

# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

## ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

### 9 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб  
Работы без вложенного задания не проверяются.

- ✓ 1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке  $O(0; 0)$ . Муравей движется по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках  $M_0(-1; \sqrt{3})$  и  $N_0(2\sqrt{3}; 2)$  соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

- ✓ 2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров  $a$  и  $b$ , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a, \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

- ✓ 3. [4 балла] Решите уравнение  $(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$ .
- ✓ 4. [6 баллов] Решите неравенство  $2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$ .
- ✓ 5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . На первой окружности выбрана точка  $C$ , а на второй – точка  $D$ . Оказалось, что точка  $B$  лежит на отрезке  $CD$ , а  $\angle CAD = 90^\circ$ . На перпендикуляре к  $CD$ , проходящем через точку  $B$ , выбрана точка  $F$  так, что  $BF = BD$  (точки  $A$  и  $F$  расположены по разные стороны от прямой  $CD$ ). Найдите длину отрезка  $CF$ .
- ✓ 7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6, \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25. \end{cases}$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a \\ 4bx + (a+b)y = 1 \end{cases}$$

Данная система представляет из себя систему линейных уравнений от  $x$  и  $y$ .

Система линейных уравнений имеет бесконечно много решений тогда и только тогда, когда соответствующие каждому уравнению прямые совпадают.

$$\begin{cases} y = \frac{a - 3(a+b)x}{12} \\ y = \frac{1 - 4bx}{(a+b)b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{3(a+b)}{12}x + \frac{a}{12} \\ y = -\frac{4b}{(a+b)b}x + \frac{1}{a+b} \end{cases}$$

Функции  ~~$y = ax + b$~~   $y = kx + m$  и  $y = lx + n$  заданы одну и ту же прямую тогда и только тогда, когда  $k = l$ ,  $m = n$ .

Тогда имеем:

$$\begin{cases} -\frac{3(a+b)}{12} = -\frac{4b}{(a+b)b} \\ \frac{a}{12} = \frac{1}{a+b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(a+b)^2 = 48 \\ a(a+b) = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} (a+b)^2 = 48:3 = 16 \\ a(a+b) = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b = \sqrt{16} = 4 \\ a(a+b) = 12 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} a+b = -\sqrt{16} = -4 \\ a(a+b) = 12 \end{cases}$$

$$4a = 12$$

$$a = 12 : 4 = 3$$

$$3 + b = 4$$

$$b = 4 - 3 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases}$$

Тогда мы имеем две следующие системы.

$$\begin{cases} 3(3+1)x + 12y = 3 \\ 4 \cdot 1x + (3+1) \cdot 1y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x + 12y = 3 \\ 4x + 4y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x + 12y = 3 \\ 4x + 4y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x + 12y = 3 \\ 4x + 4y = 1 \end{cases}$$

$$-4a = 12$$

$$a = 12 : (-4) = -3$$

$$-3 + b = -4$$

$$b = -4 - (-3) = -1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3(-3+1)x + 12y = 3 \\ 4 \cdot (-1)x + (-3+1) \cdot 1y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x + 12y = 3 \\ -4x - 2y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x + 12y = 3 \\ -4x - 2y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x + 12y = 3 \\ -4x - 2y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x + 12y = 3 \\ -4x - 2y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x + 12y = 3 \\ -4x - 2y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x + 12y = 3 \\ -4x - 2y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x + 12y = 3 \\ -4x - 2y = 1 \end{cases}$$

Ответ:  $(3, 1); (-3, -1)$

~ 3

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$$

$$x^2+5x+6 = (x-x_1)(x-x_2) = (x+3)(x+2)$$

$$D = 25 - 24 = 1 > 0 \Rightarrow \text{два корня}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 1}{2} \neq$$

$$x_1 = \frac{-5-1}{2} = \frac{-6}{2} = -3; \quad x_2 = \frac{-5+1}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = (x+3)(x+2)$$

$$\text{Пусть } x+3=0 \Rightarrow x=-3$$

$$x^3-x+10 \geq 0, \quad \text{от к. } \text{не} \text{ вых. под знаком корня}$$

$$(-3)^3 + 3 + 10 = -27 + 3 + 10 = -14 < 0 \Rightarrow x = -3 \text{ не является}$$

решением уравнения. Тогда разделим обе части на  $x+3$ .

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{x^3 - x + 10} = x + 2$$

$$x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \quad \text{по области знач. левой части.}$$

Тогда возведем обе части в квадрат.

$$(\sqrt{x^3 - x + 10})^2 = (x + 2)^2$$

$$x^3 - x + 10 = x^2 + 4x + 4$$

$$x^3 - x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x^3 - x^2 - 5x + 6 = x^3 - x^2 - 2x - 3x + 6 = x(x^2 - x - 2) - 3(x - 2) \neq$$

$$\neq x^2 - x - 2 = (x - x_1)(x - x_2) = (x + 1)(x - 2)$$

$$D = 1 - 4 \cdot (-1) = 1 + 4 = 5 > 0 \Rightarrow \text{два корня}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{1 \pm 2}{2} = \frac{3}{2} \neq$$

$$x_1 = \frac{1 - 3}{2} = \frac{-2}{2} = -1; \quad x_2 = \frac{1 + 3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x(x^2 - x - 2) - 3(x - 2) = x(x - 1)(x - 2) - 3(x - 2) = (x - 2)(x(x - 1) - 3) =$$

$$= (x - 2)(x^2 - x - 3)$$

$$(x - 2)(x^2 - x - 3) = 0$$

$$x - 2 = 0$$

$$x_1 = 2$$

или

$$x^2 - x - 3 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot (-3) = 1 + 12 = 13 > 0 \Rightarrow \text{два корня}$$

$$x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\frac{1 + \sqrt{13}}{2} > -2, \quad \frac{1 - \sqrt{13}}{2} > -2$$

$$\sqrt{13} < 4 \neq$$

$$\frac{1 + \sqrt{13}}{2} > \frac{1 + 2}{2} = \frac{3}{2} > 0 > -2 \Rightarrow \text{все корни подходят}$$

$$\frac{1 - \sqrt{13}}{2} > \frac{1 - 4}{2} = -\frac{3}{2} > -2$$

Ответ:  $\frac{1-\sqrt{13}}{2}$ ;  $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ ; 2.

N5

$$\dots 1400 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$$

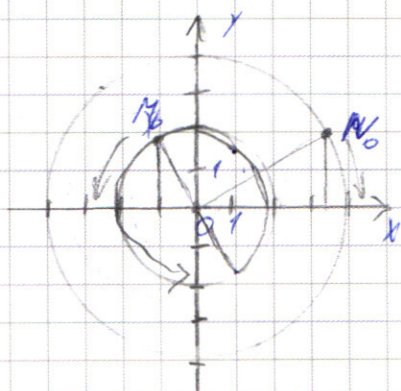
Произведение цифр равно 1400 тогда, когда число составлено из следующих наборов цифр:  
 $2; 2; 2; 5; 5; 7; 1; 1$   
 $4; 2; 5; 5; 7; 1; 1; 1$   
 $8; 5; 5; 7; 1; 1; 1; 1$   
 (другие варианты перемножения простых множ. дают число больше 10).

Из каждого набора можно получить 8-значное число 8! способами (т.к. цифра 0 не в).  
 Всего чисел  $3 \cdot 8! = 120960$  способов.

Ответ: 120960.

N1

Точка и муравей находятся на кратчайшем расстоянии между собой, когда муравей летит на град. (соед. муравья и муравей — это диаметр).  
 Найдём радиус которой окружности по уравнению.



$$x^2 + y^2 = r^2$$

Для точки:

$$r^2 = (-1)^2 + (\sqrt{3})^2 = 1 + 3 = 4$$

$$r = \sqrt{4} = 2.$$

Для муравья:

$$r^2 = (2\sqrt{3})^2 + 2^2 = 4 \cdot 3 + 4 = 16$$

$$r_{\text{м}} = \sqrt{16} = 4.$$

Найдём нач. угол и угловую скорость точки и муравья.

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\operatorname{tg}(\varphi_0)_x = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$$

$$(\varphi_0)_x = \arctg(-\sqrt{3}) = 180^\circ \neq \frac{2\pi}{3} \text{ рад}$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_0)_m = \frac{y}{x} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(\varphi_0)_m = \arctg \sqrt{3} = 60^\circ \neq \frac{\pi}{6} \text{ рад}$$

Пусть линейная скорость жука и муравья  $v$ .

Когда угловые скорости равны:

$$\omega_x = \frac{v}{2\pi r_x} = \frac{v}{2\pi \cdot 2} = \frac{v}{4\pi}$$

$$\omega_m = \frac{v}{2\pi r_m} = \frac{v}{2\pi \cdot 4} = \frac{v}{8\pi}$$

$$\frac{\omega_m}{\omega_x} = \frac{v}{8\pi} : \frac{v}{4\pi} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{муравей пройдёт в любой момент}$$

жуток времени пройдёт угол, ~~меньший~~  $\frac{2\pi}{3}$  раз

меньший угол, пройд. жуком.

$\Phi_0$  /  $\frac{\pi}{6}$  / встретит / жука / и / муравья, пусть  
против  $\Phi_0$  и встретит жука и муравья

вместе аадо пройти  $\frac{\pi}{6}$   $\frac{2\pi}{3} - \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) =$

$$= 2\pi - \frac{3\pi}{6} - \left(\frac{4\pi - \pi}{6}\right) = 2\pi - \frac{3\pi}{6} - 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \text{ (рад.)}$$

из них муравей пройдёт  $\frac{\pi}{2}$  рад то

жук. вместе а жук —  $3\pi$  рад против.

$$\Phi_0 / \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi - 3\pi}{6} = -\frac{2\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} \text{ рад.}$$

$$(\varphi_0)_x = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi + \pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \text{ (рад.)}$$

$$(x)_x = r_x \cos(\varphi)_x = 2 \cos \frac{5\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

$$(y)_x = r_x \sin(\varphi)_x = 2 \sin \frac{5\pi}{3} = 2 \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\sqrt{3} \Rightarrow (1; -\sqrt{3})$$

До конца следующей встречи мух и муравей вместе будут проходить  $2\pi$  рад, из них мух будет проходить  $\frac{4\pi}{3}$  рад.

Последовательно найдем соотв. коорд:

$$\varphi_x = \frac{5\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = \frac{9\pi}{3} = 3\pi \text{ рад} \equiv \pi \text{ рад}$$

$$x_x = 2 \cos 3\pi = -2$$

$$y_x = 2 \sin 3\pi = 0$$

$$\Rightarrow (-2; 0)$$

$$\varphi_x = \frac{5\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = \frac{9\pi}{3} = 3\pi$$

$$\varphi_x = \pi + \frac{4\pi}{3} = \frac{7\pi}{3} \text{ рад} \equiv \frac{\pi}{3} \text{ рад}$$

$$x_x = 2 \cos \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$y_x = 2 \sin \frac{\pi}{3} = 1$$

$$\Rightarrow (\sqrt{3}; 1)$$

$$\varphi_x = \frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \text{ рад}$$

— далее можно не вычислять, т.к. встреча прошла, так как была ранее.

Ответ:  $(1; -\sqrt{3}); (-2; 0); (\sqrt{3}; 1)$

№4

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2(x-1) + 1 \geq 0$$

$$a) 2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2(x-1) + 1 \geq 0$$

$$x+1 < 0 \Rightarrow x < -1$$

$$2x^4 + x^2 - 2x + 3x^3 - 3x^2 + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

Решим неравенство методом интервалов;

для чего разложим его на множители:

$$2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 2\left(x^4 + \frac{3}{2}x^3 - x^2 - x + \frac{1}{2}\right) =$$

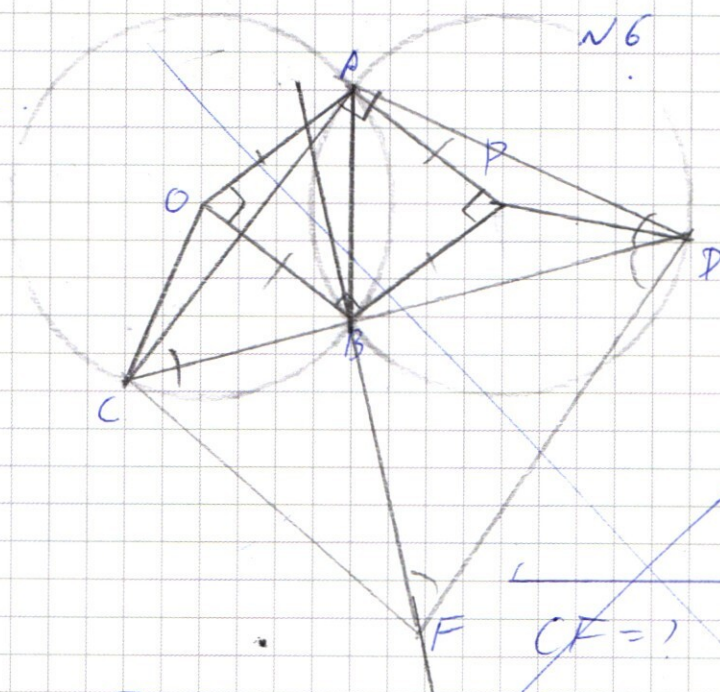
## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тогда, т.к.  $a=1$ ,  $a>0$ , ~~то~~ неравенство верно  
при любых  $x \geq 1$ .

Тогда получаем множество решений:

$$x \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[-1; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right).$$

Omben:  $(-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}] \cup [-1; \frac{1}{2}] \cup [\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; +\infty)$ .



Dano:

$\alpha_1, \omega_2$  — открыт.

$$\omega_1 \cap \omega_2 = \{A, B\}$$

$$V_1 = V_2 = 9$$

$$(1) C \in \omega_1; (1) D \in \omega_2$$

$B \in CD, \angle CAD = 90^\circ$

$$BF \perp CD, \quad BF = BD$$

Решение:

1) Пусть  $(\cdot/\cdot)$  и  $P$  — взаимно простые  $w_1$  и  $w_2$ .

Морган / АОВР - равно, т.к.  $AO = OB = BP = AP = 9$

CAOB ~~не~~ CAPR как противники <sup>как разницы</sup> улья разбега.

$\angle AOB$  и  $\angle APB$  - центральные, опр. на  $AD$

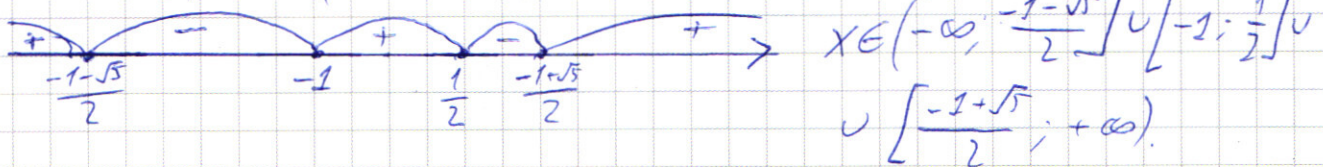
$\angle ACB, \angle ADB$  — тупые, опр. на  $AB$ .

$$\begin{aligned}
 &= 2\left(x^4 + 2x^2 - x + \frac{1}{2}x^2 - x^2 + \frac{1}{2}\right) = 2\left(x(x^3 + 2x^2 - 1) - \frac{1}{2}(x^3 + 2x^2 - 1)\right) = \\
 &= 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x^3 + 2x^2 - 1) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x^3 + x^2 - x + x^2 + x - 1) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \\
 &\cdot (x(x^2 + x - 1) + (x^2 + x - 1)) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+1)(x^2 + x - 1) \neq \\
 &\neq x^2 + x - 1 = (x - x_1)(x - x_2) = \left(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)
 \end{aligned}$$

$$D = 1 - 4 \cdot (-1) = 1 + 4 = 5 \geq 0 \rightarrow \text{два корня.}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+1)\left(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \geq 0.$$



Всё можно применяя к прямой  $(-\infty, 1]$

$$\begin{aligned}
 &\text{Отсюда} \\
 &\left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[-1; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right) \cup (-\infty; 1] = \\
 &= \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[-1; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; 1\right].
 \end{aligned}$$

$$\delta) 2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2(x-1) + 1 \geq 0, \quad x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1.$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^3 + 3x^2 + 1 \geq 0.$$

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \geq 0. \quad | : 2$$

$$\begin{aligned}
 &\cancel{x^4 - \frac{3}{2}x^3 + 2x^2 - x + \frac{1}{2} \geq 0} \\
 &x^4 - \frac{3}{2}x^3 + 2x^2 - x + \frac{1}{2} \geq 0
 \end{aligned}$$

$$x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \geq 0$$

$$x^2\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) - x\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) + \left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) \geq 0$$

$$\left(x^2 - x + 1\right)\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) \geq 0$$

$$\text{а } x^2 - x + 1 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0 \rightarrow \text{корней нет}$$

$$x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 0$$

$$D = \frac{1}{4} - 4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - 2 = -\frac{7}{4} < 0 \rightarrow \text{корней нет.}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1) \begin{cases} x-3-y \leq 0 \\ x-3+y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq x-3 \\ y \geq 3-x \end{cases}$$

$$-(x-3-y) + (x-3+y) \leq 6$$

$$-x+3+y+x-3+y \leq 6$$

$$2y \leq 6$$

$$y \leq 3$$

$$\begin{cases} y \leq 3 \\ y \geq x-3 \\ y \geq 3-x \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x-3-y \leq 0 \\ x+3+y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq x-3 \\ y \leq 3-x \end{cases}$$

$$-(x-3-y) - (x+3+y) \leq 6$$

$$-x+3+y-x-3-y \leq 6$$

$$-2x + 6 \leq 6$$

$$-2x \leq 0$$

$$x \geq 0$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq x-3 \\ y \leq 3-x \end{cases}$$

~~Ограничить~~ все полученные ограничения на график,  
построить график, где отмечены все ограничения

✓

$$\dots \begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6 \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25 \end{cases}$$

Рассмотрим все варианты раскрытия модулей  
в I неравенстве:

$$a) \quad x-3-y \geq 0$$

$$x-3+y \geq 0$$

$$\begin{cases} y \leq x-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 3-x \end{cases}$$

$$(x-3-y) + (x-3+y) \leq 6$$

$$x-3-\cancel{y} + x-3+\cancel{y} \leq 6$$

$$2x-6 \leq 6$$

$$2x \leq 12$$

$$x \leq 6$$

$$\begin{cases} x \leq 6 \\ y \leq x-3 \\ y \geq 3-x \end{cases}$$

$$b) \quad x-3-y \geq 0$$

$$x-3+y \leq 0$$

$$\begin{cases} y \leq x-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq 3-x \end{cases}$$

$$(x-3-y) - (x-3+y) \leq 6$$

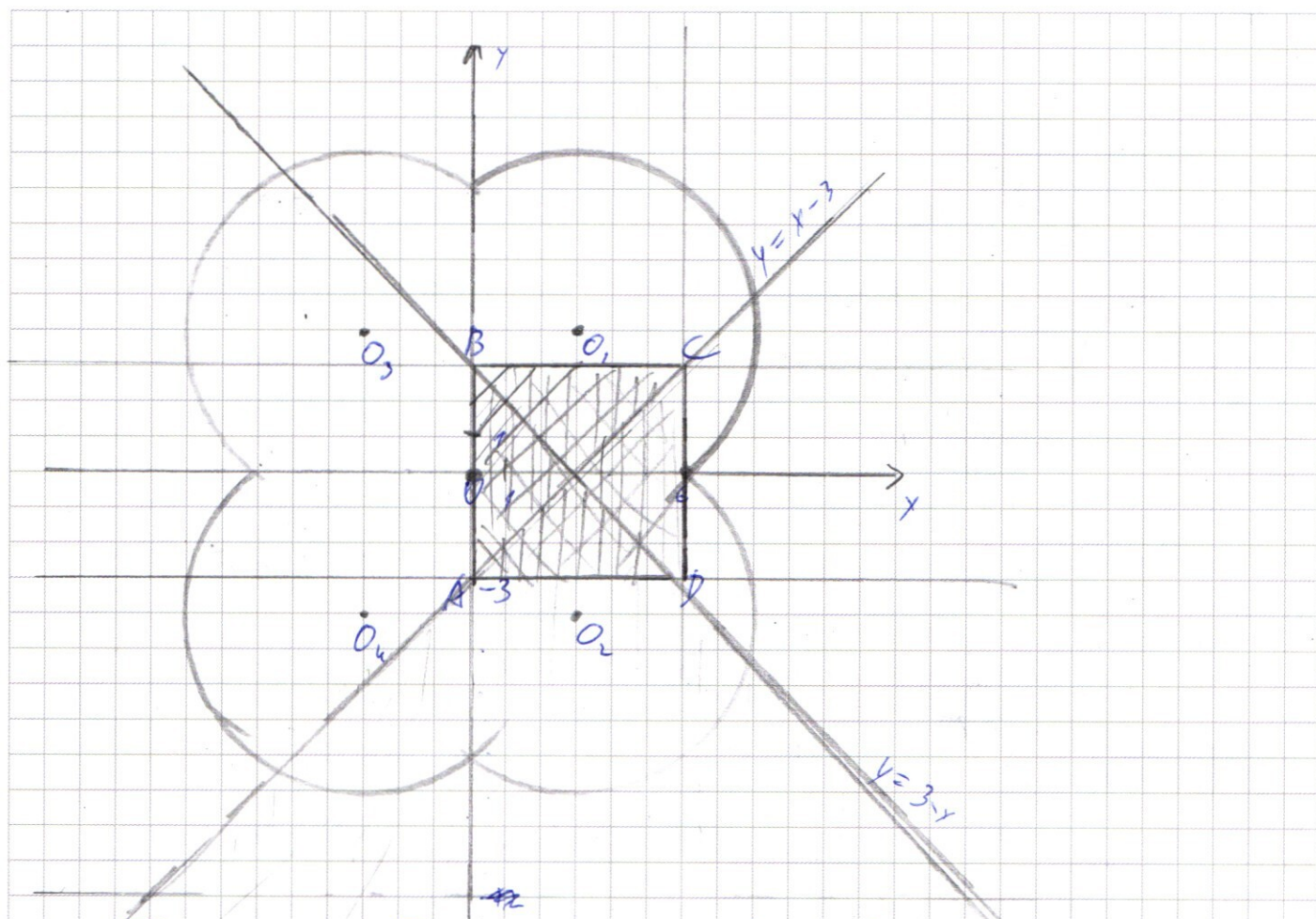
$$\cancel{x}-3-\cancel{y}-\cancel{x}+3-\cancel{y} \leq 6$$

$$-2y \leq 6$$

$$y \geq -3$$

$$\begin{cases} y \geq -3 \\ y \leq x-3 \\ y \leq 3-x \end{cases}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Планируем образовать неравенство  $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 6 \\ y \geq -3 \\ y \leq 3 \end{cases}$  как квадрат ABCD, соотв. ~~огранич.~~  $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 6 \\ y \geq -3 \\ y \leq 3 \end{cases}$  координат. Построим в этой же системе график уравнения  $(|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25$

а)  $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$$

окруж.  $O_1(3; 4)$   
 $r=5$

б)  $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$

$$(x+3)^2 + (y+4)^2 = 25$$

окруж.  $O_2(3; -4)$   
 $r=5$

в)  $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

$$(x+3)^2 + (y-4)^2 = 25$$

окруж.  $O_3(-3; 4)$   
 $r=5$

г)  $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$

$$(x+3)^2 + (y+4)^2 = 25$$

окруж.  $O_4(-3; -4)$   
 $r=5$

Как видно из графика ~~единственная~~ точки пересеч. «квадрата» ABCD и построенной фигуры

лежат на оси абсцисс ~~горизонтальной~~ и соотв. точкам

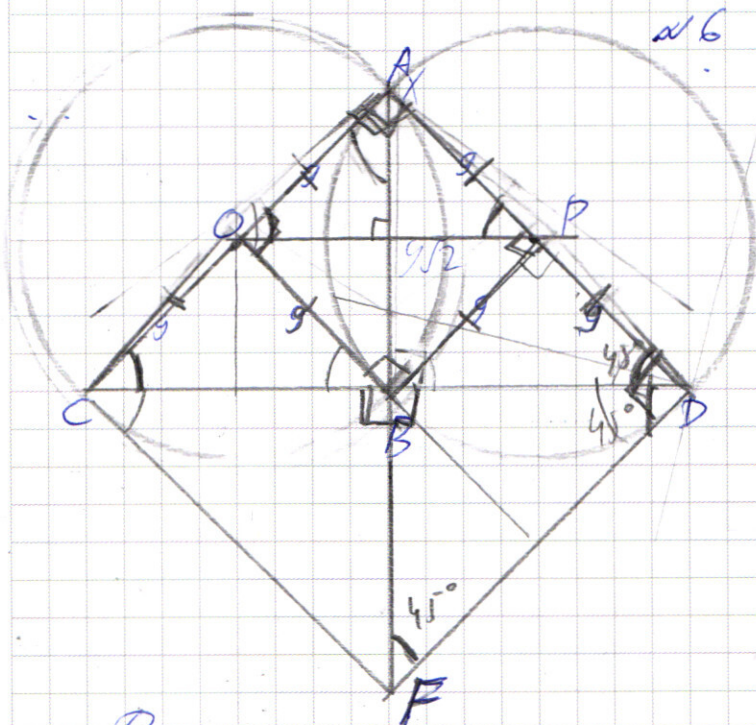
$(6; 0)$  и  $(0; 0)$

проверка:

$$(6|-3)^2 + (0|-4)^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

$$(0|-3)^2 + (6|-4)^2 = (-3)^2 + (-4)^2 = 9 + 16 = 25$$

Ответ:  $(6; 0), (0; 0)$



Дано:

$\omega_1, \omega_2$  — окруж.

$\omega_1 \cap \omega_2 = (A, B)$

$r_1 = r_2 = 9$

$(C) \in \omega_1; (D) \in \omega_2$

$BE \perp CD, \angle CAD = 90^\circ$

$BF \perp CD, BF = BD$

$CF = ?$

Решение:

Пусть  $(O)$  и  $(P)$  — центры окруж.  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .  
Тогда  $\triangle OBP$  — равноб., т.к.  $AO = BO = BP = AP = 9$   
как радиусы.

$\angle AOB = \angle APB$  как противолежащ. углы равноб.

$\angle AOB$  и  $\angle APB$  — центр. углы, опир. на  $AB$

$\angle ACB, \angle ADB$  — впис. углы, опир. на  $AB$

Тогда  $\angle ACB = \angle ADB \Rightarrow \triangle CAD$  — равнобедр.

(оба угла острые, т.к. прямые.  $\triangle CAD$  не может иметь тупых углов)

$$\angle ACD = \angle ADC = \frac{180^\circ - \angle CAD}{2} = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

$$\angle AOB = \angle APB = 2\angle ACD = 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) П.к.  $BD = BF$ ,  $\triangle FBD$  — равнобедр.  $\angle BDF = \angle BFD = 45^\circ$  по св. ост. угол равнобедр.  $\triangle$ .

$\angle BDF = \angle ADB = 45^\circ \Rightarrow BD$  — биссектриса  $\triangle ADF$ .

РРД

3)  $\triangle OPB$  — равнобедр. п.к.  $OP = OB$  как радиусы.  
 $\angle OPB = 180^\circ - 2\angle BDP =$

4) П.к.  $\angle AOB = \angle APB = 90^\circ$

$\angle AOB = 50^\circ \Rightarrow \angle OAP = 180^\circ - \angle AOB = 130^\circ - 50^\circ = 90^\circ$  по св. смеж. углов ромба.

2)  $\angle FDA = \angle FDB + \angle BDA = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$

1)  $BD = BF \Rightarrow \triangle FBD$  — равнобедр.

$\angle BDF = \frac{180^\circ - \angle FBD}{2} = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$

$\angle FDA = \angle BDF + \angle BDA = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$

$\angle FDA =$

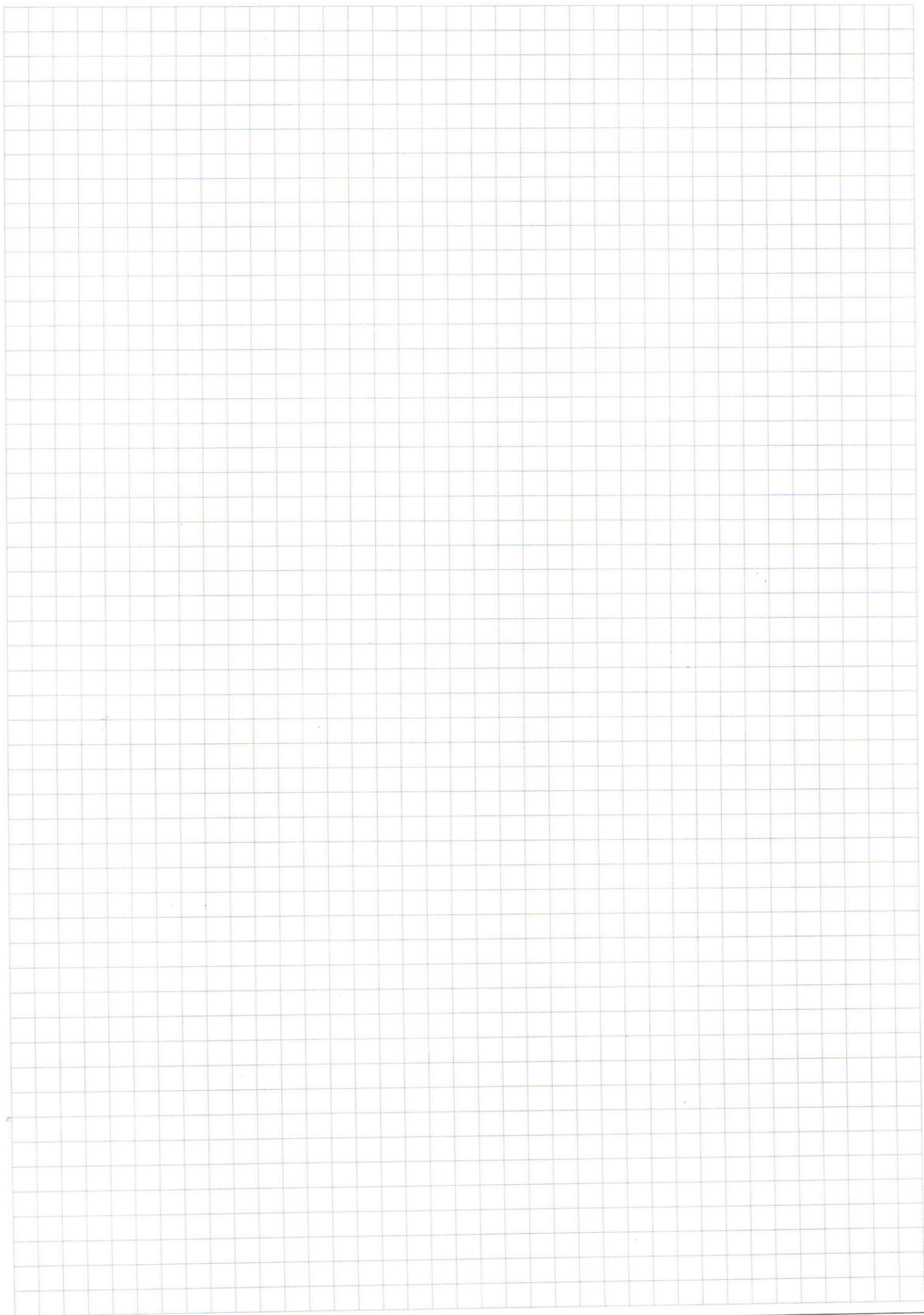
$\angle CAP = \angle ADF = 90^\circ \Rightarrow CA \parallel FD$

4) РРД

3)  $\angle CBF = \angle DBF = 90^\circ \Rightarrow \triangle CBF$  — прямоугольный.

$\angle APB = 90^\circ \Rightarrow \angle APO = 45^\circ$  и  $\angle AOB = 90^\circ \Rightarrow \angle AOP = 45^\circ$  по св. углов ромба.

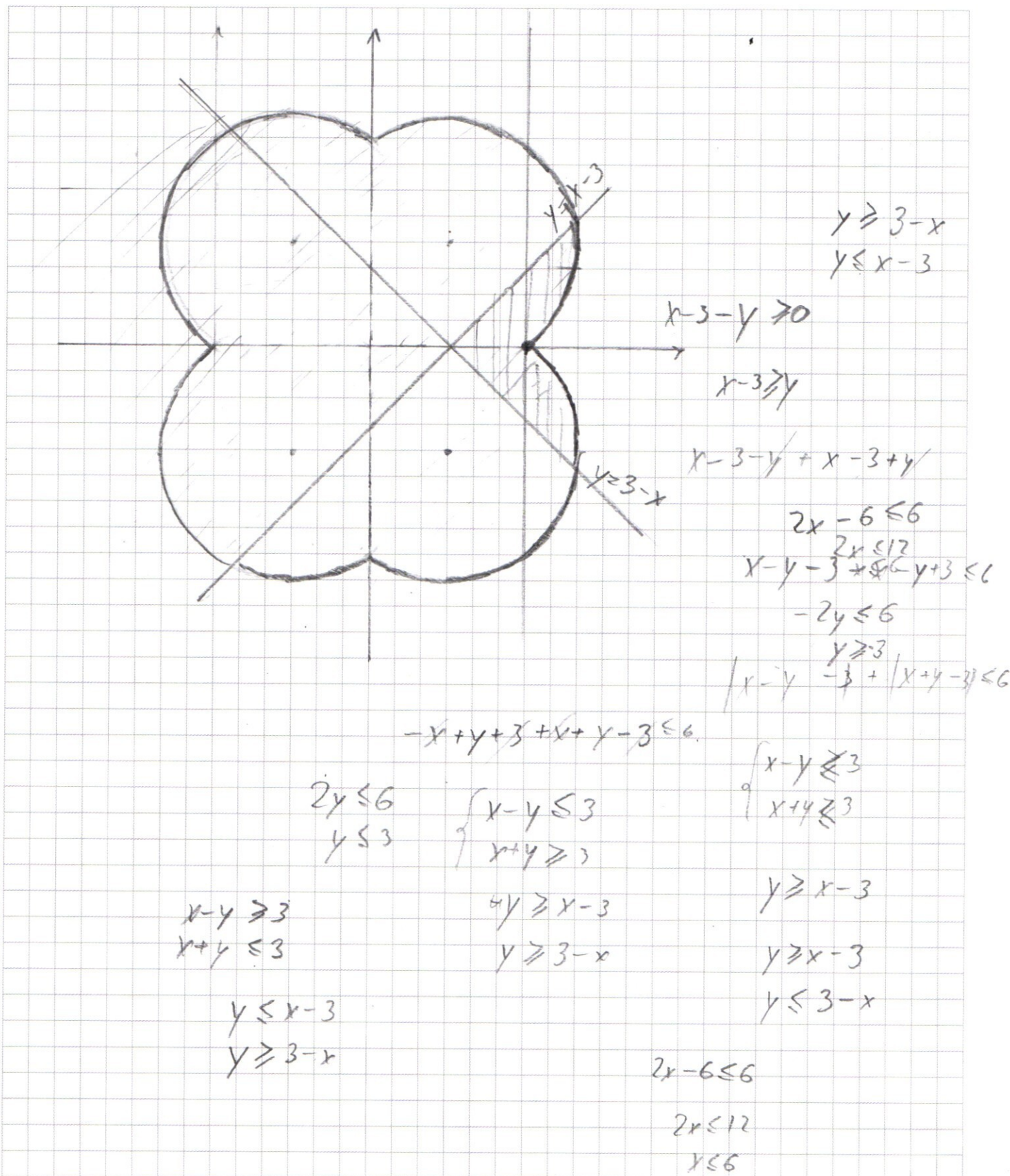
$\angle APO = \angle ADB$ ,  $\angle AOP = \angle AOD$ ,  $\angle AOB = \angle ACD = \angle AOP \sim \triangle ACD$



☐ черновик      ☐ чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 =$$

$$(x^2$$

$$2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x^3 + 2x^2 + 1$$

$$x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = x^4 - \frac{3}{2}x^3 + 2x^2 - x + \frac{1}{2}$$

$$a + c = -\frac{3}{2}$$

$$ac + b + d = 2$$

$$ad + bc = -1$$

$$bd = \frac{1}{2}$$

$$(x^2 - x + 1)(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2})$$

$$(x^2 + x +$$

$$(x^2 - x + \frac{1}{2})(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}) + 1$$

$$1 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$1 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{2} \quad a + c = -\frac{3}{2} \quad ac = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2}$$

all

$$-1; -2.$$

$$-\frac{1}{2}; -1$$

$$-\frac{1}{2} \cdot 1 + (-1) \cdot \frac{1}{2}$$

$$x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0$$

$$2x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$\frac{-3 \pm 1}{2}$$

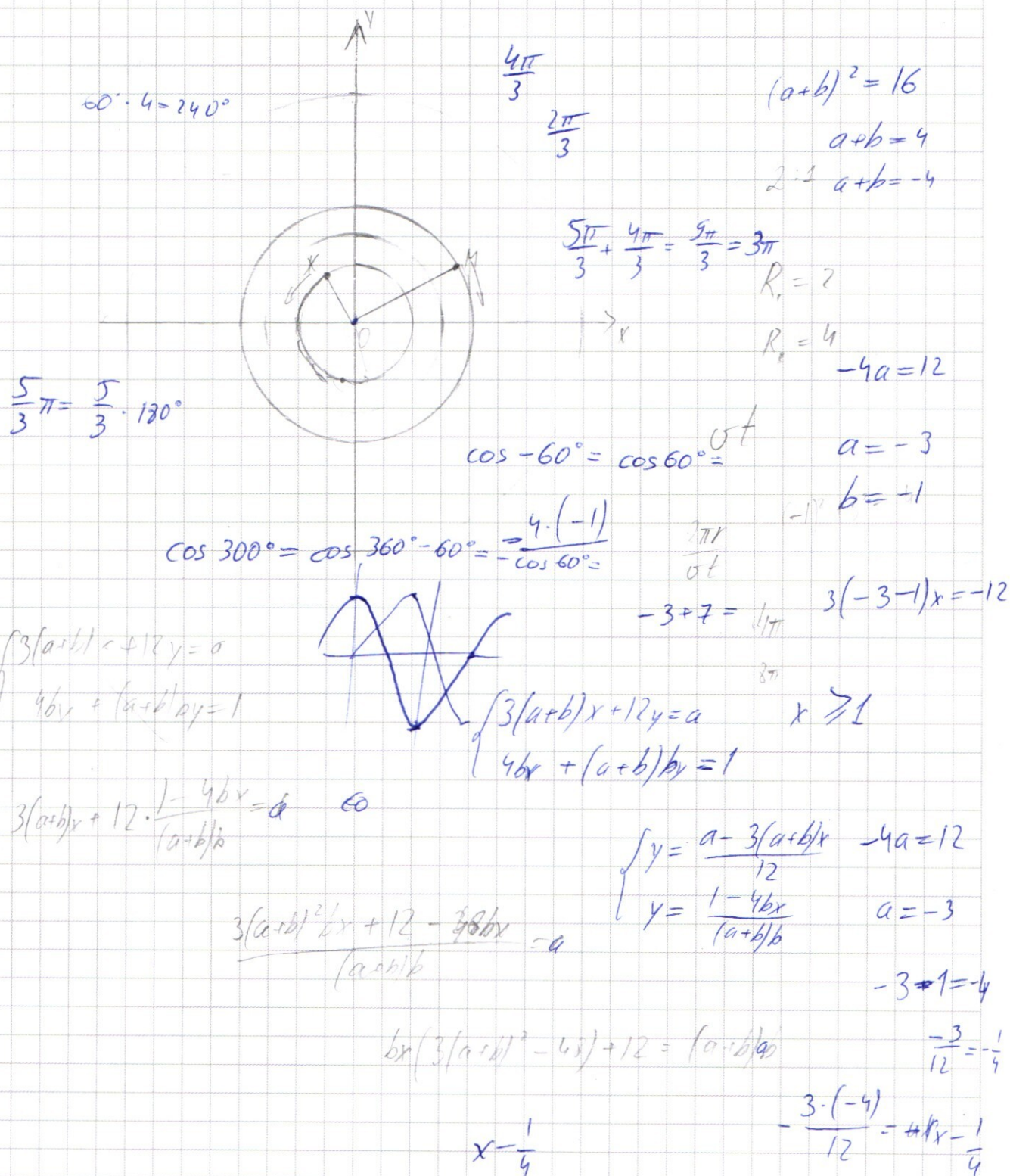
$$D = 9 - 4 \cdot 2 = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm 1}{2}$$

$$-3; -2$$

$$(x^2 - x + 1)(2x^2 - x + 1)$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$x \geq 1$$

$$x < 1$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^3 + 3x^2 + 1 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x^2 - 2x + 1$$

$$x^2(2x^2 - 3x + 2) + 2x^2 - 2x + 1$$

$$2x^2 - 2x + 1$$

$$4 - 8 < 0$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2(x-1) + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^3 + 3x^2 + 1 = 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$2 - 3 + 4 - 2 + 1 =$$

$$3/2 - 2x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x^2 - 2x + 1$$

$$2x^4 +$$

$$x^2(2x^2 - 3x + 3)$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2(x-1) + 1 \geq 0 \quad 9/12 \quad 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$2x^4 + x^2 - 2x + 3x^3 - 3x^2 + 1$$

$$2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1$$

$$2 \cdot \frac{1}{8} + \frac{3}{8} - \frac{1}{2} - 1 + 1$$

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1$$

$$= \frac{2}{16} + \frac{3}{8} + 1 + 1 + 1 =$$

$$=$$

$$-\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 1$$

$$= \frac{2}{16} - \frac{3}{8} + 1 - 1 + 1 =$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{3}{8} + 1$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$$

$$x^2+5x+6$$

$$\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$$

$$x^3-x^2-5x+6=0 \quad |x-2$$

$$-\frac{5}{2} = -2,5$$

$$1-1-5+6=1$$

$$x^3-x^2$$

$$x^2+5x+6=0$$

$$x^3-x^2-2x-3x+6$$

$$1-4(-2)=1+8=9 \quad [2,5; +\infty) \quad 8-4-10+6=0$$

$$x^3-x+10 \geq 0$$

$$\frac{1 \pm 3}{2}$$

$$x^2(x^2-x-2) - 3(x+2)$$

$$-3 \rightarrow -14$$

$$\frac{-5 \pm 1}{2}$$

$$-2 \rightarrow 4$$

$$x^3-x^2-5x+6=0$$

$$-1 \rightarrow 10$$

$$-2$$

$$x^3-x^2-x \quad x^3-x+10$$

$$8-2+10$$

$$-3$$

$$\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10$$

$$\sqrt{x^3-x+10} = x+2$$

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = (x+3)(x+2)$$

$$x^3-x+10 = x^2+4x+6 \quad -8+2+10$$

$$x=-3$$

$$-5$$

$$\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6 \quad -8+2+10$$

$$(-3)^3+3+10=-14 < 0$$

$$\sqrt{x^2-x+10} = x+2$$

$$\frac{6}{1} \quad 3$$

$$-1+1+10=10$$

$$1-1$$

$$x^3-x+10 = (x+2)^2 = x^2+4x+4$$

$$-1-1+5-6$$

$$x^3-x^2-5x-6$$

$$1400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$$

$$\begin{array}{r|l} 1400 & 2 \\ 700 & 2 \\ 350 & 2 \\ 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$2 \quad 2^2 \quad 2^3$$

$$(2; 2; 2; 5; 5; 7; 1; 1)$$

$$8! + 8! + 8!$$

$$3 \cdot 8! =$$

$$(4; 2; 5; 5; 7; 1; 1; 1)$$

$$(8; 5; 5; 7; 1; 1; 1; 1)$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 5040 \\ \hline 40320 \\ 3 \\ \hline 120960 \end{array}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2x^4 + 4x^2 + 1 - (3x^3 + 2x) = 2x^4 + 4x^2 + 1 - x(3x^2 + 2)$$

$$8x^3 - 9x^2 + 8x - 2 \geq 0$$

$$\pm 1; \pm 2; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{1}{4}; \pm \frac{1}{8}$$

$$x > 0$$

$$3x^2 + 2 > 0$$

$$1 - \frac{9}{4} + 4 - 2$$

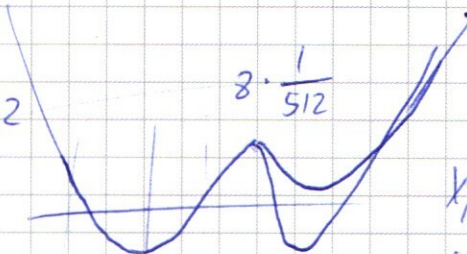
$$\frac{1}{8} - \frac{9}{16} + 2 - 2$$

$$64 - 36 + 16 - 2$$

$$8 - 9 + 8 - 2 =$$

$$-8 - 8 + 9 - 2$$

$$\pm \frac{1}{2}$$



$$\frac{1}{64} - \frac{9}{64} + 1 - 2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{3}{2}$$

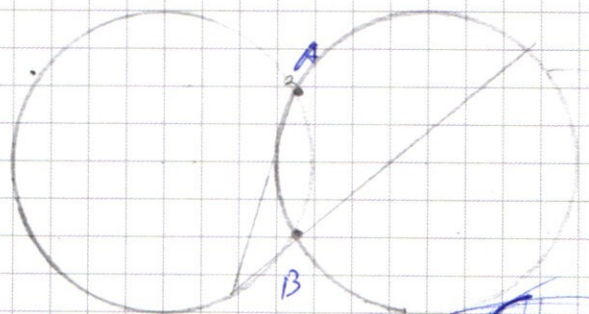
$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 = 2$$

$$x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 = 1$$

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = \frac{1}{2}$$

$$8x^3 - 9x^2 + 8x - 2 \geq 0$$

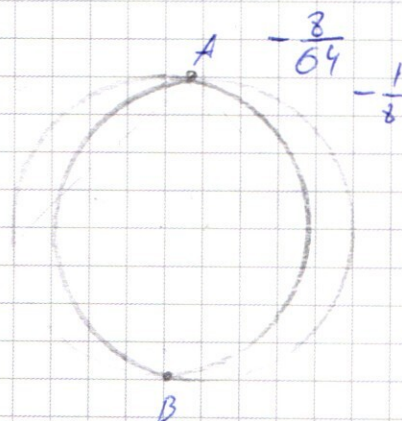
$$\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{1}{4}; \pm \frac{1}{8}$$



$$24x^2 - 18x + 8$$

$$12x^2 - 16x$$

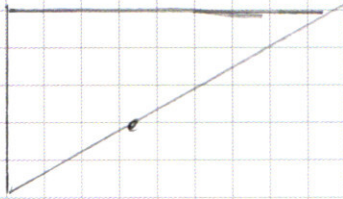
$$24x^2 - 9x + 4 = 0$$



$$-\frac{3}{64} - \frac{1}{8}$$

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1$$

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1$$



$$32 - 24 + 8 - 4 + 1 = 41 - 28 > 0.$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^3 + 3x^2 + 1 \geq 0$$

$$262 - 81 + 36 - 6 + 1 = 81 + 30 + 1 > 0.$$

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

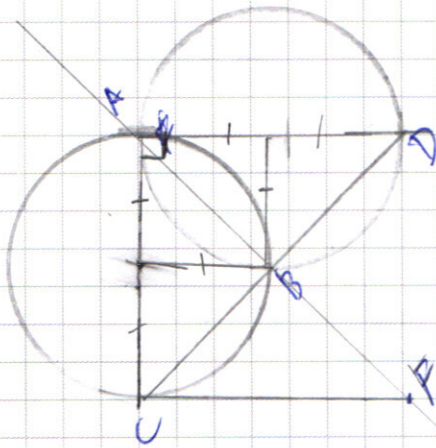
$$4^4 = 256$$

$$2x^4 + 4x^2 + 1 - x(3x^2 + 2) \geq 0$$

$$(x - x_1)(x - x_2)(x^2 + ax + b)$$

$$512 - 282 + 64 - 8 + 1$$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2$$



$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{3}{2}$$

$$x_1x_2 + x_1$$

$$x_1x_2x_3x_4 = \frac{1}{2}$$

$$64 \times 4 = \widehat{DAN} = 90^\circ = 90^\circ$$

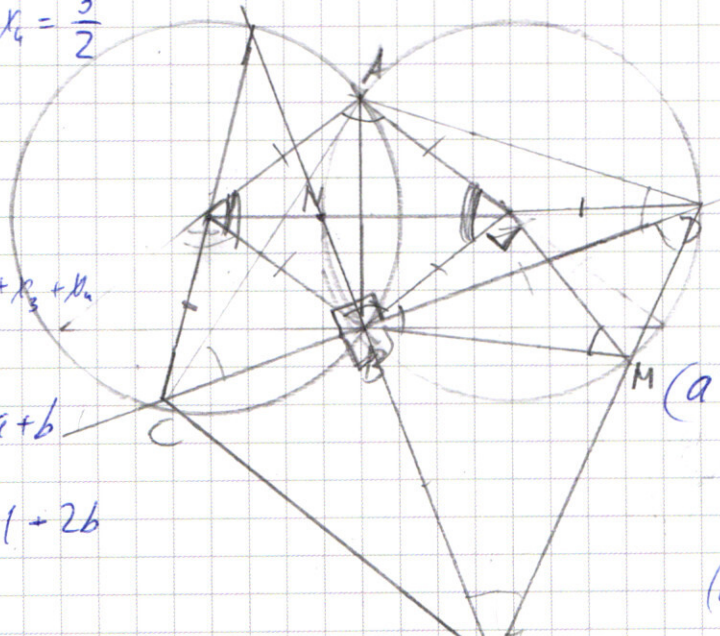
$$64 \times 3 = 120 + 12$$

$$90^\circ$$

$$\left(\frac{1}{2} - a\right) + \frac{1}{2} + b + x_3 + x_4$$

$$1 - a + b$$

$$1 - 2a + 1 + 2b$$



$$(a^2 + b - 3)^2 - 8(a^2 - 3a - 3ab - 3b + b^2)$$

$$(a + b - 3)(a + b)$$

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \mid x^2 - (a+b)x + ab$$

$$a^2 + 2ab + b^2 - 3a - 3b$$

$$2x^4 - (a+b)x^3 + abx^2$$

$$2x^2 + (a+b-3)x + a^2 - 3a - 3ab - 3b + b^2$$

$$(a+b-3)x^3 + (4-a-b)x^2 - 2x + 1$$

$$-(a+b-3)x^3 + (a^2 - 3a + 2ab - 3b + b^2)x^2 + abx$$

$$(a^2 - 3a - 3ab - 3b + b^2)x^2 - (2+ab)x + 1$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2 / x - 1 + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + x^2 - 2x + 3x^3 - 3x^2 + 1 \geq 0, \quad x < 1$$

$$2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$D = 1 + 4 = 5$$

$$2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 =$$

$$= \frac{2}{16} + \frac{3}{8} - \frac{1}{2} - 1 + 1 = 0$$

$$\pm 1; \pm \frac{1}{2}$$

$$2\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$x^2$$

$$x^3$$

$$x^4 + \frac{3}{2}x^3 - x^2 - x + \frac{1}{2} \geq 0$$

$$x^4 + x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{1}{2} = 0$$

$$2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x^3 + 2x^2 - 1)$$

$$x(x^3 + x^2 - 1) + x^3 - x^2 + 1$$

$$-1 + 2 - 1 = x^3 + 4x^2 - 1$$

$$2x^4 + x^2 - 2x -$$

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \\ - 2x^4 - x^3 \\ \hline 4x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} x - \frac{1}{2} \\ 2x^3 + 4x^2 - 2 \end{array} \right.$$

$$H_1$$

$$\begin{array}{r} 4x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \\ - 4x^3 - 2x^2 \\ \hline -2x + 1 \end{array}$$

$$-1$$

$$\begin{array}{r} -2x + 1 \\ -2x + 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$-1 + 8 - 1 = 0$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 - 1 \quad \left| \begin{array}{l} x + 1 \\ x^2 + x - 1 \end{array} \right. \\ - x^3 + x^2 \\ \hline x^2 - 1 \\ - x^2 + x \\ \hline -x - 1 \\ -x - 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$x^4 + 2x^3 = \frac{1}{x}$$

$$x^{\frac{5}{2}}$$

$$x^2 + 2x$$

$$2x^4 + 4x^2 + 1 = x(3x^2 - 2)$$

$$\pm 1; \pm \frac{1}{2}$$

$$2x^4 + 4x^2 + 1 - x(3x^2 - 2) \geq 0$$

$$x(3x^2 - 2)$$

$$2 \cdot (-1)^4 - 3 \cdot (-1)^3 + 4 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 1 =$$

$$x^4 + 2x^2 + 1$$

$$x^2 = \frac{2}{3}$$

$$= 4 + 2 + 3 + 4 + 2 + 1$$

$$x \left( x - \sqrt{\frac{2}{3}} \right) \left( x + \sqrt{\frac{2}{3}} \right)$$

$$\frac{2}{3} \quad x \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\pm 1 \pm \frac{1}{2}$$

$$a+c = -\frac{3}{2}$$

$$2 + 4 + 1 - 3 - 2 = 2$$

$$ac \pm 2(b+d)$$

$$2x^4 + 4x^2 + 1 > x(3x^2 - 2)$$

$$x^2 + \frac{3}{2}x - (2+b+d) = 0$$

$$2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 1 =$$

$$= \frac{2}{16} - \frac{3}{8} + \frac{4}{4} - \frac{2}{2} + 1 =$$

$$-\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4(2-b-d)}$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}}; \pm \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{8} - \frac{3}{8} + 1 - 1 + 1 = -\frac{1}{4}$$

$$a+c =$$

$$2$$

$$x(3x^2 - 2) > 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 2x + 1$$

$$x^2(2x^2 - 3x + 2) + 2x^2 - 2x + 1$$

$$x > 0$$

$$x < 0$$

$$3x - 2 > 0$$

$$3x - 2 < 0$$

$$\frac{2}{3}$$

$$2x^4 + 4x^2 + 1 - x(3x^2 - 2)$$

$$2 - 3 - 1 - 2 + 1 = 2$$

$$x^2(3x^2)$$

$$a+c = -\frac{3}{2}$$

$$ac + \frac{3}{2} = 2$$

$$a + \frac{c}{2} = -1$$

$$3 \cdot 8 \cdot 162 =$$

$$1 \cdot \frac{1}{2}$$

fa

$$(x^2 + bx + c)$$

$$(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$$

$$a+c = -\frac{3}{2}$$

$$ac + b+d = 2$$

$$ad + bc = -1$$

$$bd = \frac{1}{2}$$

$$x^4 + cx^3 + dx^2 + ax^3 + acx^2 + adx + bx^2 + bcx + bd$$

$$x^4 + (a+c)x^3 + (ac+b+d)x^2 + (ad+bc)x + bd$$