

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Вокруг птичьей кормушки в одной плоскости с ней по двум окружностям с одинаковой скоростью летают синица и снегирь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой кормушка (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Синица движется по часовой стрелке, а снегирь – против. В начальный момент времени синица и снегирь находятся в точках $M_0(\sqrt{3}; 3)$ и $N_0(6; -2\sqrt{3})$ соответственно. Определите координаты всех положений снегиря, в которых расстояние между птицами будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a, \\ 3bx + (a-b)y = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2|x+1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 7000. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 7 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10, \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10 = (x+5)(x-2)$$

-5 - не решение

$$(\sqrt{-125+80+25} = \sqrt{20} - \text{нельзя})$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{x^3-16x+25} = x-2$$

$$x^3-16x+25 \geq 0$$

$$\frac{1}{4}(x^3-16x+25) = x^2-4x+4$$

$$x^3-16x+25 = 4x^2-16x+16$$

$$x^3+25 = 4x^2+16$$

$$x^3-4x^2+9 = 0$$

$$x_1 = 3 - \text{подх.}$$

$$(x-3)(x^2-x-3) = 0$$

$$x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x_3 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} - \text{подх.}$$

$$x_2 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} - \text{не подх.}$$

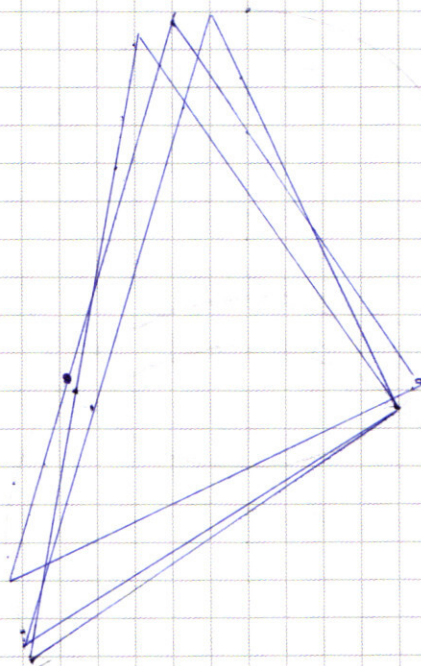
$$\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^3 - 16\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) + 25 = \frac{1+\sqrt{13}+13+13\sqrt{13}}{8} - \frac{16+16\sqrt{13}}{2} + 25 =$$

$$= \frac{14+14\sqrt{13}}{8} - \frac{16+16\sqrt{13}}{2} + 25 = \frac{7+7\sqrt{13}-32-32\sqrt{13}}{4} + 25 =$$

$$= \frac{-25-25\sqrt{13}}{4} + 25 = -6\frac{1}{4} - 6\frac{1}{4}\sqrt{13} + 25 < 0 - \text{не подх.}$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^3 - 16\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) + 25 = \frac{1-\sqrt{13}+13-13\sqrt{13}}{2} - \frac{16-16\sqrt{13}}{2} + 25 =$$

$$= \frac{14-14\sqrt{13}-16+16\sqrt{13}-32+32\sqrt{13}}{2} + 25 = \frac{-25+25\sqrt{13}}{2} + 25 = 0$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

33

N5.

2.5252.571

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 56 \cdot 30 \cdot 4 = 56 \cdot 120 = 6720$$

N2.

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a \\ 3bx + (a-b)6y = 1 \end{cases}$$

$$(2a+b)x + (ab - b^2 + 6)y = a + 1$$

$$2(a-b)x + 6y = 3abx + (a-b)ab$$

$$2(a-b)x - 3abx = (a-b)ab - 6y$$

$$x(2a - 2b - 3ab) = y(ab - b^2 - 6)$$

N4.

$$6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2 / (x+1) + 1 \geq 0$$

$$1. x \geq -1$$

$$6x^4 + x^2 + 2x - 5x^3 - 5x^2 + 1 \geq 0$$

$$6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

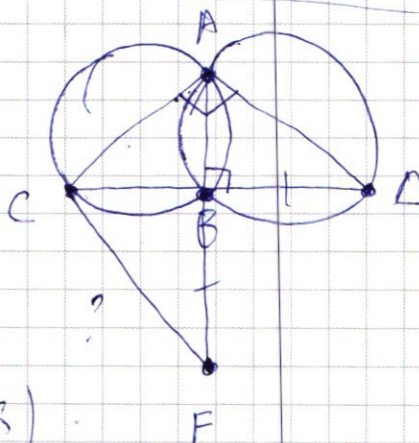
$$6x^2 - 5x - 4 + 2/x + 1/x^2 \geq 0$$

A

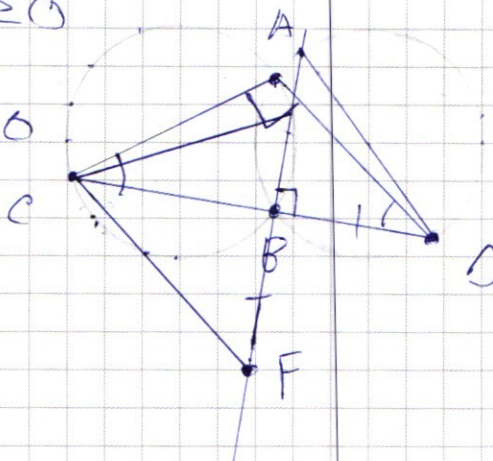
B

$$\begin{array}{r} \times 120 \\ \times 56 \\ \hline 720 \\ 600 \\ \hline 6720 \end{array}$$

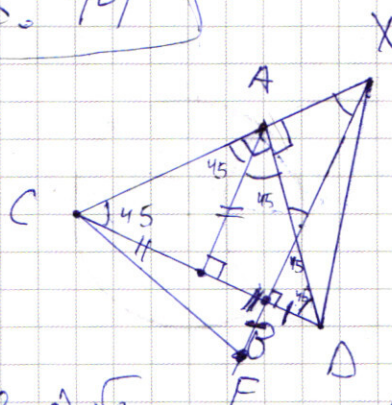
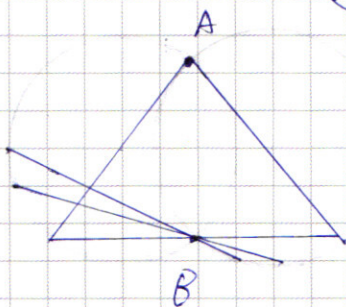
6720 по идее
еще дел. на 6!!



$$2x^2(x-1) \geq 0$$



WE. 14



$$AD = 2b$$

$$AC = AD = 2b\sqrt{2}$$

$$CX^2 = 2(2b-a)^2 =$$

$$2(4b^2 - 4ab + a^2) =$$

$$8b^2 - 8ab + 2a^2$$

$$AX = (b-a)\sqrt{2}$$

$$2(b-a)^2 + 2b^2 = DX^2$$

$$2b^2 - 4ab + 2a^2 = DX^2$$

$$4b^2 - 4ab + 2a^2 = DX^2$$

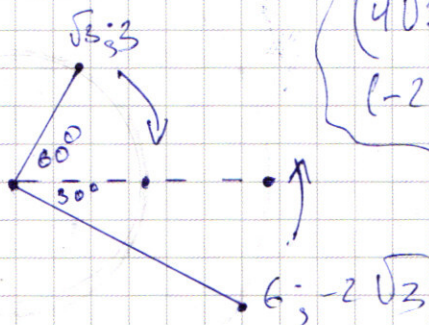
$$CX = (2b-a)\sqrt{2}$$

$$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$(4\sqrt{3}; 0) \quad (-2\sqrt{3}; -6)$$

$$(-2\sqrt{3}; 6) \quad N1.$$

$$\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$



так

$$2W_1 R = W_2 \cdot 2R \quad \text{так } (x-1)$$

$$2W_1 = 2W_2 = 2W \quad (x+5)(x-2)$$

$$\text{tg} \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

60°

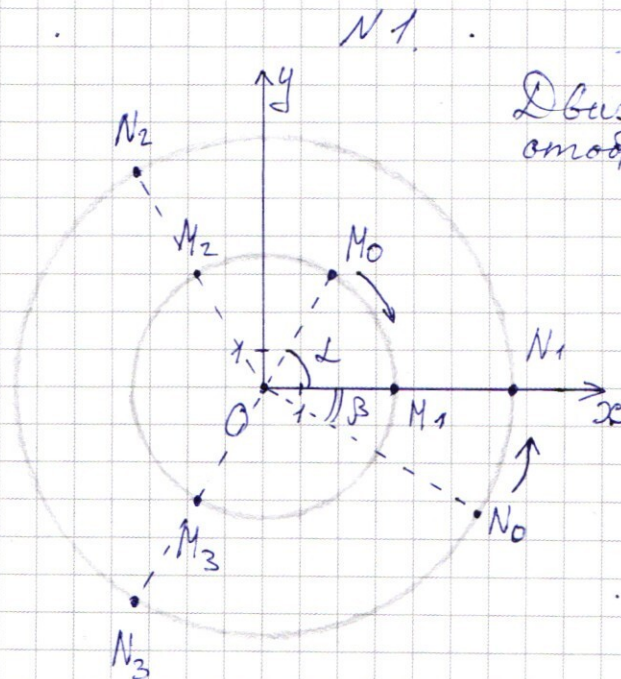
30°

$$\frac{1}{2}(x+5) \sqrt{x^3 - 16x + 25} = x^2 + 3x - 10 \quad [x^3 - 16x + 25 \geq 0]$$

$$\frac{1}{4}(x+5)^2(x^3 - 16x + 25) = x^4 + 3x^3 - 10x^2 + 3x^3 + 9x^2 - 30x - 10x^2 - 30x + 100$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Порядок задач в решении не соответствует порядку задач в условии.



Движение частицы схематично отобразено на рисунке.

Зная координаты $M_0(\sqrt{3}; 3)$, можно найти $\tan \alpha = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, откуда $\alpha = 60^\circ = \pi/3$.

Аналогично $\tan \beta = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, откуда $\beta = 30^\circ = \pi/6$ (т.к. координаты $N_0(6; -2\sqrt{3})$).

По теореме Пифагора радиус окружности, по которой движется ежица, равен $R_M = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Аналогично, радиус окружности движения снегира $R_N = \sqrt{6^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$.

При движении по окружности $v = \omega R$, где ω - угловая скорость. Т.к. равны скорости v_M ежицы и v_N снегира, можно записать $\omega_M R_M = \omega_N R_N$. Зная R_M и R_N , получаем $\omega_M = 2\omega_N$. Пока снегирь изменяет свой угол на $\Delta\varphi$, ежица изменяет свой угол на $2\Delta\varphi$.

К моменту первой встречи птицы суммарно пролетит угол $2 + \beta$. П.к. $2 = 2\beta$ и $U_M = 2U_N$, первая встреча произойдет на оси Ox . Здесь и далее встречаей называю момент, когда расстояние между птицами минимально (т.е. ~~они~~ ~~два~~ ~~направления~~ ~~птицы~~ удалены от Ox ~~наравный~~ ~~угол~~ направления на ~~птицу~~ птицу от точки O совпадают). В момент первой встречи снегирь находится в точке $N_1(R_N; 0) = N_1(4\sqrt{3}; 0)$.

Между первой и второй встречаей птицы суммарно пролетит угол 2π . ~~Ф/целая окружность~~. П.к. $U_M = 2U_N$, птица пролетит $\frac{4\pi}{3}$, а снегирь — $\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$.

Когда снегирь в момент второй встречи находится в точке $N_2(R_N \cdot \cos 120^\circ; R_N \cdot \sin 120^\circ) = N_2(4\sqrt{3} \cdot (-0,5); 4\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3}/2)) = N_2(-2\sqrt{3}; 6)$

Аналогично анализируя промежуток между второй и третьей встречаей, находим, что в момент ~~второй~~ третьей встречи ~~там~~ снегирь находится в точке $N_3(-2\sqrt{3}; -6)$.

Продолжаем действовать аналогично. Находим, что четвёртая встреча точно повторяет первую. Следовательно, все встречи, начиная с четвёртой, происходят так же, где и первые три. Тогда N_1 , N_2 и N_3 — все положения снегиря, в которых расстояние между птицами будет кратчайшим.

Ответ: $(4\sqrt{3}; 0); (-2\sqrt{3}; 6); (-2\sqrt{3}; -6)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10 \quad \boxed{x^3-16x+25 \geq 0}$$

$$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = (x+5)(x-2)$$

$x = -5$ не явл. корнем уравнения

$$(-5)^3 - 16(-5) + 25 = -125 + 80 + 25 = -20 < 0$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{x^3-16x+25} = x-2$$

Возведем в квадрат:

$$\frac{1}{4}(x^3-16x+25) = x^2-4x+4$$

$$x^3-16x+25 = 4x^2-16x+16$$

$$x^3-4x^2+9 = 0$$

$x = 3$ является корнем уравнения.

$$3^3 - 4 \cdot 3^2 + 9 = 27 - 36 + 9 = 0$$

$$3^3 - 16 \cdot 3 + 25 = 27 - 48 + 25 = 4 \geq 0$$

Поделим уравнение на $(x-3)$.

$$x^2 - x - 3 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4 \cdot 3}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$x = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ не является корнем уравнения

$$\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^3 - 16\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) + 25 = \frac{1+\sqrt{13}+13+13\sqrt{13}}{8} - \frac{8+8\sqrt{13}}{2} + 25 =$$

$$= \frac{7+7\sqrt{13}}{4} - \frac{32+32\sqrt{13}}{4} + 25 = \frac{-25-25\sqrt{13}}{4} + 25 = \frac{-25(\sqrt{13}+1)}{4} + 25 <$$

$$< \frac{-25(3+1)}{4} + 25 = 0 \quad (\sqrt{13} > \sqrt{9} = 3)$$

$$x = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \text{ является корнем уравнения}$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^3 - 16\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) + 25 = \frac{1-\sqrt{13}+13-13\sqrt{13}}{8} - \frac{16-16\sqrt{13}}{2} + 25 =$$

$$= \frac{7-7\sqrt{13}}{4} - \frac{32-32\sqrt{13}}{4} + 25 = \frac{-25+25\sqrt{13}}{4} + 25 > 0$$

$$(25\sqrt{13} > 25)$$

Тогда уравнение имеет 2 корня:

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$$

Ответ: $\frac{1-\sqrt{13}}{2}; 3$.

№5.

Разложим 7000 на простые множители:

$$7000 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 7$$

Произведение цифр восьмизначного числа раскладывается аналогично.

Заметим, что в числе не может быть нулей, иначе произведение цифр равно нулю, а это не так.

В числе точно будет цифра 7 и три цифры 5.

(никакая цифра от 1 до 9, кроме 5, не делится на 5, с цифрой 7 аналогично). Есть $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 / 6 = 8 \cdot 7 \cdot 5 = 280$ ^{способов} _{различных способов} расставить эти цифры на какие-то 4 из 8 мест.

Оставшиеся ^{в каждой из} 4 места могут быть заняты следующим образом:

1. Три двойки и единица - 4 ~~способа~~ уникальных способа

2. Двойка, четверка и две единицы - $4 \cdot 3 = 12$ _{уникальных способов}

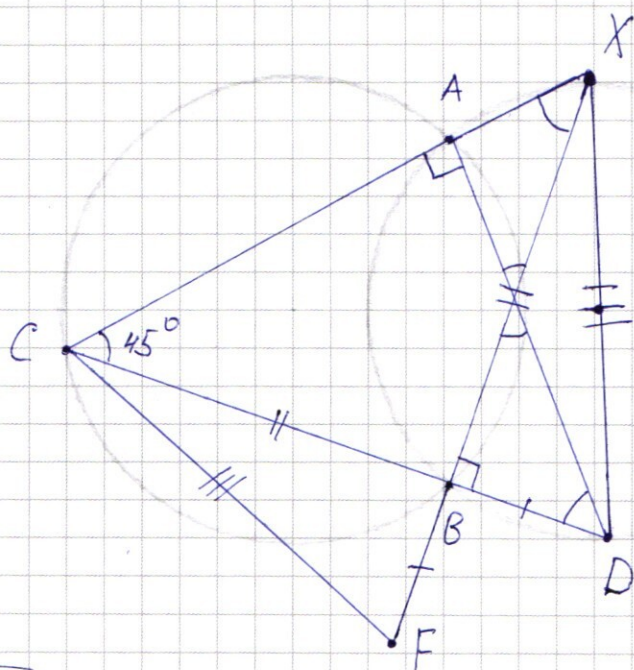
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 (продолжение).

3. Восьмёрка и три единицы - 4 уникальных способа.
Тогда всего таких восьмизначных чисел $280 \cdot (4 + 12 + 4) =$
 $= 280 \cdot 20 = 5600.$

BmGem: 5600

N6.



$R = r$ - радиусы окружностей

М. к. у окружностей
равны радиусы,
их дуги АВ равны
из симметрии
окружностей

относительно прямой AB)

Когда $\angle ACB = \angle ADB$ (открыты
на равные дуги).

$\therefore \angle CAD = 90^\circ, \angle ACD = \angle ADC = 90^\circ/2 = 45^\circ$

Продлим BF до пересечения с AC в точке X . $\overline{ML} \perp \angle XBC = 90^\circ$
и $\angle XCB = 45^\circ$, $\angle CXB = 45^\circ$. $\overline{ML} \perp \angle XCB = \angle XBC = 45^\circ$, $CB = XB$.
 $\overline{ML} \perp BF = BD$, $CD = CB + BD = BX + BF = XF$.

Заметим, что $\angle AXB = \angle ADB = 45^\circ$. Т.к. они опираются на одну дугу AB и точка D принадлежит второй окружности, точка X также принадлежит второй окружности.

^{Все три точки}
 $\angle DAX = 90^\circ$, при этом DAX принадлежит второй окружности.
Отсюда DX - диаметр второй окружности.

Тогда $DX = 2R = 2 \cdot 7 = 14$.

$\triangle CXF = \triangle XCD$ (CX - общая сторона,
 $\angle CXF = \angle XCD = 45^\circ$,
 $XF = CD$).

Отсюда $CF = XD = 14$.

Ответ: $CF = 14$.