

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Вокруг птичьей кормушки в одной плоскости с ней по двум окружностям с одинаковой скоростью летают синица и снегирь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой кормушка (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Синица движется по часовой стрелке, а снегирь – против. В начальный момент времени синица и снегирь находятся в точках $M_0(\sqrt{3}; 3)$ и $N_0(6; -2\sqrt{3})$ соответственно. Определите координаты всех положений снегиря, в которых расстояние между птицами будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a, \\ 3bx + (a-b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2|x+1| + 1 \geq 0$.

5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 7000. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 7 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10, \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

Рассмотрим 2 случая:

1) попробуем свести систему к системе вида:

$$\begin{cases} -dx + ky = -n \\ dx + ky = n \end{cases}, \text{ где } k, d, n - \text{какие-то числа.}$$

Когда данная система имеет бесконечное множество решений.

$$\begin{cases} -2a + 2b = 3b \\ (a-b)b = -6 \\ a = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ -3 \cdot 2 = -6 \\ a = 1 \end{cases}$$

2) Попробуем свести систему к виду

$$\begin{cases} ex + hy = q \\ hx + ey = q \end{cases}, \text{ где } h, e, q - \text{какие-то числа}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ bx = 2y(1) \\ by = 2x(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ b(ky) = 2(x+y) \quad (1)+(2) \\ a = 1 \end{cases}$$

Ответ: $(a_1; b_1) = (1; 2); (a_2; b_2) = (-1; 2)$.

№3.

$$(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = 2(x^2+3x-10)$$

Заметим, что $x^2+3x-10 = (x+5)(x-2)$

$$\sqrt{x^3-16x+25} = 2x-4$$

Возведем обе части выражения в квадрат

$$x^3 - 4x^2 + 9 = 0$$

Заметим, что $x_1 = 3$ является корнем уравнения. Тогда, разделим многочлен на $(x - 3)$.

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 4x^2 + 9 & x - 3 \\ x^3 - 3x^2 & x^2 - x - 3 \\ \hline -x^2 + 9 & \\ -x^2 + 3x & \\ \hline -3x + 9 & \\ -3x + 9 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Решим уравнение $x^2 - x - 3 = 0$, получим корни $x_2 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$ и $x_3 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$. Осталось проверить, что при найденных корнях $x^3 - 16x + 25 \geq 0$.

при $x = 3$

$$27 - 48 + 25 \geq 0$$

$$4 \geq 0$$

верно

при $x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$

$$5 + 2\sqrt{13} - 8 - 8\sqrt{13} + 25 \geq 0$$

$$22 \geq 6\sqrt{13}$$

$$484 \geq 36 \cdot 13$$

$$484 \geq 468$$

верно

при $x = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$

$$5 - 2\sqrt{13} + 25 - 8 + 8\sqrt{13} \geq 0$$

$$22 + 6\sqrt{13} \geq 0$$

верно

Ответ: $x = 3$; $\frac{1 - \sqrt{13}}{2}$; $\frac{1 + \sqrt{13}}{2}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~5.

Разложим число 7000 на простые множители $7000 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 7$. Так как $2 \cdot 5 > 9$; $2 \cdot 7 > 9$; $5 \cdot 7 > 9$, мы можем составить ~~из этих~~ восьмизначное число из цифр (5, 5, 5, 2, 2, 2, 7, 1).

Если бы у нас было 8 разных цифр, то мы бы смогли составить $8!$ восьмизначных чисел (без повтора цифр). Но у нас есть 2 тройки повторяющихся цифр. Возьмем случайную расстановку цифр. Например, 25252571. В искомым множестве чисел она встретится 1 раз, а в нашем множестве эта расстановка встретится $6 \cdot 6 = 36$ раз (6 - число способов поменять три двойки или четверки местами). Тогда, искомое количество чисел равно:

$$\frac{8!}{36} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 7 = 20 \cdot 56 = 1120$$

Ответ: 1120.

№1.

Найдем радиусы окружностей, по которым вращаются штифы.

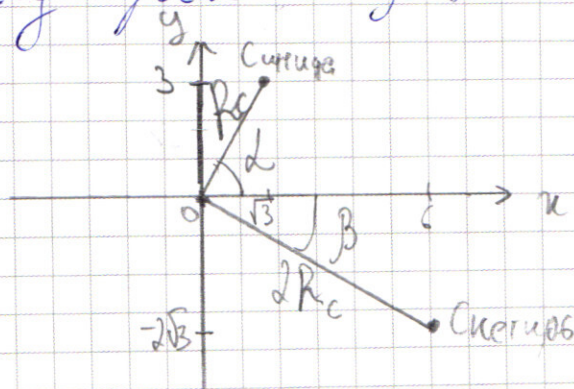
$$R_c = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{12} \text{ (штиф)}$$

$$R_s = \sqrt{6^2 + (-2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{12} \text{ (штиф)}$$

Значит, $2R_c = R_s$. Исходя из равенства скоростей найдем, что период вращения штифа в 2 раза меньше периода вращения штифа.

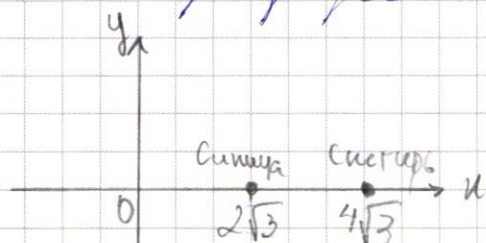
Проанализируем начальные положения штифов. Заметим, что для $\triangle KOH$ выполняется теорема Пифагора.

Значит, угол между штифом, соединяющим корнушку и штиф, корнушку и штиф равен 90° . Минимальное расстояние между штифами будет, когда штифы будут на одной радиусе к большой окружности. Также заметим, что изначально штиф находится под углом $\alpha = 60^\circ$ к оси Ox ($\tan \alpha = \sqrt{3}$), штиф под углом $\beta = 30^\circ$ к оси Ox ($\tan \beta = \sqrt{3}$)



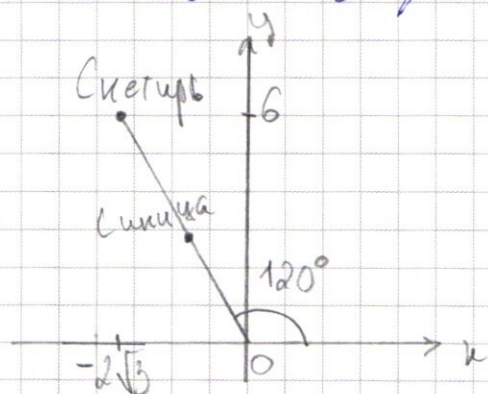
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Принимая во внимание то, что угловая скорость шкива в 2 раза больше угловой скорости скелетра, мы понимаем, что первый раз они окажутся на одном радиусе на оси Ox .



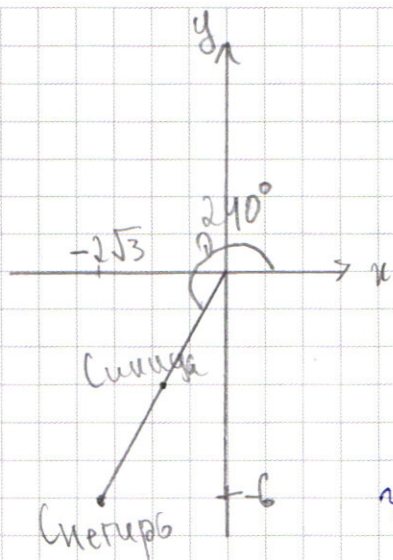
В этот момент координаты шкива ~~$(2\sqrt{3}; 0)$~~ $= (4\sqrt{3}; 0)$

В следующий раз они „встретятся“ под углом 120° (если считать против часовой стрелки от оси Ox)



Координата скелетра $(-2\sqrt{3}; 6)$

Далее они „встретятся“ на одном радиусе под углом 240° от оси Ox . Присматриваясь закономерность, что каждая следующая встреча происходит на 120° дальше, чем предыдущая. Так происходит, потому что пока шкив отклоняется на $\angle \varphi$, шкив отклоняется на $\angle 2\varphi$. При этом $3\angle \varphi = 360^\circ$, $\angle \varphi = 120^\circ$.



Координаты снегири
 $(-2\sqrt{3}; -6)$

Далее они окажутся
 на одном радиусе
 в тех же точках,
 что и в первый раз.

Тогда, получим три точки для
 снегири $(4\sqrt{3}; 0)$; $(-2\sqrt{3}; 6)$; $(-2\sqrt{3}; -6)$.

Ответ: $(4\sqrt{3}; 0)$; $(-2\sqrt{3}; 6)$; $(-2\sqrt{3}; -6)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4

1) при $x \geq -1$

$6x^4 - 5x^2(x+1) + (x+1)^2 \geq 0$. Рассмотрим это выражение как квадратный трехчлен относительно $(x+1)$. Найдем корни

$$(x+1)^2 - 5x^2(x+1) + 6x^4 = 0$$

$$D = 25x^4 - 24x^4 = x^4$$

$$(x+1)_1 = \frac{6x^2}{2} = 3x^2 \quad (x+1)_2 = 2x^2.$$

Значит при $2x^2 \leq x+1 \leq 3x^2$ выражение принимает отрицательные значения.

Запишем два полученных уравнения

$$3x^2 - x - 1 = 0$$

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -0,5$$

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{6}; \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{6}$$

при $x \in [-1; -0,5)$ исходное выражение положительно

при $x \in [-0,5; \frac{1-\sqrt{13}}{6})$ выражение отрицательно

при $x \in (\frac{1-\sqrt{13}}{6}; \frac{1+\sqrt{13}}{6})$ выражение положительно

при $x \in (\frac{1+\sqrt{13}}{6}; 1)$ выражение отрицательно

при $x \in (1; \infty)$ выражение положительно

2) при $x < -1$

$$6x^4 + 5x^2(x+1) + (x+1)^2 \geq 0$$

$$6x^4 + 5x^2(x+1) + (x+1)^2 = 0$$

$$(k+1)_1 = -2k^2 \quad (k+1)_2 = -3k^2$$

Значит при $-3k^2 \leq k+1 \leq -2k^2$ выражение принимает отрицательные значения

$$2k^2 + k + 1 = 0$$

$$3k^2 + k + 1 = 0$$

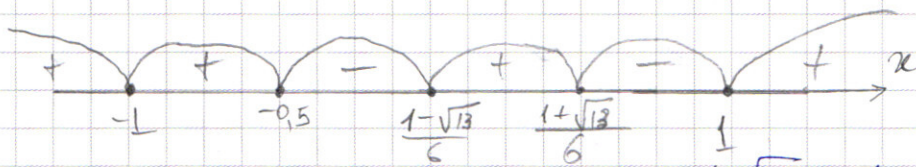
$$x_1 = 0,5 > -1$$

$$x_3 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{6} > -1$$

$$x_2 = -1$$

$$x_4 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{6} > -1$$

Первый, третий и четвертый корни нам не подходит. Значит, нам надо рассмотреть только один промежуток при $x \in (-\infty; -1)$ исходное выражение положительно.



Ответ: $(-\infty; -0,5] \cup \left[\frac{1-\sqrt{13}}{6}; \frac{1+\sqrt{13}}{6} \right] \cup [1; \infty)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$6x^4 - 5x^2 | x+1 | + (x+1)^2 \geq 0$$

или $x \geq -1$

$$6x^4 - 5x^3 + x^2 + (x+1)^2 \geq 0$$

$$x^2(6x^2 - 5x + 1) + (x+1)^2$$

$$4000 | 10 = 5 \cdot 2$$

$$400 | 10 = 5 \cdot 2$$

$$40 | 10 = 5 \cdot 2$$

$$7 \quad 7$$

$$5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \quad 5^3 \cdot 2^3 \cdot 7 = 4000$$

3 цифры 5, 3 цифры 2, 1 цифра 7, 1 цифра

$$1) \quad 4 \cdot 5 = 20$$

$$-125 + 80 + 25 = -20$$

$$9 + 20$$

$$x_1 = \frac{-3 + 4}{2} = 2$$

$$x_2 = -5$$

$$x_3 = 3$$

$$x^2 + 3x - 10 = (x+5)(x-2)$$

$$24 + 25 - 48 = 6$$

$$\frac{1}{2} (x+5) \sqrt{x^3 - 16x + 25} = (x+5)(x-2)$$

$$2x - 4 = \sqrt{x^3 - 16x + 25}$$

$$24 - 36 + 9 = 0$$

$$4x^2 - 16x + 16 = x^3 - 16x + 25$$

$$x^3 - 4x^2 + 9 = 0$$

$$x^3 - 16x + 25 \geq 0$$

Заметим, что $x=3$ является корнем

$$(x-3)/(x^2 - x - 3) < 0 \quad D = 1 + 12 = 13$$

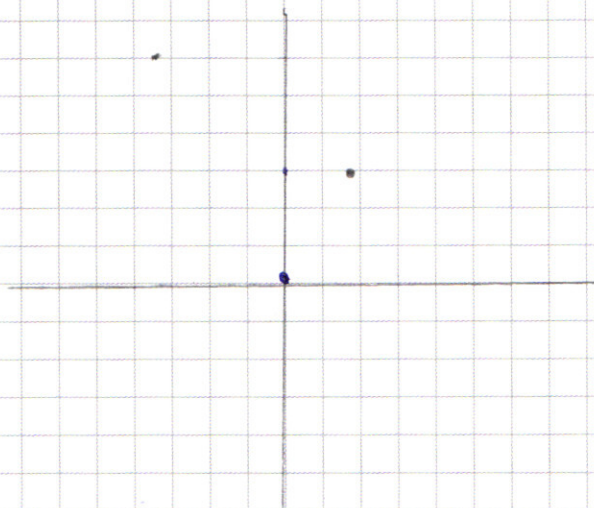
$$x^3 - x^2 - 3x - 3x^2 + 3x + 9 = x^3 - 4x^2 + 9 = 0$$

$$x_2 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$x_3 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$$

$$\sqrt{2} = 2_1$$

$$\sqrt{48} = 2\sqrt{12} = 2_2$$



$$2\sqrt{2} \pi$$

$$x^3 - 16x + 25 \geq 0$$

$$x^2(1 -$$

$$x^3 + 9x - 25x + 25$$

$$2a + 2b = 3b$$

$$0,24a^2 = 6$$

$$2a = 5b \Rightarrow b = 0,4a$$

$$6 = (a - b)b = 0,6a \cdot 0,4a = 6$$

$$x = 1 \quad y = 1$$

$$6x^4 - 5x^3 - 5x^2 - 3x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$6x^4 - 5x^3 - 5x^2 - 3x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$6x^4 - 5x^3 - 5x^2 - 3x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!5!} = 56 - 80$$

$$C_8^3 = 56$$

$$b(x+y) = 2(x+y)$$

$$bx = 2y$$

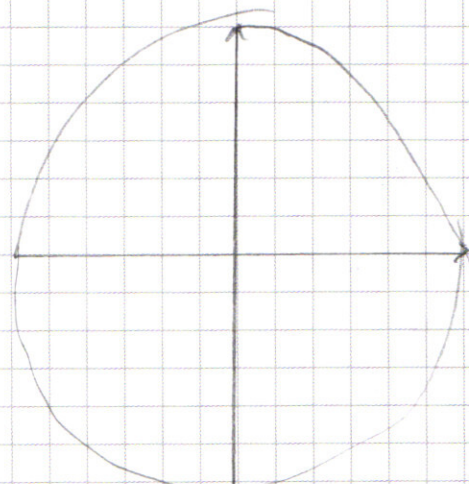
$$by = 2x$$

$$a = 1$$

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{x}$$

$$a = 1 \quad a = -1$$

$$b = 2 \quad b = 2$$



$$-2x + 6y = 1$$

$$6x - 2y = 1$$

$$4x + 4y = 2$$

$$x + y = 0,5$$

$$-6x + 6y = -1$$

$$6x - 6y = 1$$

$$3b = 2$$

$$-2a + 2b = 3b$$

$$(a - b)b = -6$$

$$a = -1$$

$$-1/6 \cdot 5$$

$$2 = b$$

$$a = -1$$

$$\frac{(1 + \sqrt{13})^3}{8} = \frac{(1 + 2\sqrt{13})(1 + \sqrt{13})}{8}$$

$$14 + 14\sqrt{13} + 2\sqrt{13} + 26 = 40 + \frac{16\sqrt{13}}{8} = 5 + 2\sqrt{13}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x_1 = 3$ $x_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ $x_3 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$

$x^3 - 16x + 25 \geq 0$
 $-125 + 80 + 25$
 25

$(4-2\sqrt{13})/(1-\sqrt{13}) = 14+26-14\sqrt{13}-2\sqrt{13} = \frac{40-16\sqrt{13}}{8} = 5-2\sqrt{13}$

$(1+13+2\sqrt{13})/(1+\sqrt{13}) = 14+26+2\sqrt{13}+14\sqrt{13} = \frac{40+16\sqrt{13}}{8} = 5+2\sqrt{13}$

$5+2\sqrt{13} - 8 - 8\sqrt{13} + 25 \geq 0$
 $-6\sqrt{13} + 22 \geq 0$
 $22 \geq 6\sqrt{13}$
 $22^2 \geq 36 \cdot 13 \quad \checkmark$
 484

$5-2\sqrt{13} + 25 - 8 + 8\sqrt{13} \geq 0$
 $22 + 6\sqrt{13} \geq 0$

при $x \leq -1$
 $6x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 5x^3 + 6x^2 + 2x + 1 \geq 0$
 $6x^4 + 5x^3 + 5x^2 + (x+1)^2$

$7000 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 7$

$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
 ~~$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$~~
 $8!$

2525
 2255
 2552
 5522
 5252
 5225

$8 \cdot 9 \cdot 8$
 $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$
 $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$

~ 4.

Вариантов 7000 на простом множестве
 $7000 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 7$

То есть по сути... можно одним способом

Если бы у нас были 8 разных чисел количество вариантов их расстановки было бы равно $8!$. У нас же есть

2 числа повторяющиеся цифр. Возьмем одну расстановку цифр.

25252571. В исходном множестве чисел она встретится 1 раз. А

в том множестве, которое мы просим.

она встретится $6 \cdot 6 = 36$ раз [каждо

6 вариантов расставить пары двойки и

6 вариантов расставить четверки]

Поэтому исходное кол-во чисел ~~66~~

$$\frac{8!}{6 \cdot 6} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4}{6 \cdot 6} = \frac{20 \cdot 56}{36} = 1120$$

Ответ: 1120.

$$(6 + \sqrt{3})^2 + (-2\sqrt{3} + 3)^2$$

$$36 + 3 + 12\sqrt{3} + 9 + 12 - 12\sqrt{3}$$

$$60 - 24\sqrt{3}$$

$$12 + 48$$

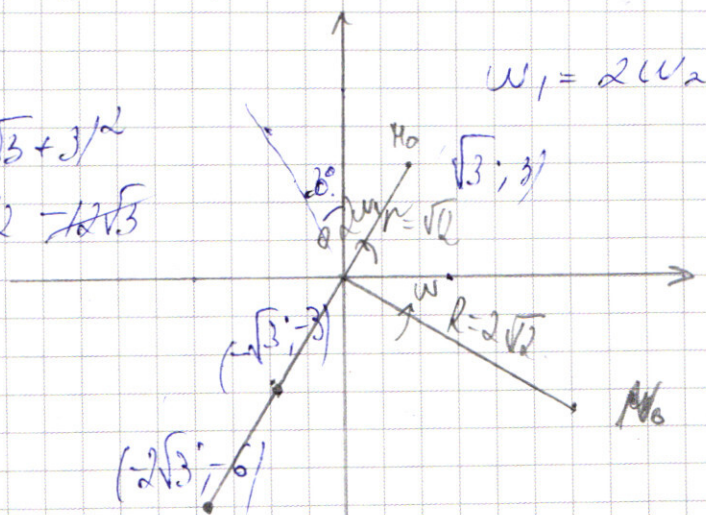
$$240^\circ = 90^\circ = \varphi_1$$

$$24 - 90^\circ = \varphi_1$$

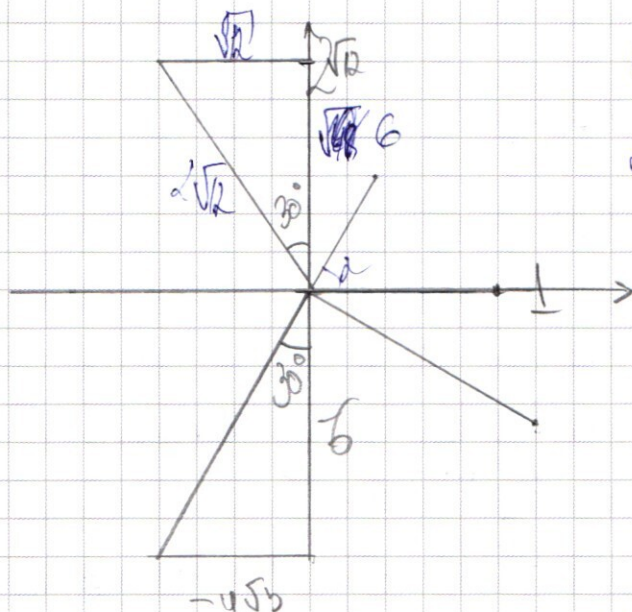
$$\varphi_1 = 90^\circ$$

$$24 - 240^\circ = \varphi_1$$

$$\varphi_1 = 240^\circ$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$L = 20^\circ$$

$$\beta = 60^\circ$$

при $k \leq 2n+1 \leq 3n^2$
опред.

при n $n+1 \geq 2n^2$
 с ~~или~~ $n+1 \leq 2n^2$
 несовместно.

при $u \in [-1; -0,5]$
выраж. нечетным.

$$6n^4 + (n+1)^2 - 5n^2(n+1) = 0$$

$$\Delta = 25x^4 - 24x^4 = x^4$$

$$(x+1)^2 = \frac{5x^2 - x^2}{12x^4} = \frac{4x^2}{12x^4} = \frac{1}{3x^2}$$

$$(x+1)^2 = \frac{62x}{12x^4} = \frac{1}{2x^4}$$

~~$$3x^4(x+1)^2 = 1$$~~

$$2n^4 / (n+1)^2 = 1$$

$$(n+1) = \frac{4n^2}{2} = 2n^2$$

$$\sqrt{n+1} = \frac{6n^2}{2} = 3n^2$$

$$u^2 - 2u - 1 = 0$$

$$2n^2 - n - 1 = 0$$

$$2 = 1 + 1 = 9$$

$$k_1 = \frac{1+3}{4} = 1$$

$$n_2 = \frac{1.3}{4} = -0.5$$

~~$$3x^6 + 6x^5 + 3x^4 - 1 = 0$$~~

$$\sqrt{2n+1} = n^2$$

$$n^2 \leq n+1 \Rightarrow n^2$$

~~$2n+1 = 2n^2$~~

$$2x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$3x^2 - x - 1 = 0$$

$$D = 1 + 12 = 13$$

$$u_1 = \frac{1 - \sqrt{13}}{6}$$

$$u_2 = \frac{1 + \sqrt{13}}{6}$$

при $n \in (1, \infty)$ отриц. бесконечн.

$$k \in \left(-0,5; \frac{1-\sqrt{13}}{6} \right)$$

выражение
при $\alpha \in \left(\frac{1-\sqrt{3}}{6}, \frac{1+\sqrt{3}}{6} \right)$

Вспомог. посылки.

при $u \in (1 + \sqrt{13}, 1)$ обрат.
атриц.

2) при $x < -1$

$$(x+1)^2 + 5x^2(x+1) + 6x^4 = 0$$

$$D = 25x^4 - 94x^4 + 6 \cdot 81 = 2x^4$$

$$(x+1) = \frac{-5x^2 \pm x^2}{2} = -2x^2$$

$$(x+1) = -3x^2$$

Врашаем при $-3x^2 \leq x+1 \leq -3x^2$. Вывод.

~~Невозможно~~ отриц. при $x+1 < -2x^2$ и

$$x+1 > -3x^2$$

$$2x^2 + x + 1 = 0$$

$$D = 1 + 8 = 9$$

не подходит

$$x_1 = \frac{-1 + 3}{4} = 0,5$$

$$x_2 = \frac{-1 - 3}{4} = -1$$

$$3x^2 + x + 1 = 0$$

$$D = 1 + 12 = 13$$

не подходит

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{6} \geq -1$$

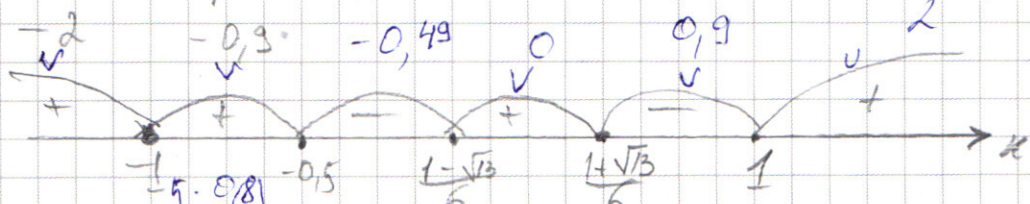
$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{6} > -1 \text{ не подходит}$$

при $x \in (-\infty; -1)$ выражение

$$-3 + 1 > -3 \cdot 9$$

$$-2 > -27$$

пример пример пример пример пример пример



$$0,01 + 5 \cdot 0,81 \cdot 0,01 + 6 \cdot 0,81 \cdot 0,81$$

$$1,9 + 5 \cdot 0,81 \cdot 1,9 + 6 \cdot 0,81 \cdot 0,81 \geq 3,6$$

$$< 4 \Rightarrow 7,695 \geq 3,6$$

$$\begin{array}{r} \times 9,5 \\ 0,81 \\ \hline 760 \\ 7695 \\ \hline 7695 \end{array}$$

Ответ: $x \in (-\infty; -0,5] \cup [\frac{1-\sqrt{13}}{6}, \frac{1+\sqrt{13}}{6}] \cup [1, 3,9 +$