

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются

1. [4 балла] Вокруг птичьей кормушки в одной плоскости с ней по двум окружностям с одинаковой скоростью летают синица и снегирь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой кормушка (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Синица двигается по часовой стрелке, а снегирь – против. В начальный момент времени синица и снегирь находятся в точках $M_0(\sqrt{3}; 3)$ и $N_0(6; -2\sqrt{3})$ соответственно. Определите координаты всех положений снегира, в которых расстояние между птицами будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a, \\ 3bx + (a-b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3 - 16x + 25} = x^2 + 3x - 10$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2|x+1| + 1 \geq 0$.

5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 7000. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 7 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10, \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a & (I) \\ 3bx + (a-b)y = 1 & (II) \end{cases}$

При каких числах a, b система имеет бесконечное множество решений?

Поскольку

Выразим y из обеих уравнений:

$$I: y = \frac{a - 2x(a-b)}{6}$$

$$\text{т.к. } y = \frac{1 - 3bx}{(a-b)b} \Rightarrow \frac{a - 2x(a-b)}{6} = \frac{1 - 3bx}{(a-b)b} \Leftrightarrow (a-b)ab - 2x(b(a-b))^2 = 6 - 18bx$$

$$\Leftrightarrow b(2(a-b)^2 - 18)x = (a-b)ab - 6 \quad (III)$$

Выразим y :

$$I: x = \frac{a - 6y}{2(a-b)}$$

$$x = \frac{1 - (a-b)y}{2(a-b)} \Rightarrow \frac{a - 6y}{2(a-b)} = \frac{1 - (a-b)y}{3b} \Rightarrow 3ab - 18by = 2(a-b) - 2(a-b)^2y$$

$$\Leftrightarrow b(2(a-b)^2 - 18)y = 2(a-b) - 3ab \quad (IV)$$

Оба уравнения можно представить в виде $p_1x + q_1 = 0$, где x -переменная.

Т.к. линейное уравнение, которое имеет не более одного решения если

$p_1 \neq 0$ и $q_1 \neq 0$ в итоге не получаем однозначного решения Т.к. любое из решений систем (I) & (II) (исходной) является решением соответствующих уравнений (III) и (IV) \Rightarrow если оба из них имеют бесконечное число решений, т.е.:

$$\begin{aligned} I: & \begin{cases} b(2(a-b)^2 - 18) = 0 \\ (a-b)ab - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b(2(a-b)^2 - 18) = 0 \\ b^2(a-b)^2 - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow a-b=3 \quad (V) \\ II: & \begin{cases} b(2(a-b)^2 - 18) = 0 \\ 2(a-b) - 3ab = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b(2(a-b)^2 - 18) = 0 \\ 2(a-b) - 3ab = 0 \end{cases} \Rightarrow ab=2 \quad (VI) \end{aligned}$$

$$\therefore a = b+3 \Rightarrow \text{из } VI \quad b^2 + 3b - 2 = 0 \Rightarrow b = \frac{-3 \pm \sqrt{9+8}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2} \Rightarrow a = b+3 = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

Получили пару: $(\frac{3+\sqrt{17}}{2}, \frac{-3+\sqrt{17}}{2})$ и $(\frac{3-\sqrt{17}}{2}, \frac{-3-\sqrt{17}}{2})$ (первое - a , второе - b)

Проверим полученные ab & (I) и (II):

$$\begin{cases} 2x + 6y = a \Rightarrow x + 3y = \frac{a}{2} \\ 3ax + 6by = 1 \quad x + 3y = \frac{1}{3b} \end{cases}$$

так как, когда $\frac{a}{2} = \frac{1}{3b} \Rightarrow ab \cdot 3 = 1 \Rightarrow ab = \frac{1}{3}$, то это равн.

также имеем уравнение $x + 3y = 1$, где x и y - неизвестные, которое имеет ∞ числа решений.

Проверим случаи $b=0$ и $a=0$:

i) $b=0 \Rightarrow$ из I и II: $2(a+0)x + 6y = a$

$$a = 1 \Rightarrow 2(a+0)x + 6y = 1 \Rightarrow 0 = 1 \text{, это неверно.}$$

ii) $a=0 \Rightarrow$ из I и II: $2(0+0)x + 6y = 0 \Rightarrow y = \frac{0}{6} = 0$. Решение одн., \Rightarrow не подходит

$\Rightarrow b \neq 0$ и $a \neq 0$. $D(x; (a; b)) = \left\{ \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}, \frac{-3+\sqrt{17}}{2} \right), \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}, \frac{-3-\sqrt{17}}{2} \right) \right\}$

в3.

$$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^2-16x+25} = x^2+3x-10 = (x+5)(x-2)$$

$$\Rightarrow \text{Одно из решений: } x = -5.$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{x^2-16x+25} = x-2 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow x^2-16x+25 \geq 8-32+25=1 \geq 0.$$

$$x^3-16x^2+25 = 4x^2-16x+16$$

$$x^3-4x^2+3 = (x-3)(x^2-x-3)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x^2-x-3=0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+12}}{2} = \frac{1 \mp \sqrt{13}}{2} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{13}}{2} & \frac{1-\sqrt{13}}{2} < 2 \Rightarrow \text{этот корень не подходит} \\ \frac{1+\sqrt{13}}{2} & \text{но } \sqrt{13} \approx 3.6 \end{cases}$$

$\frac{1+\sqrt{13}}{2} > \frac{1+\sqrt{9}}{2} = \frac{4}{2} = 2$. Этот корень подходит.

$$8; 6; 5; -5; 3; \frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

*5: Рассмотрим разложение 7000 на простые множ. $7000 = 7 \cdot 2^3 \cdot 5^3$.

Просто неполное число равно 111111, что получается из него однос. число, удовлетворяющее условие:

Чт.к. его \prod чисел = 7000 ?? его цифры должны содержать все простые множители, а не более.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1, 20 очков

Число 1440000 можно представить в виде произведения трех множественных чисел (запишите, что оно не содержит единицы в записи). Число 1440000 можно представить в виде произведения четырех множественных чисел (запишите, что оно не содержит единицы в записи). Сколько способов есть для записи 1440000 в виде произведения четырех множественных чисел?

1) среди оставшихся четырех множественных чисел, сколько способов есть для записи 1440000 в виде произведения четырех множественных чисел? (1440000 = 144 · 10000, где 144 = 16 · 9, 16 и 9 — простые числа)

2) среди оставшихся четырех множественных чисел, сколько способов есть для записи 1440000 в виде произведения трех множественных чисел? (1440000 = 144 · 10000, где 144 = 16 · 9, 16 и 9 — простые числа)

3) среди оставшихся четырех множественных чисел, сколько способов есть для записи 1440000 в виде произведения четырех множественных чисел? (1440000 = 144 · 10000, где 144 = 16 · 9, 16 и 9 — простые числа)

- ① поставить 1 число на один из 4 подиумов — 4 способа +
- ② поставить 1 число на один из 4 подиумов и 2 числа на другие (первая линия) - 4 · 3 способ.
- ③ поставить 1 единственное среди 4 подиумов : 4 способа

$$\text{итого всего способов } = 8 \cdot C_4^3 \cdot (4 + 4 \cdot 3 + 4) = 8 \cdot \frac{4!}{3!1!} \cdot 20 = 5600$$

Ответ 5600.

6. Радиус окружности, длина которого равна $R = 7$. Такому радиусу соответствует равный, то есть окружность, вписанная в квадрат с диагональю $AB = 2R = 14$, меньшая дуга AB убывает вправо.

Также в квадрате между C и D , то есть может быть также, что C и D являются вершинами, расположены дуги (меньшие дуги), лежащие в правом, то есть C и D лежат по одну сторону от AB .

Из условия, т.к. B лежит на $\angle ACD$.

Тогда т.к. углы $\angle ADB = \angle ACB$ опирающиеся на полные углы, то $\angle ADB = \angle ACB$.
т.к. $\angle CAB = 90^\circ \Rightarrow \angle ADB + \angle ACB = 90^\circ \Rightarrow$
 $\angle ADB = \angle ACB = 45^\circ$.

посл. $\triangle BDF$: $\angle FBD = 90^\circ$, $BD = BF \Rightarrow$
 $\Rightarrow \triangle BDF$ - полнод. прям. $\Rightarrow \angle BFD = \angle BDF = 45^\circ$

посл. $\triangle CBF$: $\angle CBF = 50^\circ$ (т.к. смежен с $\angle FBD$)

$$\Rightarrow CF^2 = CB^2 + BF^2 = CB^2 + BD^2.$$

бисс. $\angle ABC$:

Задача №20 из биссектрисы B опирается на окружность R .

по теор. косинусов, $\frac{BC}{\sin CAB} = \frac{BC}{\sin x} = 2R \Rightarrow BC = 2R \sin x$

посл. $\triangle BDA$:

от биссектрисы B опирается на окружность R \Rightarrow $\angle BAD = 90^\circ - x$.

по теор. косинусов, $\frac{BD}{\sin BAD} = \frac{BD}{\sin 90^\circ - x} = \frac{BD}{\cos x} = 2R \Rightarrow BD = 2R \cos x$

$$\Rightarrow CF^2 = CB^2 + BD^2 = 4R^2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 4R^2 \text{ (но основанием прил. тонгесиф)}$$

$$\Rightarrow CF = 2R = 2 \cdot 7 = 14$$

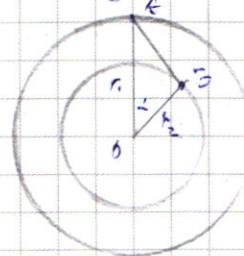
Ответ: 14.

№1. Док-ли, что минимальное расстояние между любыми точками, лежащими на окружности радиуса R , и окружности радиуса r_2 ($r_1 > r_2$) равно $r_1 - r_2$.

Пусть это будет точка A на $\odot B$. Пусть C окр-стм - $\odot O$.

Тогда угол между $AOB = \alpha$ и биссектрисой AB по теореме косинусов:

$$AB^2 = AO^2 + OB^2 - 2AO \cdot OB \cos \alpha = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \alpha \Rightarrow \text{минимальное значение } AB$$



возможно, когда $\cos \alpha$ принимает максимальное значение (т.к. r_1 и r_2 фиксированы) $\Rightarrow \alpha = 0^\circ$, а это происходит, когда $\alpha : 360^\circ$.

Первый \angle заслужен.

В 2-й заслужен потому, что в этом случае расстояние между любыми двумя точками.

Пусть у нас две окружности с центрами O_1 и O_2 и радиусами r_1 и r_2 . Найдем радиусы окр-стм



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

но которых лежат концы R_m и R_N). Тогда эти они лежат по определению в четверти в точке $B(0, \varphi)$. Т.е. по окр-тии \vec{R}_m получим уравнение $x^2 + y^2 = R^2$, неизвестной в обеих неравн. Для симметрии ноль в точке $M(\sqrt{3}; 3)$, значит $R_m^2 = (\sqrt{3})^2 + 3^2 = 12 \Rightarrow R_m = 2\sqrt{3}$, следовательно вектор \vec{R}_m лежит в четверти в точке $M(6^\circ; -2\sqrt{3})$, значит $R_m^2 = 6^2 + (-2\sqrt{3})^2 = 48 \Rightarrow R_m = 4\sqrt{3}$.

Пусть за 1 секунду эти пролегают по окр-тии S (т.к. они движутся с одинаковой скоростью).

Несмотря на то что \vec{R}_m движется дуги S можно выразить как $2\pi R \cdot \frac{10 - \varphi}{360^\circ} = 2\pi R \frac{\varphi}{360^\circ}$. Для симметрии это $S = 2\pi R_m \frac{\varphi_m}{360^\circ}$, где симметрия $S = 2\pi R_N \frac{\varphi_N}{360^\circ}$.

$$\Rightarrow 2\pi R_m \frac{\varphi_m}{360^\circ} = 2\pi R_N \frac{\varphi_N}{360^\circ} \Rightarrow R_m \varphi_m = R_N \varphi_N \Rightarrow 2\sqrt{3} \varphi_m = 4\sqrt{3} \varphi_N \Rightarrow \varphi_m = 2\varphi_N.$$

Поскольку концы разделяются в разные стороны, то они разделяют груз от груза со скоростью $\varphi_m + \varphi_N = 3\varphi_N$. В момент

нахождения концов груз не-уличен. Рассмотрим т.е. Пусть нормальна - точка,

$$\text{точка нахождения } (M_0, N_0) = \sqrt{(\sqrt{3} - 6)^2 + (3 + 2\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 - 12\sqrt{3} + 21 + 12\sqrt{3}} = \sqrt{30}$$

$$\text{по Геогр. координатам, } M_0 N_0^2 = R_m^2 + R_N^2 - 2 R_m R_N \cos \varphi_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \varphi_0 = \frac{R_m^2 + R_N^2 - M_0 N_0^2}{2 R_m R_N} = \frac{12 \times 36 - 30}{2 \times 6 \times 3} = \frac{30}{48} = \frac{5}{8}$$

значит, что в момент времени t угол между концами равен

$\varphi_0 + 3\varphi_N t$. Найдём, когда это значение равно $\pm 360^\circ$.

$$\varphi_0 + 3\varphi_N t = 360 k$$

$$t = \frac{\varphi_0 k}{3\varphi_N} \quad t = \frac{360 k - \varphi_0}{3\varphi_N} + 2k \pi \in \mathbb{Z}.$$

За это время концы проходят $\varphi_N t$ в градусах, чего недостаточно будет.

Найдём изогнутый угол конца с осями системы X : $\Rightarrow \operatorname{tg} \varphi_{Nx} = \frac{6}{-2\sqrt{3}} = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi_{Nx} = 60^\circ$. Т.е. угол конца с осью x в момент t будет равен $\varphi_{Nx} + \varphi_N t$ и его координаты будут равны $(R_N \cdot \sin(\varphi_{Nx} + \varphi_N t); R_N \cdot \cos(\varphi_{Nx} + \varphi_N t))$:

$(R_N \cdot \sin(60^\circ + 360^\circ k))$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a \\ 3bx + (a-b)y = 1 \end{cases}$$

$$y = \frac{a - 2(a-b)x}{6}$$

$$3bx + (a-b)y = 1$$

$$160 - 35$$

$$a, b \quad \frac{5+6-7}{1+2+3}$$

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a \\ 2(a-b)x + 6y < 6 = a \end{cases}$$

$$b=0$$

$$\text{Нет}$$

$$\sqrt{x^3 - 16x + 25} = 2(x-2)$$

$$x^3 - 16x + 25 = 4x^2 - 16x + 16$$

$$x^3 - 4x^2 + 9 = 0$$

$$27 - 36$$

$$8 + 16 + 9$$

$$-3 -2 -1 0 1 2 3$$

$$9 6 1 0$$

$$(x-3)(x^2 - x - 3) = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+12}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x^3 - 16x + 25$$

$$3, -5, \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$6x^4 + x^2 - 2x - 5x^2 \mid x+1 \rightarrow 1 \geq 0$$

$$x > -1$$

$$\text{Чт. } 6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2 - 5x^2 + 1 \geq 0$$

$$\text{Чт. } (x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1) \geq 0$$

$$160 \quad 160$$

$$\frac{35}{80} \quad \frac{1}{2}(27 - 48 + 1) = 1$$

$$\frac{48}{56} \quad \frac{1}{2}(27 - 16 + 25) = x^2 + 3x - 10$$

$$\frac{1}{2}(7 - 5) \sqrt{x^3 - 16x + 25} = (x+5)(x-3)$$

$$x = -5 \quad 27 - 18 - 24 + 17$$

$$x^3 - 2x^2 - 8x + 17 = 0 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3$$

$$-8 - 8 + 16 + 17 \quad -1 + 2 - 8 + 17$$

$$8 - 8 - 16 + 17 \quad -1$$

$$-4 \quad 17 \quad 22 \quad 17 \quad 6 \quad 1 \quad 2$$

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 9}{x^3 - 3x^2} \quad \frac{x-3}{x^2 - x - 3}$$

$$-x^2 \quad -3x + 9$$

$$abcde\bar{f}gh = 3000$$

$$0 < \alpha \leq 9$$

$$\begin{array}{r|l} 3000 & 2 \\ 3600 & 2 \\ 1750 & 2 \\ 875 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 3000 & 2 \\ 1000 & 5^3 \cdot 2^3 \\ 0 & \end{array}$$

$$7 \cdot 5 \quad 6x^4 + x^2 - 2x - 5x^2(x+1)$$

$$3000 = 7 \cdot 5^3 \cdot 2^3$$

$$8 \times C_7^3$$

$$S = \frac{g}{3}$$

$$\frac{1}{2} d$$

$$(x-5)^2 + (y-12)^2 = 169$$

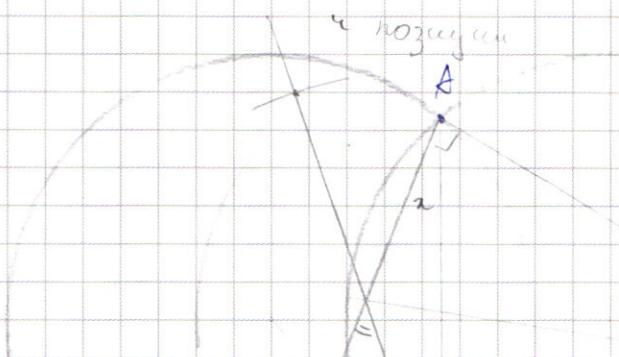
$$3 + 9 = r_1^2 = 2\sqrt{3}$$

$$36 + 12 = r_2^2 = (5\sqrt{2})^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}d \quad C_4^3 = \frac{4!}{(1!)^3} = 4$$

48

$$\frac{\varphi_1}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

$$|(x-5) + y| + |(x-5) - y| \leq 16$$



$$8 = 9,2 \quad 2,2,2 \quad 4 \quad 5$$

$$(4 + 4 \cdot 3 - 4) \times 8 \times C_7^3$$

$$CB = ?$$

$$BD = ?$$

$$\frac{BC}{\sin x} = \frac{BD}{\sin(\beta - x)} = \frac{BD}{\cos x}$$

$$BC = \sin x \cdot R$$

$$BD = \cos x \cdot R$$

$$(\varphi_1 + 2\varphi_2) \wedge$$

$$\frac{\varphi_1}{360^\circ} \cdot 2\pi r_1 = \frac{\varphi_2}{360^\circ} \cdot 2\pi r_2$$

$$\varphi_1 \cdot r_1 + \varphi_2 \cdot r_2 \Rightarrow \varphi_1 \cdot 2\sqrt{3} = \varphi_2 \cdot 4\sqrt{3}$$

$$\varphi_1 = 2\varphi_2$$

φ_1

φ_2

~~$$2r_1^2 - 2r_1^2 \cos \varphi_1$$~~

черновик чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № _____
(Нумеровать только чистовики)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2(x+1) - 1 \geq 0$$

$$\rightarrow x \geq -1$$

$$6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$x = 1$$

$$\begin{array}{r} 6x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 2x - 1 \\ 0x^4 - 6x^3 \\ \hline x^3 - 1x^2 \\ - 2^3 - 2^2 \\ \hline - 3x^2 + 2x \\ - 3x^2 + 3x \\ \hline - x - 1 \end{array}$$

$$6x^4 + x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$-2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2$$

$$6 \quad 1 \quad 0 \quad +$$

$$48 + 4 - 6 - 1$$

$$\frac{1}{36} + \frac{1}{36} \quad 48 + 4 - 6 - 1$$

$$- 48 + 4 + 6 - 1$$

$$-39 \quad -3 \quad -1 \quad +3 \quad 45$$

$$96 + 40 - 16 - 4 + 1$$

$$\frac{1}{3} \quad \frac{2}{9} + \frac{1}{9} - 1 + 1$$

$$0 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{5}{6} \quad +$$

$$-1 \quad - \quad - \quad 1.5 \quad 3$$

$$\frac{4}{5} \quad \frac{1}{5}$$

$$6 - \frac{8}{27} + \frac{4}{9} - 2 - 1$$

$$\frac{5}{6} \quad -$$

$$\frac{9}{6} \quad \frac{5}{6}$$

$$\frac{2}{9} + \frac{4}{9}$$

$$\frac{125}{36} + \frac{25}{36} - \frac{5}{3} - 1$$

$$\frac{1}{3} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{22}{9} - 3$$

$$\frac{150}{36} - \frac{60}{36} - \frac{36}{36} : \frac{54}{36} \quad \frac{9}{6}$$

$$\frac{16}{9} + \frac{4}{9} - 2 - 1$$

$$\left\{ |x+y-5| + |x-y+5| \leq 10 \right. \quad (1)$$

$$(|x|-5)^2 + (|y|+1)^2 = 13^2$$

$$\frac{22}{9} - \frac{27}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\text{d)} \quad x+y+5 > 0$$

$$y \geq 0 \rightarrow$$

$$x + y \geq 5 - y$$

черновик чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

