

**МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ**  
**ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ**

**9 класс**

ВАРИАНТ 1

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб  
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке  $O(0; 0)$ . Муравей двигается по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках  $M_0(-1; \sqrt{3})$  и  $N_0(2\sqrt{3}; 2)$  соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров  $a$  и  $b$ , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a, \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

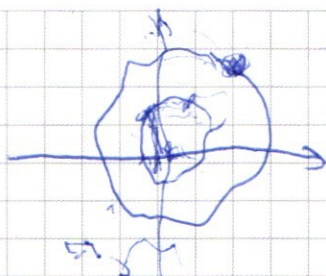
имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение  $(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$ .
4. [6 баллов] Решите неравенство  $2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$ .
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . На первой окружности выбрана точка  $C$ , а на второй – точка  $D$ . Оказалось, что точка  $B$  лежит на отрезке  $CD$ , а  $\angle CAD = 90^\circ$ . На перпендикуляре к  $CD$ , проходящем через точку  $B$ , выбрана точка  $F$  так, что  $BF = BD$  (точки  $A$  и  $F$  расположены по разные стороны от прямой  $CD$ ). Найдите длину отрезка  $CF$ .
7. [6 баллов] Решите систему

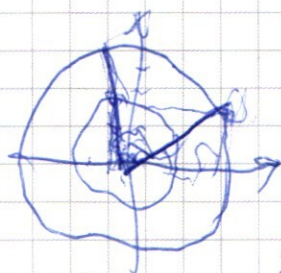
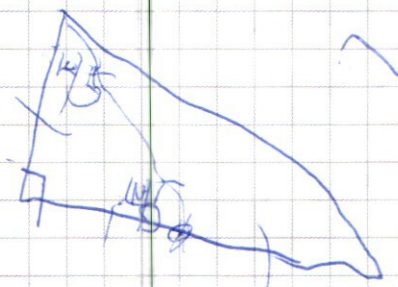
$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6, \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25. \end{cases}$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{aligned} \angle &= 4 \\ \angle &> 2 \end{aligned}$$



$$\begin{array}{r} 42 \\ + 8 \\ \hline 336 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 712235 \\ \times 705 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 880 \\ \times 8 \\ \hline 7040 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 35.8 \\ \times 0.4 \\ \hline 280 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 3(x + y) + 124 &= 9 \\ 4x + (1 + y) &= 1 \\ (x + y) &= 12 \\ 4x &= 3(x + y) \\ \frac{(x + y)}{4} &= \frac{124}{3(x + y)} \\ x + y &= 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 105 & \times \frac{1}{2} = 48 \\ 12x + 12y &= 105 \\ 4x + 4y &= 105 \\ 12x + 12y &= 105 \end{aligned}$$

$$\sqrt{x^2 + 10} = x + 2$$

$$x^2 - 4x + 10 = x^2 + 4x + 4$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

2

$$x^3 - x^2 - 8x + 6$$

$$x^3 - 2x^2$$

$$x - 2$$

$$x^2 + x - 3$$

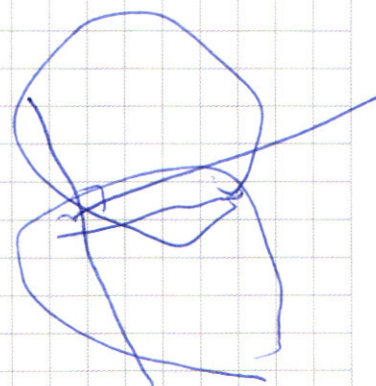
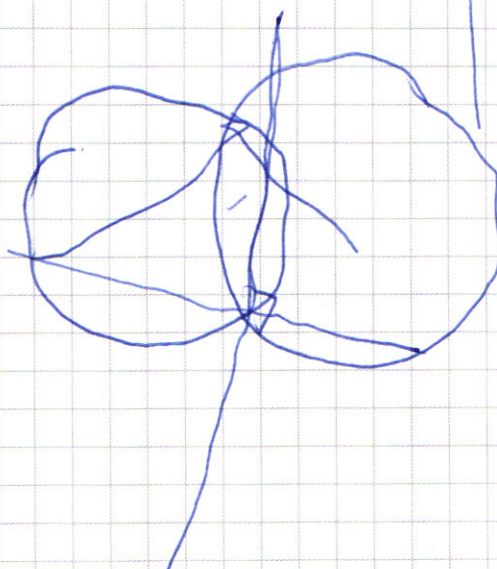
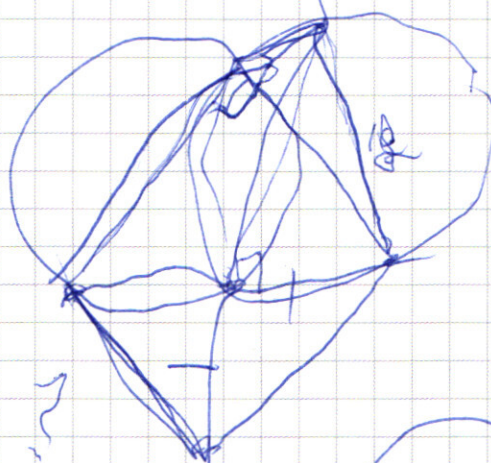
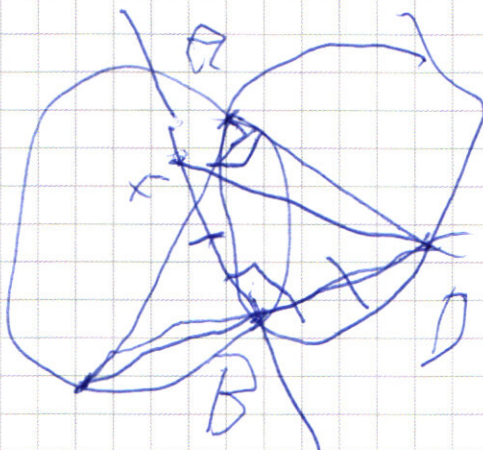
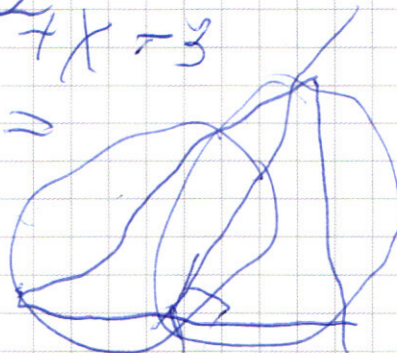
$$x^2 + x - 3$$

$$D =$$

$$x^3 - 3x + x^2 - 2x$$

$$-x + 3$$

$$(x-2)(x^2+x-3) = 0$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2 \mid x+1 \geq 0$$

$$\mid x \geq 1 \mid$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2 + 3x^2 + 1 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^2 + 4x + 2 \geq 0$$

$$x^3 \mid 2x^4 - 3x^2 + 4x + 2 \geq 0$$

$$2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 2x + 2 \geq 0$$

$$2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 2x + 2 \geq 0$$

$$2x(x^3 - 1) + 4x^2(x - 1) + 1 \geq 0$$

$$2x(x-1)(x^2+x+1) - 4x^2(x-1) + 1 \geq 0$$

$$2x(x-1)(x^2+x+1-2x) + 1 \geq 0$$

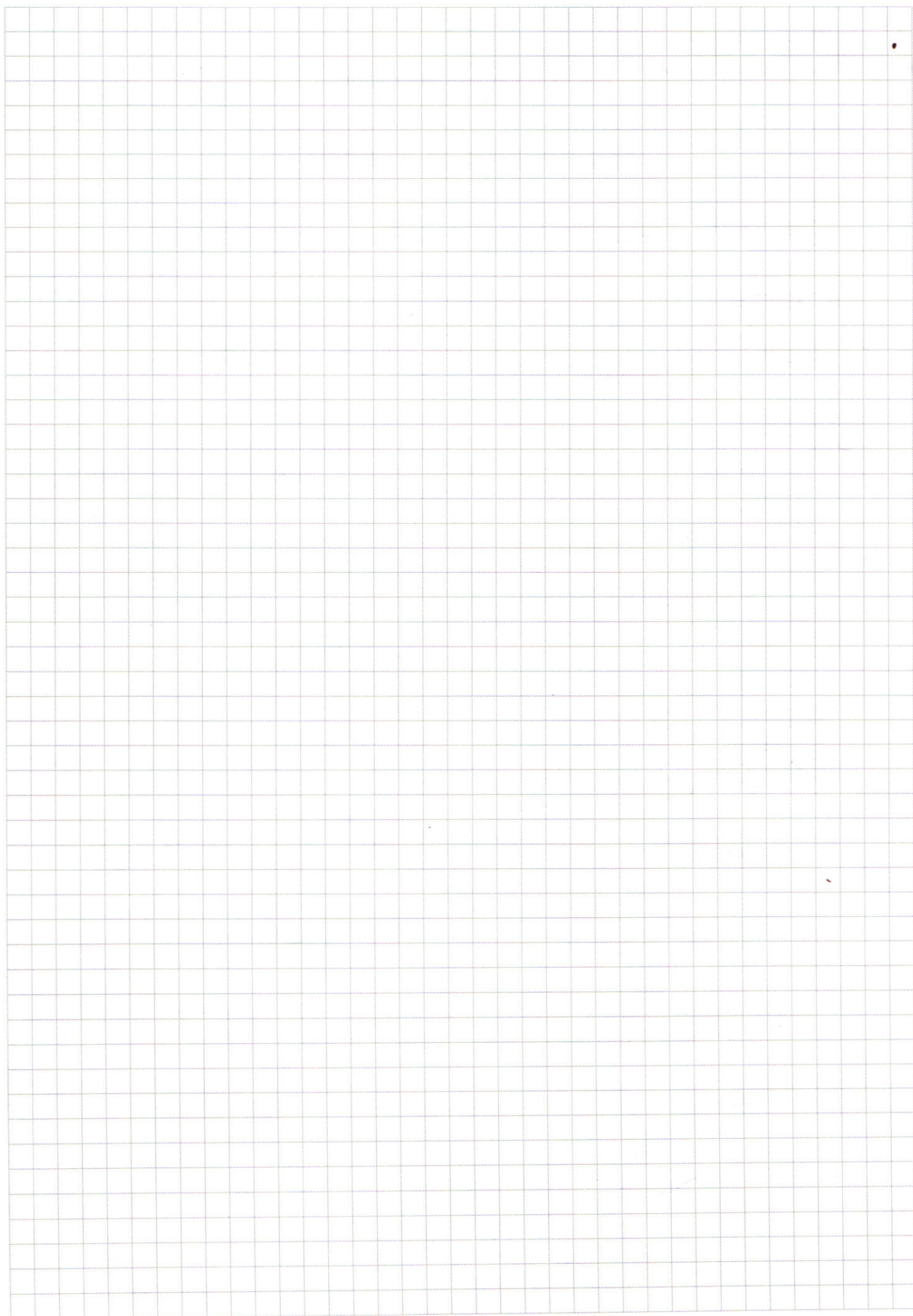
$$2x(x-1)(x^2-x+1) + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \mid x+1$$

$$2x^4 + 2x^3$$

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 2x^3 \\ \underline{+ 3x^3 - 2x^2} \\ 2x^4 + 5x^3 - 2x^2 \\ \underline{- 2x^3 - 2x^2} \\ 3x^3 - 4x^2 \end{array}$$

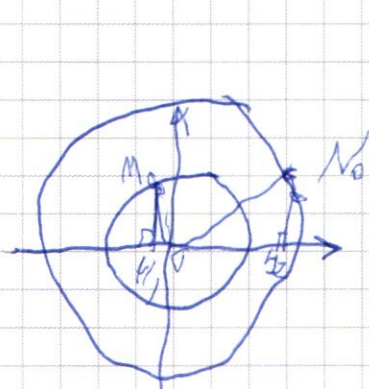
$$2x^3 + x^2 - 3x + 1$$



☐ черновик    ☐ чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Замечание  
Каждый из нас имеет право  
на свою точку зрения  
Значит, не следует  
отрицать чужую точку зрения  
и наоборот

Будем считать, что для малых  $\epsilon$   $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$  и  $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$  и  $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$

сам из работ  
привел  $\alpha$   $\pi$   
— это как будто граф

будет 4 метода работы,  $200 \times 100 \times 100 \times 100$

270  $M_f < H_2ON_2 = CO, H_2O, 300$

Or, for:  $\sqrt{0} (2, 2)$ ,  $\sqrt{0} (-4, 0)$ ,  $\sqrt{0} (\sqrt{2}, -2)$

$$N_0(2\sqrt{3}; 2) \geq N_{0, k} = 2$$

$$C_{1, N_0} = \sqrt{\frac{15}{32} \cdot 72^2} = 4$$

$$A \text{ s/n } < N_{OH}/2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_{OH} \text{ f/2} < 30 \text{ (K, K' - opp.)}$$

$$\Delta \text{ONaH}_2 \approx 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

$$M_0(-1, \sqrt{5}) \Rightarrow OH = 1$$

$$\cos \angle H_1 O M_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$c_{H,0} M = G O \int_{\Sigma_H} H, \sigma_H - d\Phi_H$$

$$\angle M + \angle N = 180^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

$$OM_e = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$1480 \times \sqrt{5} = 7 \cdot 2^3 \cdot 5^2$$

Рассмотрим случаи:

1) в числе : 7 2 2 2 5 5 // в каком-то порядке

$$\# \text{ чисел} : C_3^1 \cdot C_2^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 = 8 \cdot 3 \cdot 6 = 1680$$

2) в числе : 7 4 2 5 5 11

$$\# \text{ чисел} = C_8^1 \cdot C_7^1 \cdot C_6^1 \cdot C_5^2 \cdot C_3^2 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 10 = 3360$$

3) в числе : 7 6 5 5 11 11

$$\# \text{ чисел} = C_8^1 \cdot C_7^1 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 = 8 \cdot 7 \cdot 15 = 840$$

Ответ: 4880

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a & \sqrt{a} \\ 4bx + (a+b)y = 1 \end{cases}$$

Заметим, что  $k \sim 1$  в 1-м уравнении  $\sim 0$  в 2-м раз  
мы можем, так же во 2-м, умножить  
сделаем так, чтобы при  $y$  сократилось, а при  $x$  — нет  $\Rightarrow$   
предположим, что

$$\begin{cases} 3(a+b) = 4b \\ 12k = (a+b)b \\ \frac{b+b}{4} = \frac{4}{(a+b)} \end{cases}$$

$$a+b = 4$$

$$2) a+b = -4 \Rightarrow a = -4-b$$

$$\begin{cases} 12x + 12y = -4-b \\ 4bx - 4by = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x - 12y = -4-b \\ 4bx - 4by = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x - 12y = -4-b \\ 4bx - 4by = 1 \end{cases}$$

$$\frac{b}{3} = \frac{1}{4+b}$$

$$4b(b+4) = 3$$

$$4b^2 + 16b - 3 = 0$$

$$b_1 = -4 - 2\sqrt{5}$$

$$b_2 = -4 + 2\sqrt{5}$$

$$1) a+b = 4 \Rightarrow a = 4-b$$

$$\begin{cases} 12x + 12y = 4-b \\ 4bx + 4by = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x + 12y = 4-b \\ 4bx + 4by = 1 \end{cases}$$

$$\frac{b}{3} = \frac{1}{4-b}$$

$$4b(b-4) = 3$$

$$4b^2 - 16b - 3 = 0$$

$$b_1 = 1; a = 3$$

$$b_2 = 3; a = 1$$

$$b_1 = 1; a = 3$$

$$b_2 = 3; a = 1$$

$$b_1 = 1; a = 3$$

$$b_2 = 3; a = 1$$

$$b_1 = 1; a = 3$$

$$b_2 = 3; a = 1$$

$$(x+3) + \sqrt{x^3-x+10} \stackrel{\sqrt{3}}{=} x^2+5x+6$$

$$x^3-x+10 \geq 0 \Rightarrow x \neq -3 \Rightarrow x \neq 2 \neq 0$$

(тогда  $6x+6 \neq 2$  по лемме)

$$\sqrt{x^3-x+10} = (x+2)$$

$$x^3-x+10 = x^2+4x+4$$

$$x^3-x^2-5x+6=0$$

$$(x-2)(x^2+x-3)=0$$

$$x_1=2$$

$$x^2+x-3=0$$

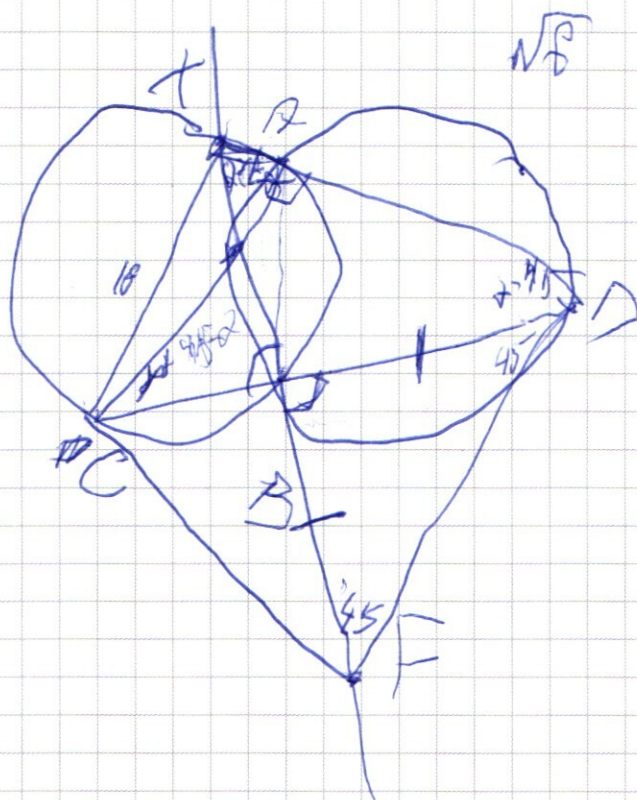
$$D=13$$

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$$

$$\text{Ответ: } x \in \left\{ 2, \frac{-1-\sqrt{13}}{2}, \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \right\}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



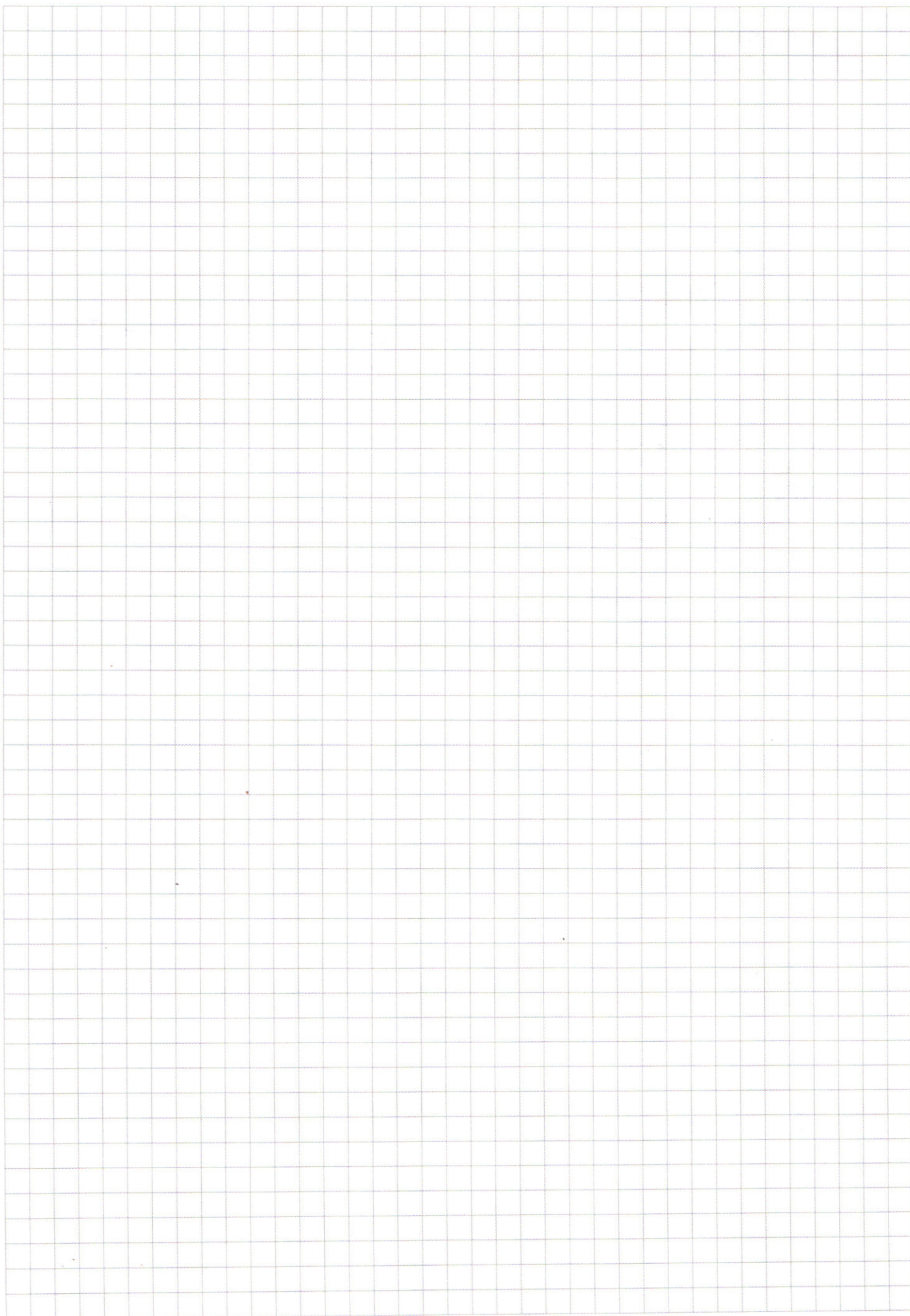
Романчик

$$\angle CBX = \angle CAX = 90^\circ$$

форм. мол  $\subset$  CX

$$cX - \text{длина п}$$

ОАХ-кадровый



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sqrt{4}$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2 |x-1| + 1 \geq 0$$

$$1) x \geq 1$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2 + 2x^3 + 1 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^2 + x^2 - 2x + 1 \geq 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 2x + 1$$

$$= 2x(x-1)(x^2 - x + 1) + 1 \geq 0$$

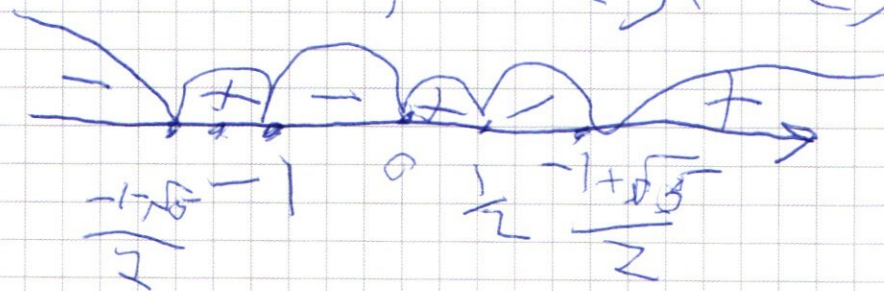
$$\Rightarrow \geq 0 \quad \geq 1$$

$$2) x < 1$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2 + 2x^3 + 1 \geq 0$$

$$2x^4 - 2x^2 + 3x^3 - 2x + 1 \geq 0$$

$$2(x+1)(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1+\sqrt{5}}{2})(x+\frac{1-\sqrt{5}}{2}) \geq 0$$



Ответ:  $x \in (-\frac{1-\sqrt{5}}{2}, -1) \cup (0, \frac{1}{2}) \cup (-\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty)$

