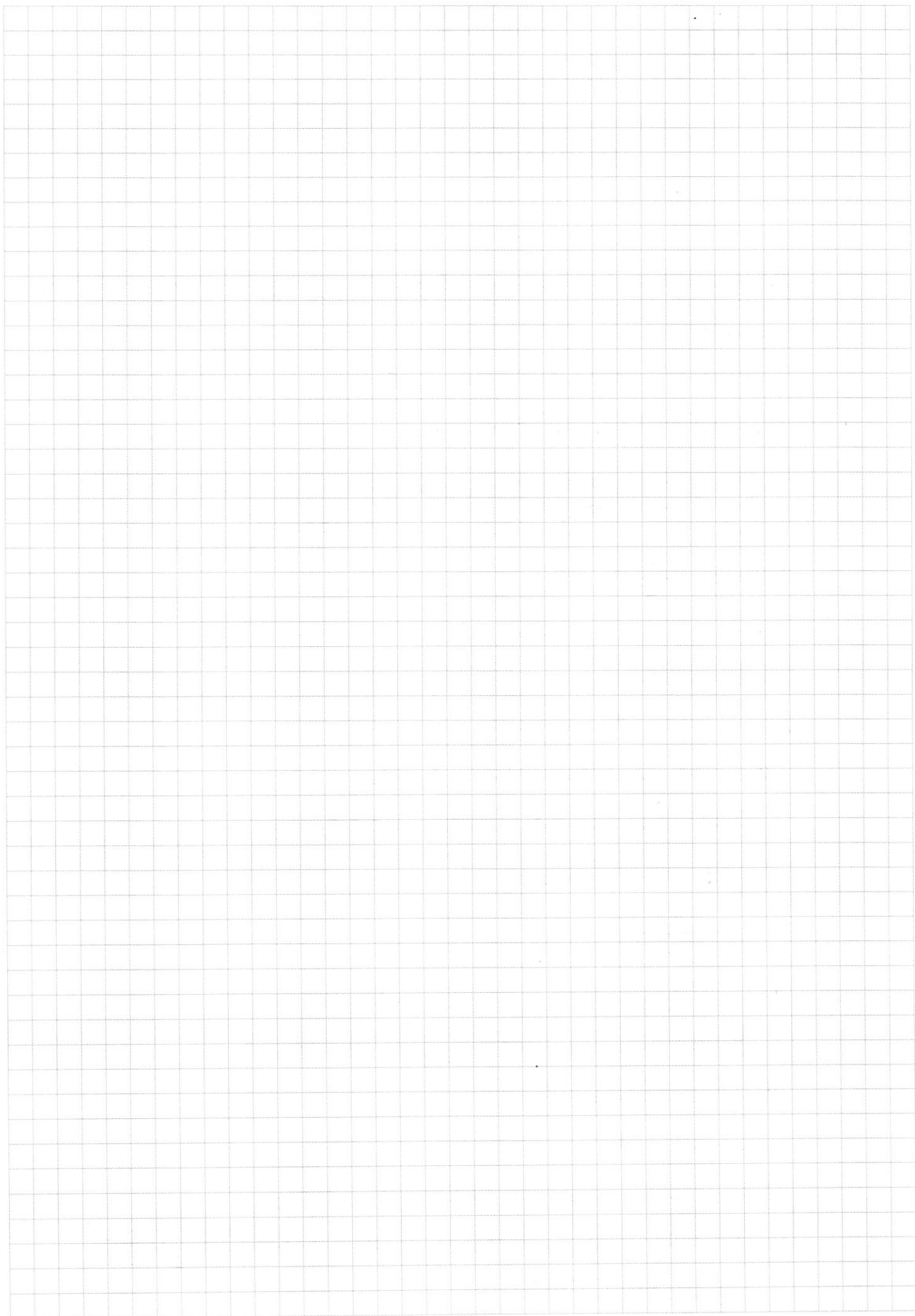
Тогда: $\frac{8!}{3! \cdot 2!} = \frac{8!}{3! \cdot 3!} \cdot 3$

3) Если 2^3 — это 8.

У нас число состоит из цифр: 8, 7, 5, 5, 5, 1, 1, 1.

Тогда: $\frac{8!}{3! \cdot 3!}$ и тогда всего: $5 \cdot \frac{8!}{3! \cdot 3!} = 8 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 = \boxed{5600}$

Ответ: 5600



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

27.

$$1) \begin{cases} 2x + 10 \leq 10 \\ x \leq 0; x \geq -y - 5; x \geq y - 5 \end{cases} \longrightarrow x \leq 0; -5 \leq y \leq 5.$$

$$2) \begin{cases} 2y \leq 10 \\ y \leq 5; x \geq -y - 5; x \leq y - 5 \end{cases} \longrightarrow y \leq 5; -10 \leq x \leq 0$$

$$3) \begin{cases} -2y \leq 10 \\ y \geq 5; x \leq -y - 5; x \geq y - 5 \end{cases} \longrightarrow y \geq 5; x \leq -10; x \geq 0 \text{ — нет.}$$

$$4) \begin{cases} -2x - 10 \leq 10 \\ x \geq 0; x \leq -y - 5; x \leq y - 5 \end{cases} \longrightarrow x \geq 0; y \leq -5; y \geq 5 \text{ — нет.}$$

$$1) \begin{cases} x \leq 0; -5 \leq y \leq 5. \end{cases}$$

$$1) \begin{cases} (x+5)^2 + (y+12)^2 = 13^2 \\ -18 \leq x \leq 8 \\ -25 \leq y \leq 1 \end{cases} \text{ — центр в } (-5; -12)$$

Тогда: $-18 \leq x \leq 0; -5 \leq y \leq 0$

$$2) \begin{cases} (x+5)^2 + (y-12)^2 = 13^2 \\ -18 \leq x \leq 8 \\ 1 \leq y \leq 25 \end{cases} \text{ — центр в } (-5; 12)$$

Тогда: $-18 \leq x \leq 0; 1 \leq y \leq 5$

$$2) \begin{cases} y \leq 5; -10 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

$$1) \begin{cases} (x+5)^2 + (y+12)^2 = 13^2 \\ -18 \leq x \leq 8 \\ -25 \leq y \leq 1 \end{cases} \text{ — центр в } (-5; -12)$$

Тогда: $-10 \leq x \leq 0; -25 \leq y \leq 0$

$$2) \begin{cases} (x+5)^2 + (y-12)^2 = 13^2 \\ -18 \leq x \leq 8 \\ 1 \leq y \leq 25 \end{cases} \text{ — центр в } (-5; 12)$$

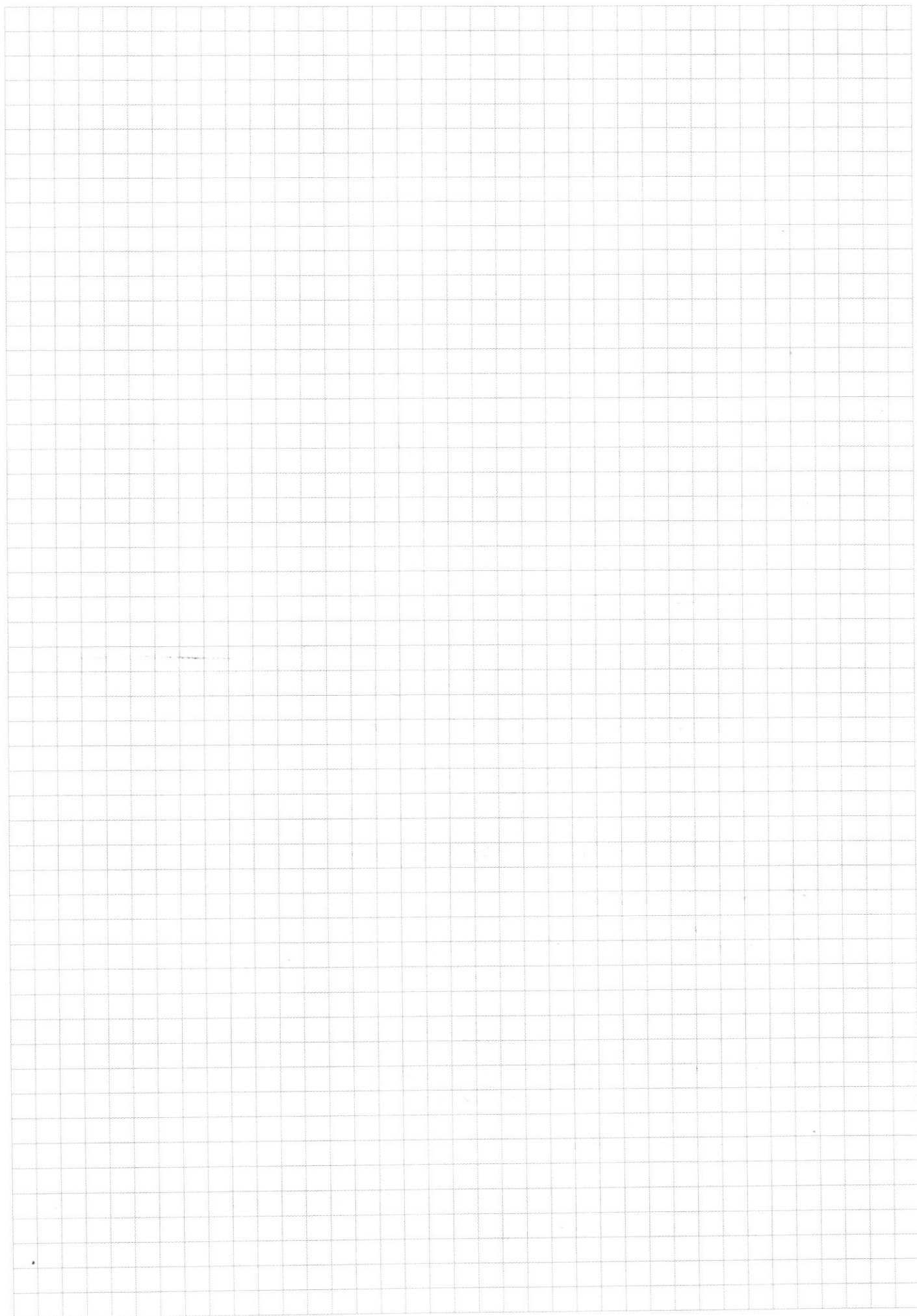
Тогда: $-10 \leq x \leq 0; 1 \leq y \leq 5$

Ответ:

Тогда это 2 окружности с радиусами 13 и центрами: $(-5; -12)$ и $(-5; 12)$.

У первой окружности: $-18 \leq x \leq 0$ и $-25 \leq y \leq 1$

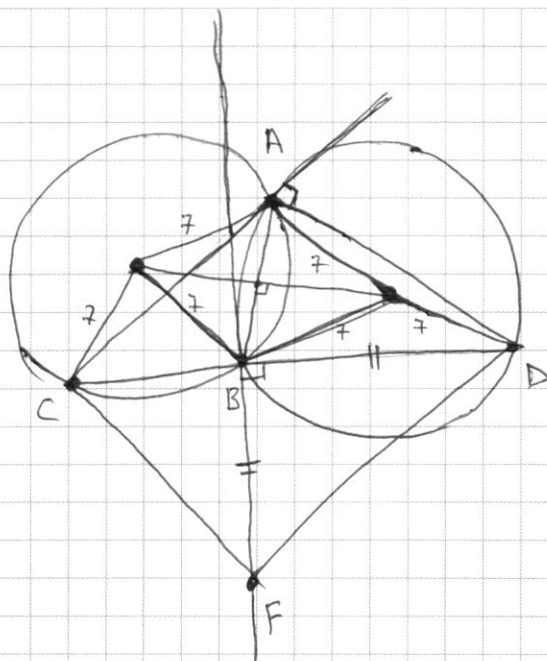
У второй окружности: $-18 \leq x \leq 0$ и $1 \leq y \leq 5$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № ____
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



- 1) $2x + 10 \leq 10$
 $x \leq 0$; $x \geq -y-5$; $x \geq y-5$.
- 2) $2y \leq 10$
 $y \leq 5$; $x \geq -y-5$; $x \leq y-5$.
- 3) $-2y \leq 10$
 $y \geq -5$; $x \leq -y-5$; $x \geq y-5$
- 4) $-2x - 10 \leq 10$
 $x \geq -10$; $x \leq -y-5$; $x \leq y-5$.

- 1) $x \leq 0; -5 \leq y \leq 5.$
- 2) $y \leq 5; -10 \leq x \leq 0$
- 3) $y \geq 5; x \leq -10; x \geq 0 - X.$
- 4) $x \geq 0; y \leq -5; y \geq 5 - X.$

$$\begin{aligned} (x+5)^2 + (y+1)^2 &= 13^2 \longrightarrow x-18 \leq x \leq 12 \\ (x+5)^2 + (y-1)^2 &= 13^2 \longrightarrow -25 \leq y \leq 1. \end{aligned}$$

~~$$7 \cdot 5 \cdot 2^3$$~~

шаг 7, 3 5-крат, (2, 4 и 4 4 и 4 и 4)

1) $2, 2, 2$

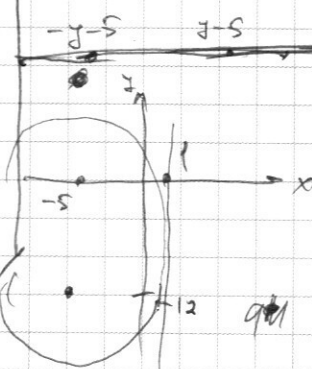
~~$$\frac{8!}{3! \cdot 3!}$$~~

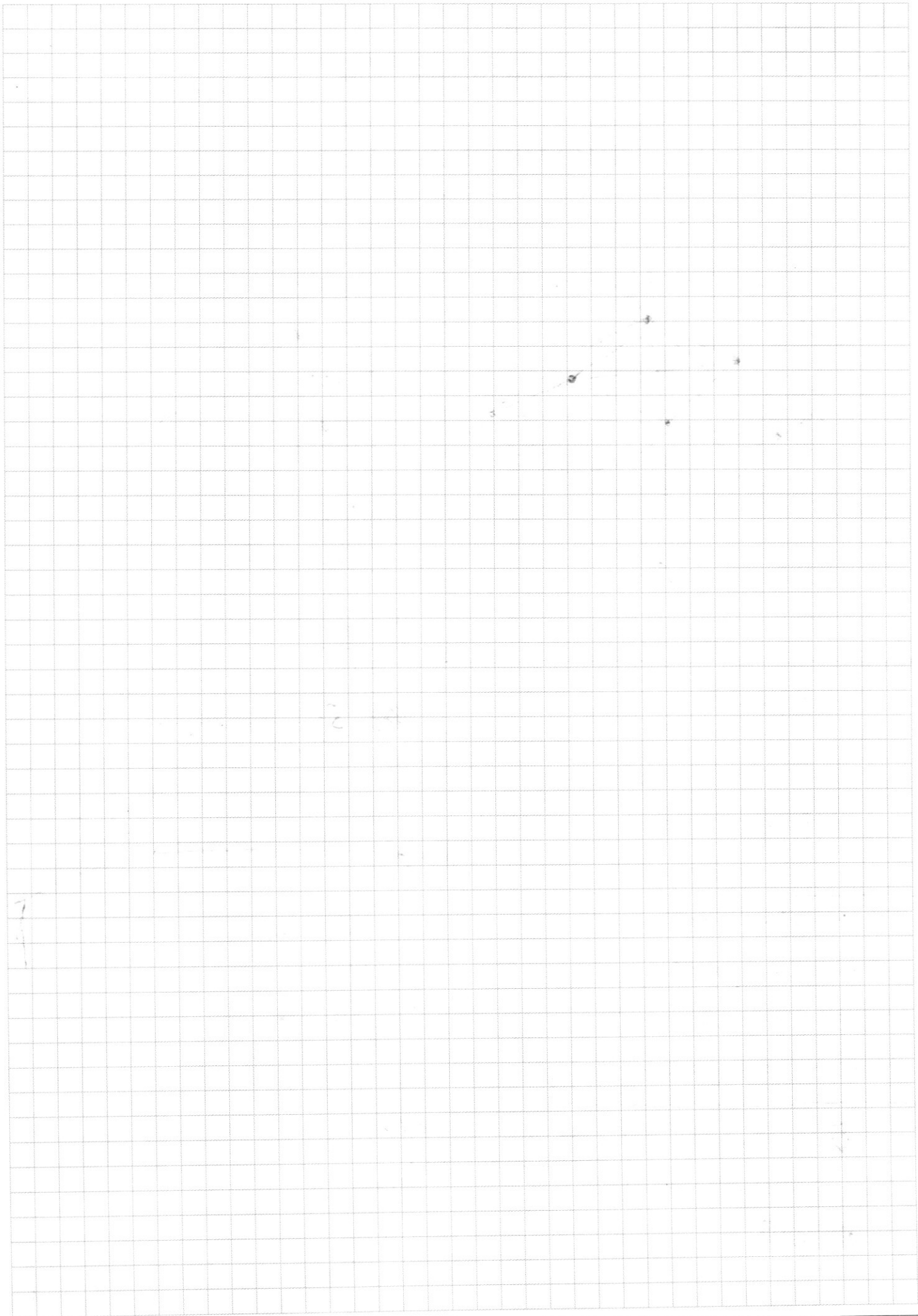
2) $2, 4$

~~$$\frac{8!}{3! \cdot 2!} = \frac{8!}{3! \cdot 3!} \cdot 3$$~~

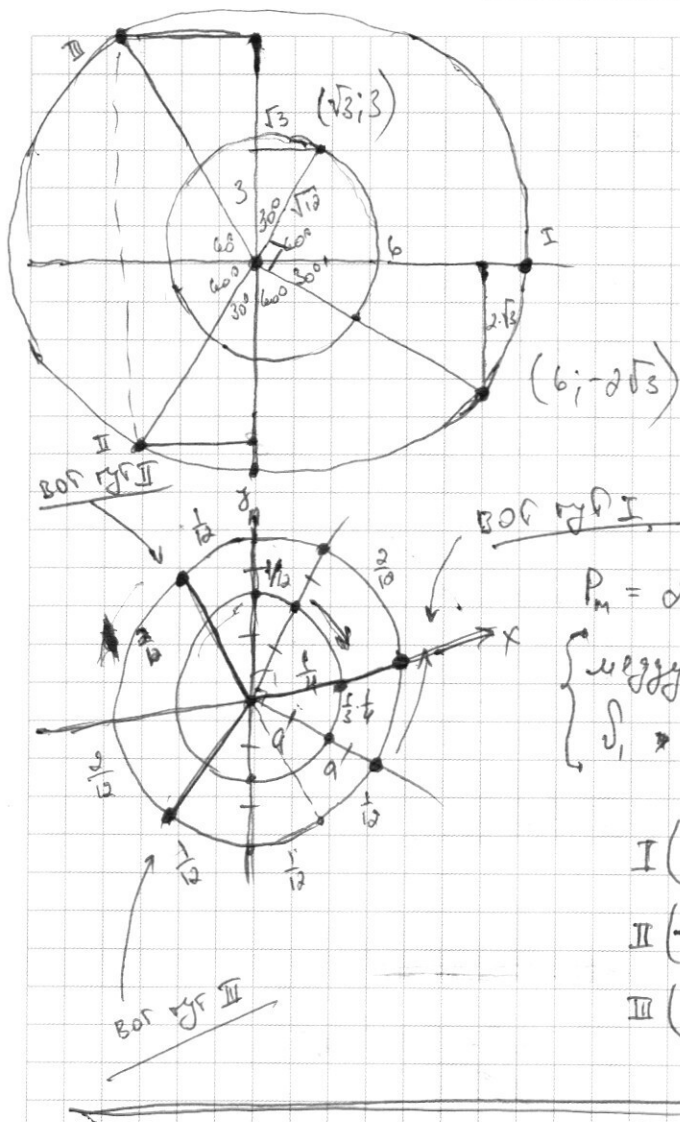
3) $\frac{8!}{3! \cdot 3!}$

~~$$5 \cdot \frac{8!}{3! \cdot 3!} = 8 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 = 56 \cdot 25 \cdot 4 = 56 \cdot 100 = 5600$$~~





ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\sqrt{(6-\sqrt{3})^2 + (3+2\sqrt{3})^2} =$$

$$= \sqrt{36 + 3 + 9 + 12} = \sqrt{60}$$

$$\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 9} = \sqrt{12}$$

$$\sqrt{6^2 + 12} = \sqrt{48} = \sqrt{12} \cdot 2$$

$$P_m = 2 \cdot \rho_i \cdot q ; P_s = 2 \cdot \rho_i \cdot 2q = 4 \cdot \rho_i \cdot q$$

$$\begin{cases} \text{мелзу ким} \rightarrow \frac{1}{4} w \\ \rho_i = 2 \cdot \rho \end{cases}$$

$$I(\sqrt{18}; 0)$$

$$II(-2\sqrt{3}; -6)$$

$$III(-2\sqrt{3}; 6)$$

$$y = \frac{a - 2(a-b) \cdot x}{6} = -\frac{1}{3}(a-b) \cdot x + \frac{a}{6} ; b \neq 0; a-b \neq 0$$

$$y = \frac{1 - 3bx}{(a-b) \cdot b} = -\frac{3}{(a-b) \cdot b} \cdot x + \frac{1}{(a-b) \cdot b} ; b \neq 0; a-b \neq 0$$

$$\frac{1}{3}(a-b) = \frac{3}{a-b} \rightarrow (a-b)^2 = 3^2 \rightarrow \begin{cases} a-b=3 \rightarrow a=b+3 \\ a-b=-3 \rightarrow a=b-3 \end{cases}$$

$$\frac{a}{6} = \frac{1}{(a-b) \cdot b} \rightarrow 6 = (a-b) \cdot ab \rightarrow 6 = 3 \cdot (b+3) \cdot b \rightarrow b^2 + 3b - 2 = 0$$

$$2 = 9 + 8 = 17$$

$$b = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$b^2 - 3b + 2 = 0$$

$$2 = 9 - 8 = 1$$

$$b = \frac{3 \pm 1}{2} \rightarrow \begin{cases} 2 \rightarrow a = -1 \\ 1 \rightarrow a = -2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{4} \cdot (x^2 + 10x + 25) \cdot (x^3 - 16x + 25) = x^4 + 9x^2 + 100 + 6x^3 - 60x - 20x^2$$

$$\frac{1}{4} \cdot (x^5 + 10x^4 + 25x^3 - 16x^3 - 160x^2 - 400x + 25x^2 + 250x + 625) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot (x^5 + 10x^4 + 9x^3 - 135x^2 - 150x + 625) = 4x^4 + 36x^2 + 400 + 24x^3 - 240x - 80x^2$$

$$1) x^5 + 6x^4 - 15x^3 - 91x^2 + 90x + 225 = 0$$

$$243 \cdot 3 - 405 - 819 + 270 + 225 = 729 + 90 - 819 = 0$$

$$2) (x-3) \cdot (x^4 + 9x^3 + 12x^2 - 55x - 75) = 0$$

$$x+5 \geq -y \rightarrow -5 \leq -y \rightarrow 5 \leq y$$

$$9 - 30 - 18 + 25 =$$

$$x \geq -10$$

$$x+5 \geq y \leq 5$$

$$x \leq 0$$

$$45 - 25 = 20$$

$$f(2) = 45004$$

$$-125 + 50 + 80 + 25$$

$$49 \cdot 7 = 280 + 63 = 343$$

$$35 \cdot 35 =$$

$$= 49 \cdot 25 =$$

$$= 250 \cdot 5 - 1025 =$$

$$= 1250 - 25 =$$

$$= 1$$

$$x+5 \leq -y \leq -5$$

$$x \leq -10$$

$$x+5 \geq y \geq 5$$

$$x \geq 0$$

$$0 \leq -y \leq 5$$

$$y \leq -5$$

$$0 \leq y \leq 5$$

$$5 \leq y$$

$$(x-3) \cdot (x+5) \cdot (x^3 + 4x^2 - 8x - 15) = 0$$

$$(x-3) \cdot (x+5) \cdot (x+5) \cdot (x^2 - x - 3) = 0$$

$$x^2 - x - 3 = 0 \rightarrow D = 1 + 12 = 13$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$4,5^3 - 16 \cdot 4,5 + 2,5$$

$$4,5 \cdot (6) + 2,5$$

