

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 2

ШИС

Бланк задания должен быть вложен в
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Вокруг птичьей кормушки в одной плоскости с ней по двум окружностям с одинаковой скоростью летают синица и снегирь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой кормушка (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Синица движется по часовой стрелке, а снегирь – против. В начальный момент времени синица и снегирь находятся в точках $M_0(\sqrt{3}; 3)$ и $N_0(6; -2\sqrt{3})$ соответственно. Определите координаты всех положений снегиря, в которых расстояние между птицами будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a, \\ 3bx + (a-b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

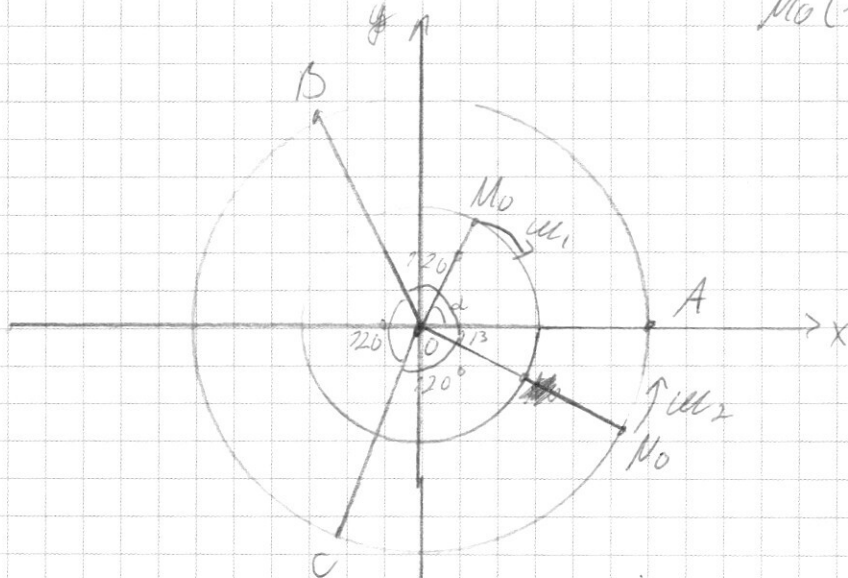
3. [4 балла] Решите уравнение $\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2|x+1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 7000. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 7 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10, \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

$M_0(\sqrt{3}; 3)$, $N_0(6; -2\sqrt{3})$



Поскольку график движения кинематический - окружности, то их координаты мы можем найти, зная радиус этих окружностей.

$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow 1) \sqrt{3 + 9} = r_1 = 2\sqrt{3}$$

$$2) \sqrt{36 + 12} = r_2 = 4\sqrt{3}$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Угловые скорости будут отличаться в 2 раза}$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2}{1}$$

Найдем углы, которые отрезки M_0O и N_0O

образуют с осью x . (α и β) с помощью

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ, \quad \sin \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = 30^\circ$$

Поскольку $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2}{1} \Rightarrow$ дуги, которые они пройдут

отличаются в 2 раза $\Rightarrow$ 1 масса в вершине

будет в т. $A(4\sqrt{3}; 0)$. Далее по ходу движения

скорость будет проходить по 240° , а скорость по 120° .

или для углов скорости отличаются в 2:1.

2 место вершины будет в т. B $(-2\sqrt{3}; 6)$

3 место вершины будет в т. C $(-2\sqrt{3}; -6)$
 $\sqrt{3}$.

$$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$$

При $x=-5$ ур примет вид $0=0$, но при подстановке в $\sqrt{x^3-16x+25}$ подкоренное выражение будет отрицательным $\Rightarrow x=-5$ не подходит, но мы разделили на него обе части.

$$\frac{1}{2}\sqrt{x^3-16x+25} = x-2$$

$$\sqrt{x^3-16x+25} = 2x-4 \quad \text{возведем обе части в квадрат.}$$

$$x^3-16x+25 = 4x^2-16x+16$$

$$x^3-4x^2+9=0$$

$$(x-3)(x^2-x-3)=0 \quad x=3$$

$$x^2-x-3=0$$

$$D=1+12=13$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$x^3-16x+25 \geq 0$, не сработает при подстановке удовлетворяют неравенству.

$$\text{Ответ: } x=3, \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4.

$$6x^4 + x^2 + 2x - 5x^3 | x+1 | +1 \geq 0$$

Рассмотрим функцию $x \geq -1$ и $x \leq -1$.

1) $x \geq -1$

$$6x^4 + x^2 + 2x - 5x^3 - 5x^2 + 1 \geq 0$$

$$6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$(x-1)(6x^3 + x^2 - 3x - 1) \geq 0$$

$$(x-1)(x+0,5)(6x^2 - 2x - 2) \geq 0$$

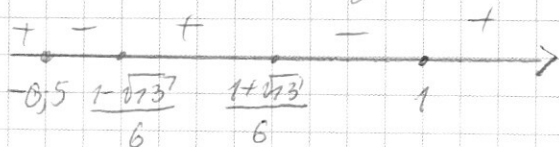
Рассмотрим $6x^2 - 2x - 2 = 0$

$$D = 4 + 48 = 52$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{52}}{12} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{6}$$

$$(x-1)(x+0,5)\left(x - \frac{1+\sqrt{13}}{6}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{13}}{6}\right) \geq 0$$

Решим методом интервалов.



$$x \geq -1 \Rightarrow x \in [-1; -0,5] \cup \left[\frac{1-\sqrt{13}}{6}; \frac{1+\sqrt{13}}{6}\right]$$

$$\cup [1; +\infty)$$

2) $x \leq -1$ ур. прим. выш.

$$6x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 12x + 1 \geq 0 \quad \text{на промежутке } (-\infty; -1]$$

$5x^3$ убывает медленнее чем возрастает $6x^4$, а

$2x$ убывает медленнее чем возрастает $6x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ это неравенство всегда будет правдой верно $\Rightarrow x \in (-\infty; -1]$

Ответ: $x \in \mathbb{R} \setminus \left(\left(-\infty; -1 \right] \cup \left[\frac{1-\sqrt{13}}{6}; \frac{1+\sqrt{13}}{6} \right] \cup [1; +\infty) \right)$

№ 6.

Задача: $|x+y+5| + |x-y+5| \leq 10$. Значит будет четыре случая.

1а) $x+y \geq -5$; ~~$x+y$~~ $x-y \geq -5$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq -x-5 \\ y \leq x+5 \end{cases}$$

2а) $x+y \geq -5$; $x-y \leq -5$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} y \leq 5 \\ y \geq -x-5 \\ y \geq x+5 \end{cases}$$

3а) $x+y \leq -5$; $x-y \geq -5$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} y \geq -5 \\ y \leq -x-5 \\ y \leq x+5 \end{cases}$$

4а) $x+y \leq -5$; $x-y \leq -5$

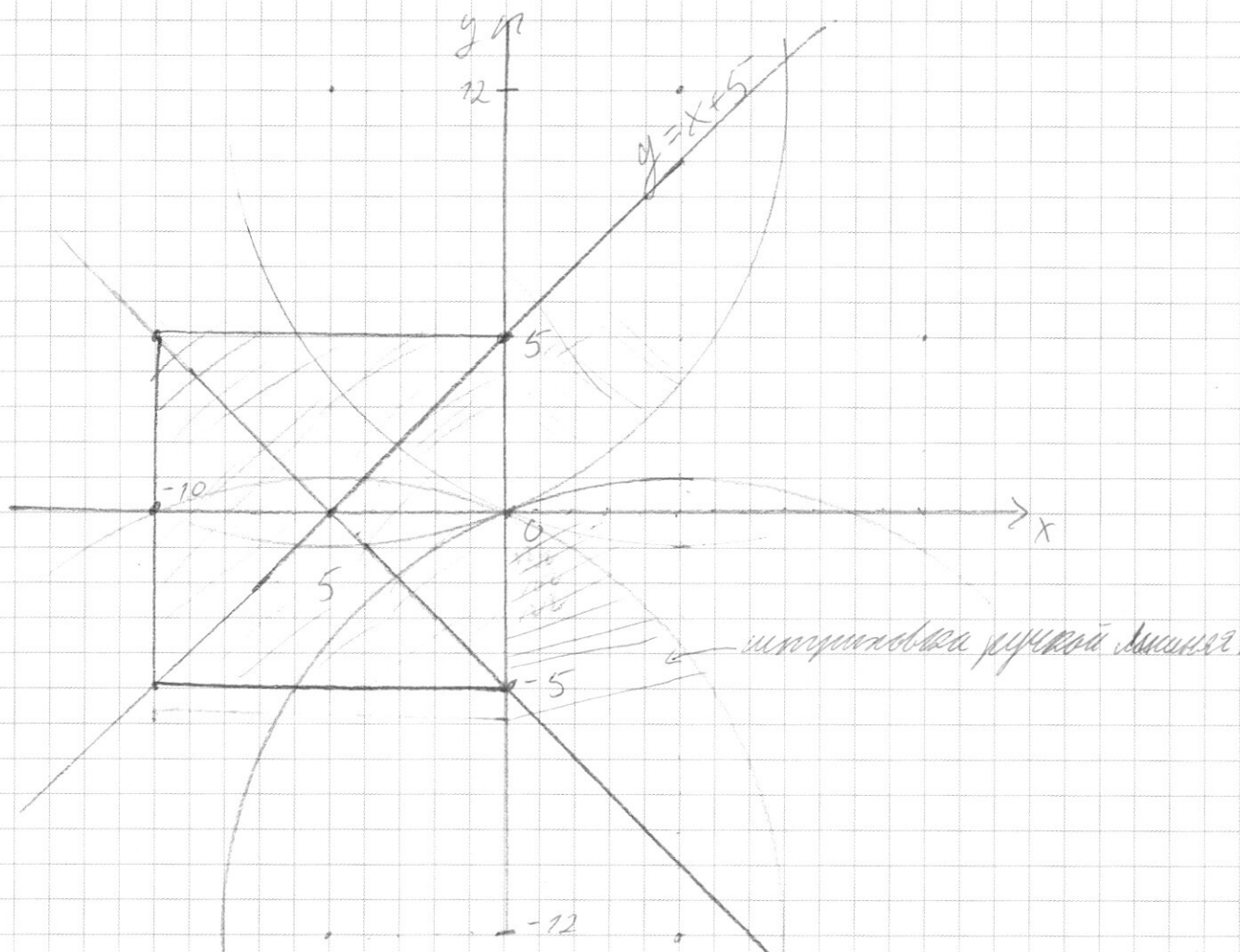
$\Downarrow$

$$\begin{cases} x \geq -10 \\ y \leq -x-5 \\ y \geq x+5 \end{cases}$$

$(x-5)^2 + (y-12)^2 = 169$ - это уравнение окружности с радиусом 13, достаточно построить его в 1 координатной плоскости, а затем отразить его в ось симметрии.

Построим уравнение и найдем общие точки (см. шаг 5)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Все окружности касаются в одной точке $O(0;0) \Rightarrow$ есть
только одно решение $(0;0)$
ответ: $(0;0)$.

8
№5.

Для того чтобы произведение чисел было значимым
числа должны быть равно 4000, оно должно состоять
из цифр: 4, 2, 5, 2, 5, 2, 5, 1. Таким образом мы
должны найти количество вариантов расположения
этих чисел на восьми местах.

Найдем количество вариантов расположения цифр
1 и 4; это равно $A_8^2 = A_8^2 = \frac{8!}{6!} = 56$.

Далее найдем количество способов разместить
дважды это равно $C_6^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{6} = 20$

Итак, мы записали возможные места.

Итого: $A_8^2 \cdot C_6^3 = 56 \cdot 20 = 1120$

Ответ: 1120 разн. чисел.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sqrt{2}$

$\sqrt{15} = 3,5$

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a \\ 3bx + (a-b) \cdot 6y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{1-3bx}{(a-b) \cdot 6}$$

$$\frac{1+3,5}{2} = 4,25$$

$$\frac{1-3,5}{2} = -1,25$$

$$2(a-b)x + \frac{6-18bx}{(a-b) \cdot 6} = a$$

$$x(2a-2b + \frac{6-18bx}{(a-b) \cdot 6}) = a \quad a \neq b, b \neq 0$$

$$\begin{cases} 2a-2b + \frac{6-18bx}{(a-b) \cdot 6} = 0 \\ a=0 \end{cases}$$

$$-2b + \frac{6}{-b^2} = 0$$

$$2b^3 = -6$$

$$b = \sqrt[3]{-3}$$

$$2\sqrt[3]{-3}x + 6y = 0$$

$$y = \frac{a - 2(a-b)x}{6} = \frac{a}{6} - \frac{1}{3}ax + \frac{1}{3}bx = \frac{1}{6}a - x$$

$$\frac{1}{2}(x+5) \sqrt{x^3 - 16x + 25} = x^2 + 3x - 10 \quad x = -5$$

$$\begin{array}{r} x^2 + 3x - 10 \mid x+5 \\ x^2 + 5x \quad \mid x-2 \\ \hline -2x - 10 \\ -2x - 10 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\sqrt{x^3 - 16x + 25} = 2x - 4$$

$$x^3 - 16x + 25 = 4x^2 - 16x + 16$$

$$x^3 - 4x^2 + 9 = 0$$

$$(x-3)(x^2 - x - 3) = 0$$

$$D = 1 + 12 = 13$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 4x^2 + 9 \mid x-3 \\ x^3 - 3x^2 \quad \mid x^2 - x - 3 \\ \hline -x^2 + 9 \\ -x^2 + 3x \\ \hline -3x + 9 \\ -3x + 9 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$2x^2 - 36 + 9$$

$$2x^2 - 48 + 25$$

$$-125 + 20 + 25 = -80$$

-5 не подходит за корнем.

Ответ: $x = 3, \frac{1+\sqrt{13}}{2}, \frac{1-\sqrt{13}}{2}$



черновик



чистовик

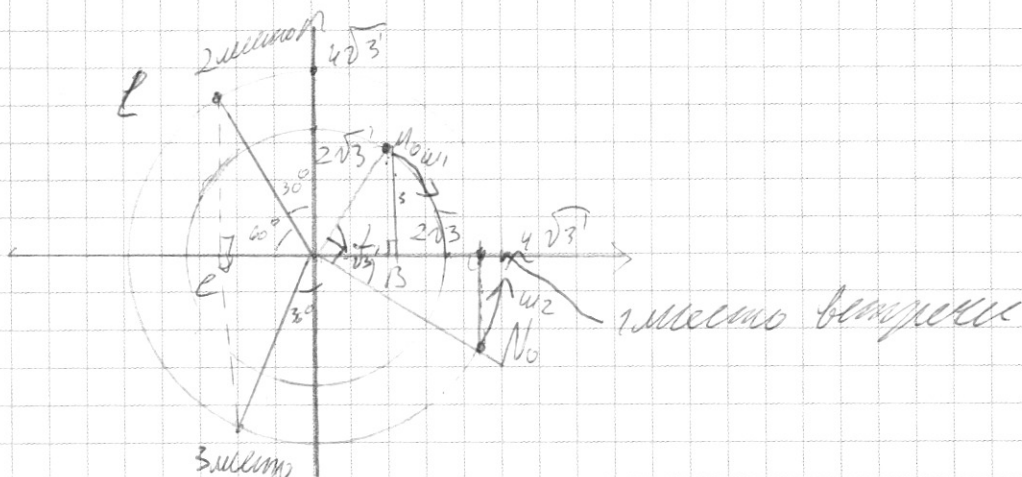
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

$\sqrt{3}$

$$240 - 180 = 60^\circ$$



$$M_3(\sqrt{3}; 3) \Rightarrow r^2 = 3 + 9 = 12 \Rightarrow r = 2\sqrt{3}$$

$$M_6(6; -2\sqrt{3}) \Rightarrow r^2 = 36 + 12 = 48 \Rightarrow 4\sqrt{3}$$

$$L = 2\pi R = 4\sqrt{3}\pi \quad e = 2\pi R = 8\sqrt{3}\pi$$

$$L/e = 2 \quad \omega_1/\omega_2 = 2$$

$$\sin \angle = \frac{3}{2} \quad \cos \angle = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle = 60^\circ$$

Ответы:

$$\cos \beta = \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} \quad \sin \beta = \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = 30^\circ$$

$$2) x = \cos 60^\circ \cdot 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$y = \sin 60^\circ \cdot 4\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4\sqrt{3} = 6$$

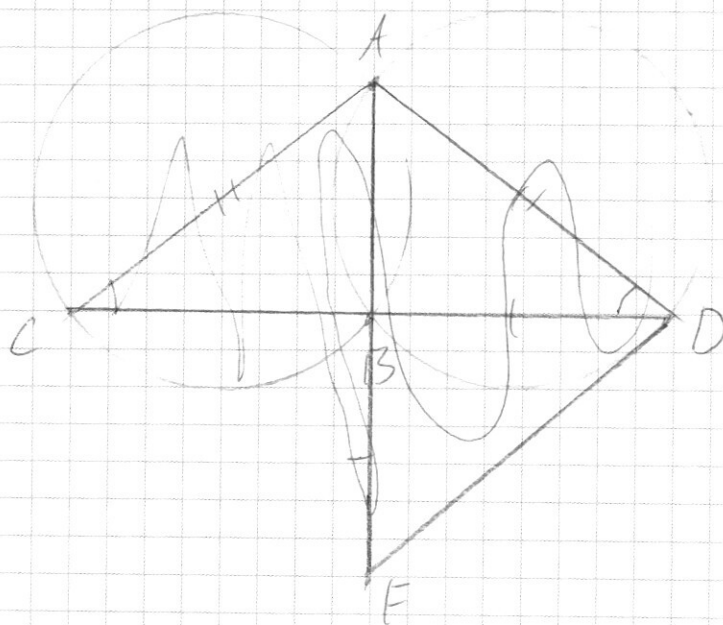
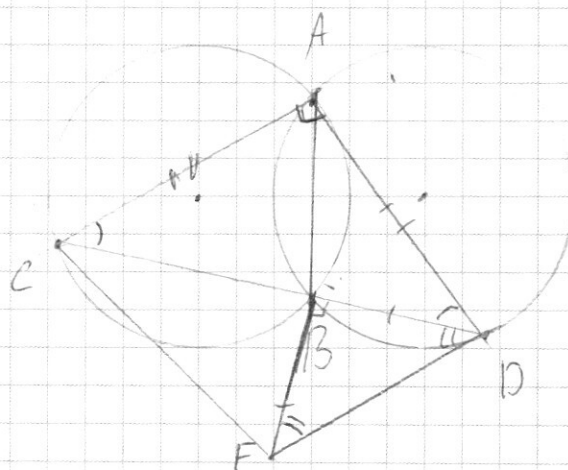
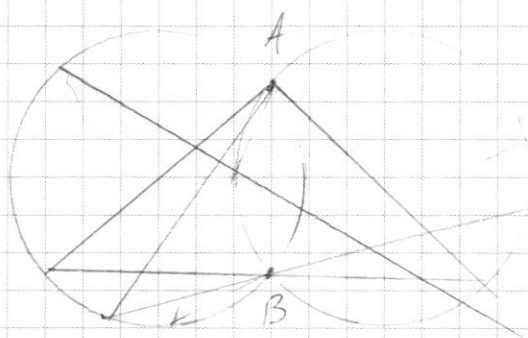
$$3) x = 2\sqrt{3}, y = 6,$$

$$1) x = 4\sqrt{3}$$

$$y = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6



н.к.

$$6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2 | x+1 | +1 \geq 0$$

$$1) x \geq -1$$

$$6x^4 + x^2 + 2x - 5x^3 - 5x^2 + 1 \geq 0$$

$$6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$(x-1)(6x^3 + x^2 - 3x - 1) \geq 0$$

$$(x-1)(x+0,5)(6x^2 - 2x - 2) \geq 0$$

$\Delta = 4 + 48 = 52$

$$(x-1)(x+0,5)(x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}) \geq 0$$

$$\Delta = \frac{1}{9} + \frac{4}{3} = \frac{13}{9} = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{3} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{6}$$

$$(x-1)(x+0,5)\left(\frac{1-\sqrt{13}}{6}\right)\left(\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right) \geq 0$$

1 -0,5 -0,75 -0,4

$$x \in [-1; -0,5] \cup \left[\frac{1-\sqrt{13}}{6}; \frac{1+\sqrt{13}}{6}\right] \cup [1; +\infty)$$

$$2) x \leq -1: 6x^4 + x^2 + 2x + 5x^3 + 5x^2 + 1 \geq 0$$

$$6x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$x(5x^2 + 2)$$

$$72525251$$

$$.....$$

$$A_2 = \frac{3!}{0!} = 56$$

$$C_6 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 56}{2 \cdot 3} = 20$$

$$20$$

$$\begin{array}{r} 6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1 | x-1 \\ \underline{6x^4 - 6x^3} \\ x^3 - 4x^2 \\ \underline{-x^3 + x^2} \\ -3x^2 + 2x \\ \underline{-3x^2 + 3x} \\ -x + 1 \end{array}$$

$$3x(x^2 - 2) + (x^2 - 1)$$

$$\frac{6}{8} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} - 1 = \frac{6 - 12 + 2 - 8}{8} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$$

$$\begin{array}{r} 6x^3 + x^2 - 3x - 1 | x+0,5 \\ \underline{6x^3 + 3x^2} \\ -2x^2 - 3x \\ \underline{2x^2 - x} \\ -2x - 1 \\ \underline{-2x - 1} \\ 0 \end{array}$$

$$\sqrt{13} \approx 3,5 \quad \frac{4,5}{6} = \frac{1,5}{2} = 0,75$$

$$-2,5 = -\frac{25}{10} = -\frac{5}{2} = -2,5$$

$$6 - 5 + 6 - 2 + 1 = 6$$

$$\frac{6}{16} + \frac{5}{8} + \frac{6}{4} + 1 + 1 =$$

$$= \frac{6 + 10 + 24 + 16 + 16}{16} = \frac{72}{16} = 4,5$$

$$6252$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times 400 \\ \hline 22400 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

24.

$$|x+y-15| + |x-y+5| \leq 10$$

$$\sqrt{(x+y+5)^2} + \sqrt{(x-y+5)^2} \leq 20$$

$$1) \quad x+y \geq -5 \quad x-y \geq -5$$

2) $x+y \geq -5$ $x-y \geq -5$

$$y \geq -5 - x \quad y \leq x + 5$$

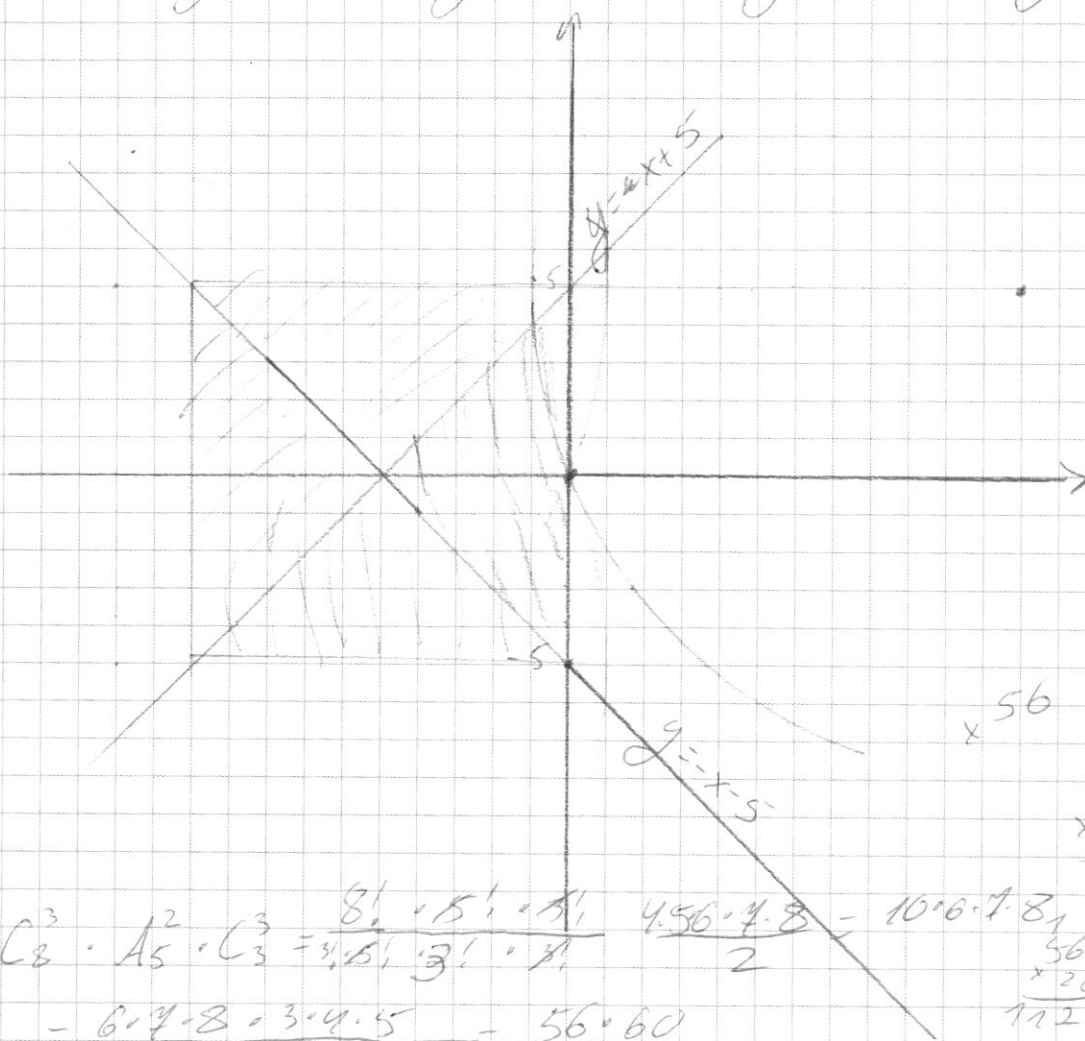
$$y \geq -x - 5 \quad y \leq x + 5$$

3) $x+y \leq -5$ $x-y \geq -5$

4) $x+y \leq -5$ $x-y \leq -5$

$$y \leq -x - 5 \quad y \leq x + 5$$

$$y \leq -x - 5 \quad \text{and} \quad y \geq x + 5$$



$$C_8^3 \cdot A_5^2 \cdot C_3^3 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{3!}{3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2} = 10 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$$

$$A_8^2 \cdot C_6^3 = \frac{8! \cdot 6!}{2! \cdot 3! \cdot 3!} = \frac{12 \cdot 60 \cdot 260}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 8$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 56 \\ \times 60 \\ \hline 3360 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times 20 \\ \hline 1120 \end{array}$$

$$|x+y+5| + |x-y+5| \leq 10$$

$$1) \begin{cases} x+y \geq -5 \\ x-y \geq -5 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x+y \geq -5 \\ x-y \leq -5 \end{cases}$$

$$y \geq -x-5 \quad y \leq x+5$$

$$2x \leq 0$$

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ x+y \geq -5 \\ y \geq -x-5 \\ y \leq x+5 \end{cases}$$

$$y \geq -x-5 \quad y \geq x+5$$

$$2y \leq 10$$

$$\begin{cases} y \leq 5 \\ y \geq -x-5 \\ y \geq x+5 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x+y \leq -5 \\ x-y \geq -5 \end{cases}$$

$$y \leq -x-5 \quad y \leq x+5$$

$$-2y \leq 10$$

$$\begin{cases} y \geq -5 \\ y \leq -x-5 \\ y \leq x+5 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x+y \leq -5 \\ x-y \leq -5 \end{cases}$$

$$y \leq -x-5 \quad y \geq x+5$$

$$-2x \leq 20$$

$$\begin{cases} x \geq -10 \\ y \leq -x-5 \\ y \geq x+5 \end{cases}$$