

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра-
боты без вложенного задания не проверяются.

- ✓ 1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Муравей двигается по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0(-1; \sqrt{3})$ и $N_0(2\sqrt{3}; 2)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

- ✓ 2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a, \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$.

- ✓ 5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

- ✓ 6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6, \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

52
$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a & (1) \\ 48x + (a+b)y = 1 & (2) \end{cases}$$

(1) и (2) – ур-я прямых $\Rightarrow$ сист. им. ∞ решений $\Leftrightarrow$ эти ур-я задают одну и ту же прямую, т.е.

1) $\frac{3(a+b)}{48} = \frac{12}{(a+b)y} = \frac{a}{1}$

$\frac{3(a+b)}{48} \cdot \frac{12}{(a+b)y} = \frac{a}{1}$

$\frac{9}{y^2} = a^2$

$a^2 y^2 = 9, \Rightarrow$

$$\begin{cases} ab = 3 \\ ab = -3 \\ a+b = 4 \\ a+b = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab = 3 \\ a+b = 4 \\ ab = -3 \\ a+b = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab = 3 \\ a+b = -4 \\ ab = -3 \\ a+b = 4 \end{cases}$$

т.е.
$$\begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \\ a = 3 \\ b = 1 \\ a = -3 \\ b = -1 \\ a = -3 \\ b = 1 \end{cases}$$

Подставив каждый из этих вариантов

$$\textcircled{52} \begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a \\ 4bx + (a+b)y = 1 \end{cases}$$

Это ур-я прямых $\Rightarrow$ если реш. ∞ , то они задают одну и ту же прямую, т.е.

$$\frac{3(a+b)}{4b} = \frac{12}{(a+b)b} = \frac{a}{1}, \text{ т.е.}$$

$$\begin{cases} 4ab = 3(a+b) \\ (a+b)ab = 12 \end{cases} \quad \text{Пусть } (a+b) = t$$

$$\begin{cases} 4s = 3t \\ ts = 12 \end{cases} \quad \text{Тогда: } \begin{cases} a+b=4 \\ ab=3 \\ a+b=-4 \\ ab=-3 \end{cases} \Rightarrow$$

Ответ: 1) $a=1, b=3$
 2) $a=3, b=1$
 3) $a=-1, b=-3$
 4) $a=-3, b=-1$

55

Пусть мн-во пр. дел. $1400 = A = \{2, 7, 2, 2, 5, 5\}$

Ⓘ В числе задействованы все элементы A , а также ещё 2 единицы, тогда общ. кол-во таких чисел $= \frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 1680$

Ⓜ Задействованы цифры 2, 7, 4, 5, 5, 1, 1, 1, таких чисел $\frac{8!}{4! \cdot 3!} = 3360$

Ⓢ Задействованы цифры 8, 7, 5, 5, 1, 1, 1, таких чисел $\frac{8!}{4! \cdot 2!} = 840$

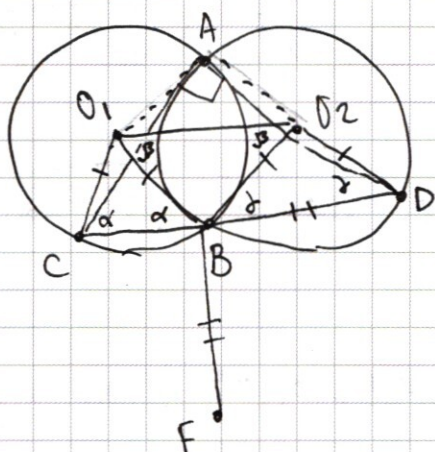
Других чисел нет, т.к. критерием были только элементы A кроме двоек

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

не получится 1-зн. число

Всего требуемых чисел $1680 + 3360 + 840 = 5880$

Ответ: 5880.



Уб

Дано: Окр. $(O_1; O_1A)$ (1) $r_1 = 9$
Окр. $(O_2; O_2A)$ (2) $r_2 = 9$

$r.C \in \text{Окр.}(1)$

$r.D \in \text{Окр.}(2)$

$\angle CAD = 90^\circ$

$FB \perp CD$ ($r.B \in CD$)

$BF = BD$

Найти: FC .

Решение

$O_1C = O_1B = O_2B = O_2D$ ($= r_1 = r_2 = 9$) $\Rightarrow \triangle CO_1B; \triangle O_1O_2B; \triangle O_2BD$ -
р/б. Обозн. $\angle O_1CB = \angle O_1BC$ за α

$\angle O_1O_2B = \angle O_2O_1B$ за β

$\angle O_2BD = \angle O_2DB$ за γ

1) $\angle O_1BC + \angle O_1BO_2 + \angle O_2BD = 180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha + \gamma = 2\beta$

2) $\angle O_1O_2B + \angle BO_2D + \angle O_2DB = 180^\circ$ (одинст. при // пр.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \beta + 180^\circ - 2\gamma + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \beta = \gamma$

Аналогично $\beta = \alpha$

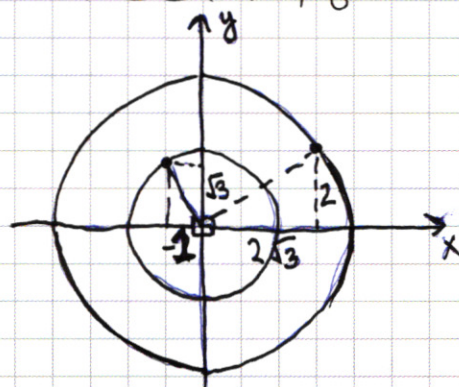
из п.1) и п.2) $\Rightarrow \alpha = \gamma = \beta$

Д.п.: $O_1A; O_2A$.

~~на~~ $\triangle A O_1 O_2 = \triangle B O_1 O_2$ (по 3 ст.) $\Rightarrow \angle A O_1 O_2 = \angle A O_2 O_1 = \beta$
 $\angle A O_1 O_2 + \angle O_2 O_1 B + \angle B O_1 C = 180^\circ$
 $= 180^\circ - 2\alpha + \beta + \beta = 180^\circ \Rightarrow CA = 2r_1 = 18$
 $DA = 2r_2 = 18$

$\triangle CAD$ - рб прямоуго. $\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 45^\circ$ и AB - высота.
 Также FB - высота $\triangle CFD \Rightarrow \triangle CAD = \triangle CFD$ (по высоте и отрезкам, на которые она делит основание) $\Rightarrow CF = CA = 18$

Ответ: 18.



51
 r (радиус окр. муравья) $= \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = 2$

R (радиус окр. жука) $= \sqrt{(2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$

Начальный угол между ними $= 90^\circ$ (т.к. жук. отстоит от Ox на 30° (т.к. $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$), а муравей аналогично на 30° отстоит от Oy).
 Пусть k° - угол, который жук проползёт до 1-го приближения, тогда муравей проползёт $2k^\circ$ (т.к. длина его окр. в 2 раза $<$, а скорость та же)
 $90 - k = 2k$

$k = 30^\circ$ - проползёт жук и будет при этом в т. $A(2; 2\sqrt{3})$

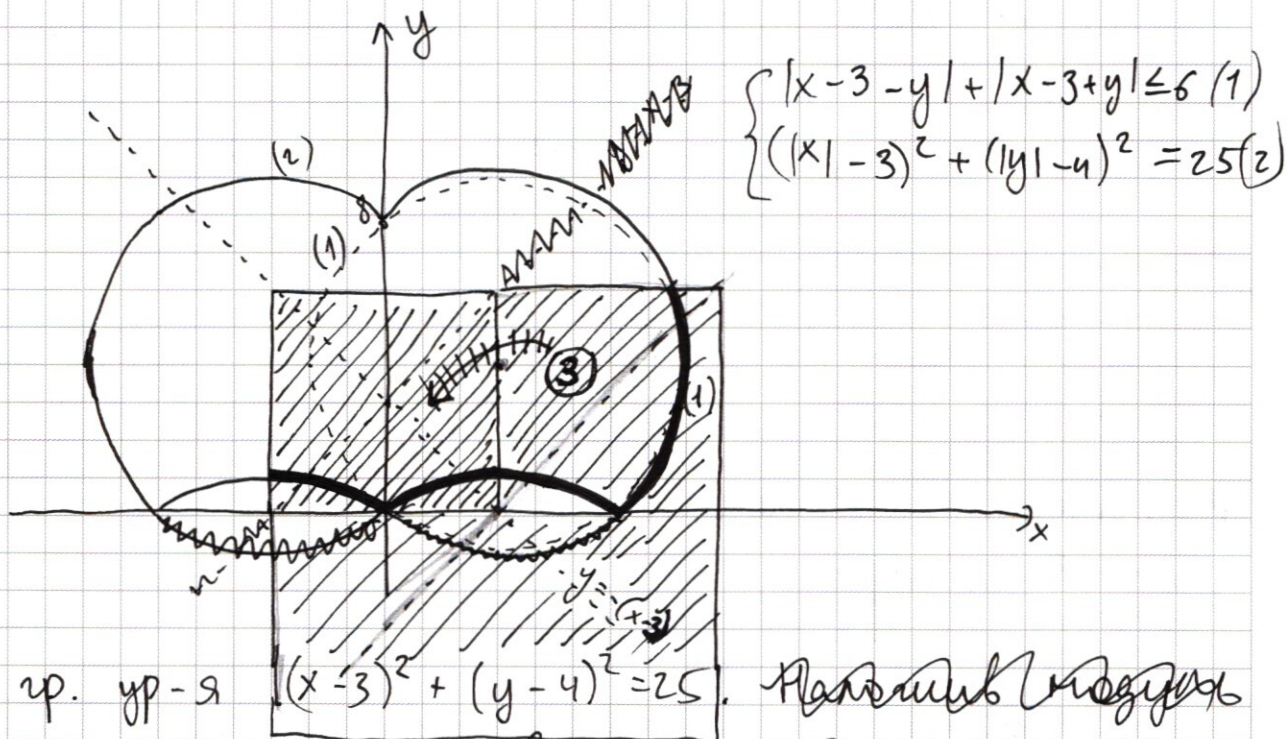
Каждая следующая встреча для жука будет отстоять от предыдущей на такое L , что
 $360 - L = 2L$
 $L = 120^\circ$ - т.е. в след. раз они встретятся,

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

когда шук будет в т. В $(-4; 0)$, а в следующий
когда он будет в т. С $(2\sqrt{3}; -2)$. Затем точки
начнут повторяться, т.к. т. А отстоит от т. С
на 120° , а т. В от т. С на 120° .

Ответ: 1) $(2; 2\sqrt{3})$
2) $(-4; 0)$
3) $(2\sqrt{3}; -2)$

57



(1) - пр. ур-я $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$. Положив модуль
на y мы отразим всё restante ниже Ox
относительно неё. Затем, положив модуль на x ,
уберём всё, Положив модуль на x и на y
получим пр. (2) ~~этого~~

$$(1) = \begin{cases} \begin{cases} x-3 \geq y \\ x-3 > -y \\ x \leq 6 \end{cases} \\ \begin{cases} x-3 \geq y \\ x-3 < -y \\ y \geq -3 \end{cases} \\ \begin{cases} x-3 \leq y \\ x-3 > -y \\ y \leq 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x-3 \leq y \\ x-3 < -y \\ x \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Добавим график этого на рисунок. (3)

Жирным выделено пересечение решений (1) и (2), т.е. решение системы.

Ответ: на рисунке жирная линия

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ \sqrt{x^3-x+10} = x+2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ \begin{cases} x^3-x+10 = x^2+4x+4 \\ x > -2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3 & (1) \\ x^3-x^2-5x+6=0 & (2) \\ x > -2 & (3) \end{cases}$$

Решением (2) является 2

$$\begin{array}{r|l} x^3-x^2-5x+6 & x-2 \\ -x^3-2x^2 & x^2+x-3 \\ \hline 4x^2-5x & \\ -4x^2+2x & \\ \hline -3x+6 & \\ -3x+6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$D=13$$

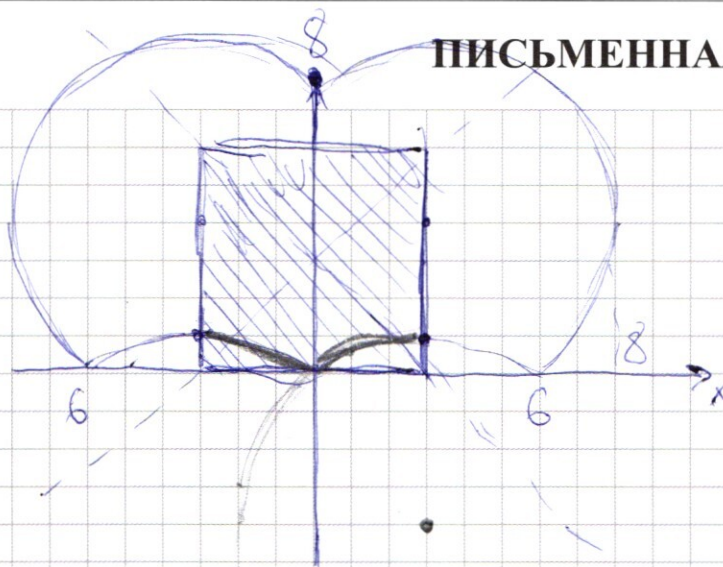
$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

при проверке подходит только $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$

$$\begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \\ x = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

Ответ: $x = -3$; 2 или $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$(x+3)^2 + (y+4)^2 = 25$$

$$y \in [0; 1]$$

$$x \in [-3; 3]$$

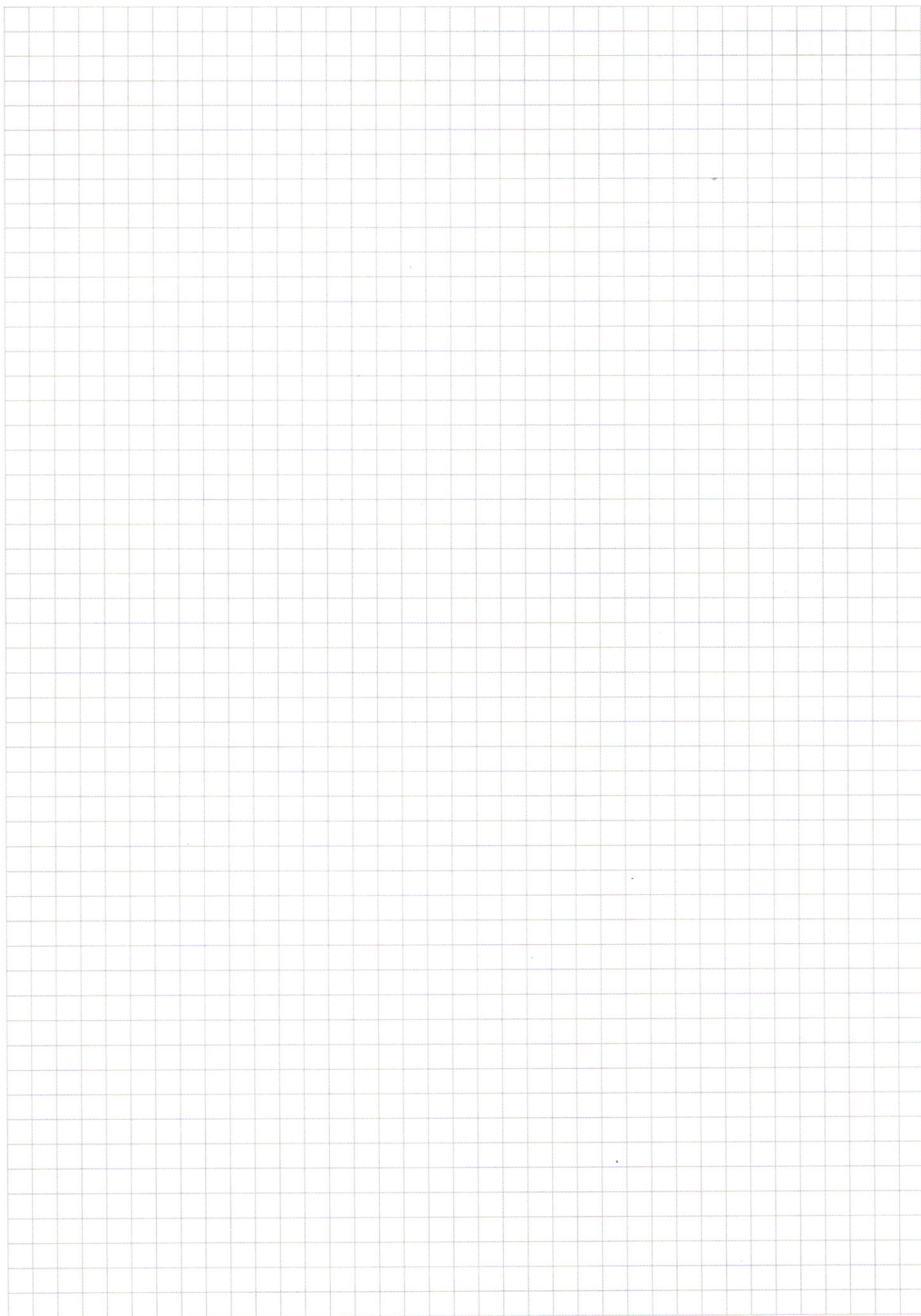
$$|x-3-y| + |x-3+y| \leq 6$$

$$\textcircled{I} \begin{cases} x-3 > y \\ x-3 > -y \\ 2x-6 \leq 6 \end{cases} \quad \begin{matrix} x-3 \leq 3 \\ x \leq 6 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x-3 > y \\ x-3 < -y \\ 2y \leq 6 \end{cases} \quad \begin{matrix} y \geq -3 \\ y \leq 3 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x-3 < y \\ x-3 > -y \\ 2y \leq 6 \end{cases} \quad \begin{matrix} y \leq 3 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x-3 < y \\ x-3 < -y \\ 2x+6 \leq 6 \end{cases} \quad \begin{matrix} x \geq 0 \end{matrix}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1400 = \overbrace{2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5}^A$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 7 & 5 \end{matrix}$$

① задействованы все цифры из мн-ва A, тогда есть ещё 2 единицы

$$\frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{8!}{2! \cdot 5!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 1680$$

② задейств. цифры 2, 7, 4, 5, 5, 1, 1, 1

$$\frac{8!}{2! \cdot 3!} = 60 \cdot 56 = 3360$$

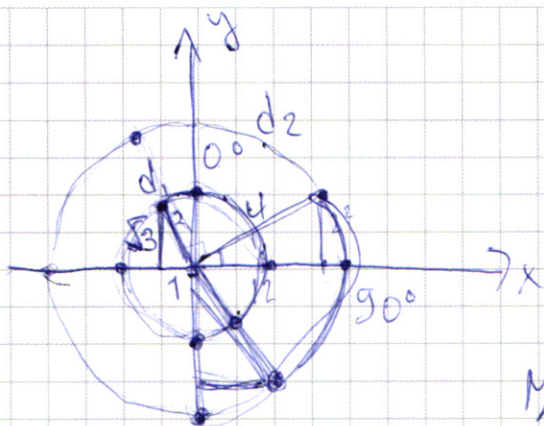
③ 8, 7, 5, 5, 1, 1, 1, 1

$$\frac{8!}{4! \cdot 2!} = 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 8 = 840$$

Итого $1680 + 3360 + 840 =$

$$= 840 \cdot 7 = 5600 + 280 = 5880$$

Отв: 5880



d_1 - длина окр. муравья
 d_2 - длина окр. жука

$$d_2 = 2d_1$$

~~М. (0; -4)~~

$$M_1(2; 2\sqrt{3})$$

$$2k = 90 + k$$

$$2 \cdot 270 = 90 + 270$$

$$2k = 90 + k$$

$$2kx = lx$$

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a & (1) \\ 4bx + (a+b)6y = 1 & (2) \end{cases}$$

$$\frac{3(a+b)}{4} = \frac{12}{(a+b)6} = \frac{a}{1}$$

$$\frac{a+b}{4} \cdot \frac{12}{(a+b)6} = a^2$$

$$\frac{3}{6} = a^2$$

$$a^2 b = 3$$

(1) и (2) - ур-я
 прямых $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ реш ∞

когда это одна и та же
 прямая

$$(1) \Rightarrow y = \frac{a - 3(a+b)x}{12}$$

$$(2) \Rightarrow y = \frac{1 - 4bx}{(a+b)6}$$

$$\frac{a - 3(a+b)x}{12} = \frac{1 - 4bx}{(a+b)6}$$

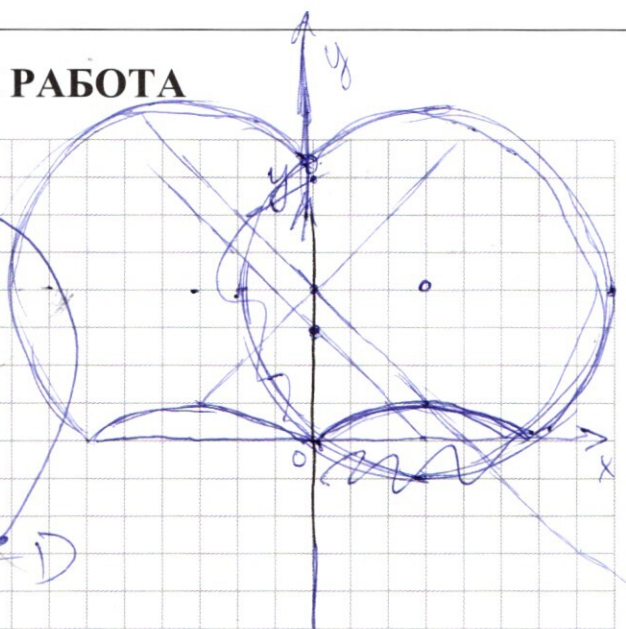
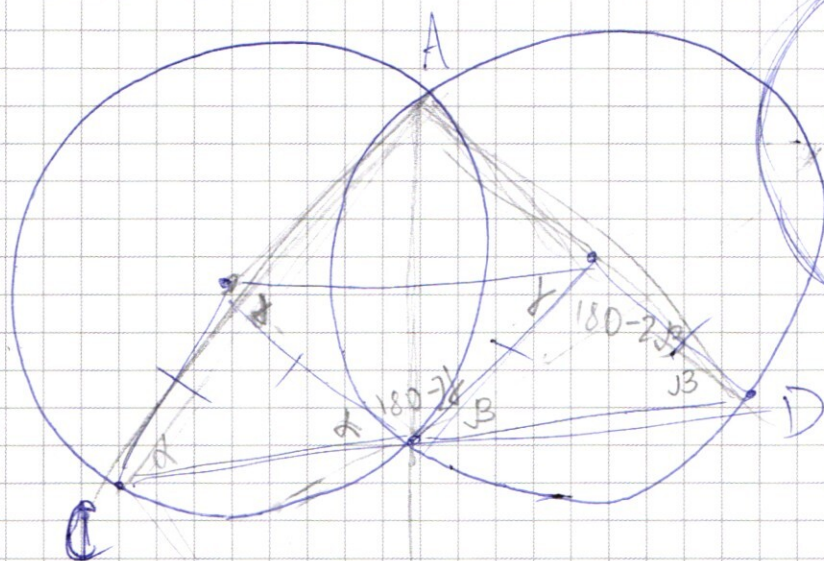
$$10x + 12y = \frac{1}{3}$$

$$4 \cdot 3x + 10y = 1$$

$$\frac{\frac{3(a+b)}{12}}{\frac{a}{-1}} = \frac{\frac{4b}{-12}}{\frac{(a+b)6}{1}}$$

$$\frac{(a+b)6}{12} = \frac{4b}{3(a+b)} = \frac{1}{a}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\alpha + \beta + 180 - 2\gamma = 180$$

$$2\gamma = \alpha + \beta$$

$$180 - \alpha - \beta + \gamma = 180$$

$$\beta = \gamma$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2 \mid x-1 \mid + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + \begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6 \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25 \end{cases}$$

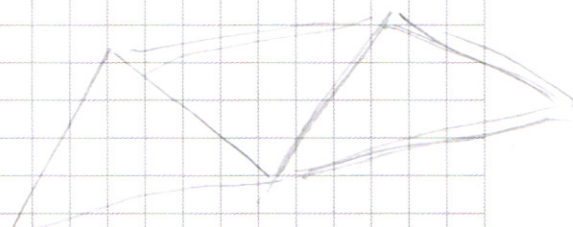
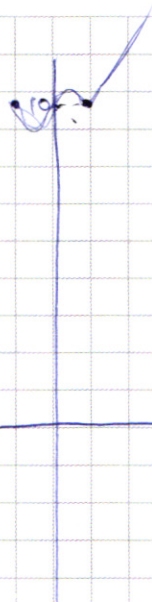
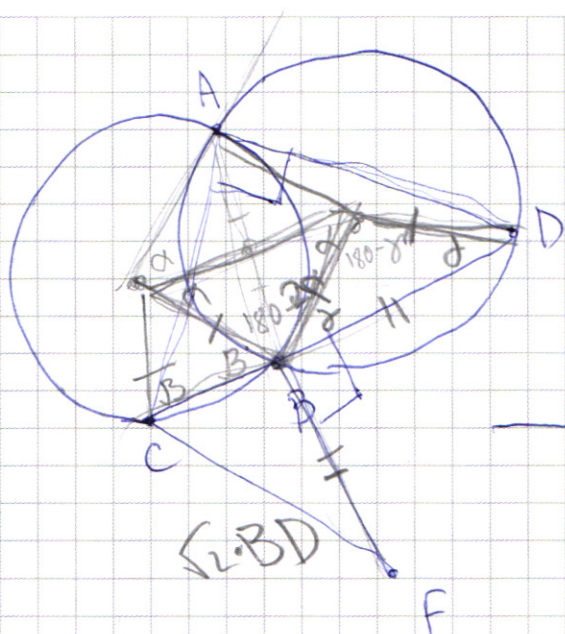
$$\begin{cases} 2x-6 \leq 6 \\ x-3 > y \\ x-3 > -y \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2y \leq 6 \\ x-3 > y \end{cases}$$

$$ab(a+b) = 12$$

$$\begin{cases} a+b = 4 \\ a+b = -4 \end{cases}$$

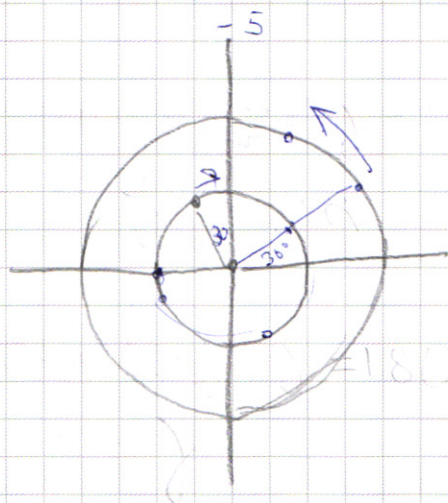
$$\begin{cases} ab = 3 \\ ab = -3 \end{cases}$$



$$x^3 - x = -10$$

$$x(x^2 - 1) = -10$$

$$\sqrt{x^3 - x + 10} = x + 2$$



$$\text{for } x_1 > x_2$$

$$x_1^3 - x_1 + 10 - x_2^3 + x_2 - 10 =$$

$$= (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) - (x_1 - x_2) =$$

$$= (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 1) =$$

$$> 0$$

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 1$$

$$90 - k = 2k$$

$$k = 30^\circ$$

Каждая ~~точка~~ следующая всегда будет для точки
через 360° 200°

$$360 - k = 2k$$

$$k = 120^\circ \text{ - т.е. точка будет в т.в. } (-4; 0)$$

До При следующем обращении

точку нужно ещё $120^\circ \Rightarrow$ он будет
при этом в $(2\sqrt{3}; -2)$. А затем точки начнут