МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. **[4 балла]** На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0;0)$. Муравей двигается по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0\left(-1;\sqrt{3}\right)$ и $N_0\left(2\sqrt{3};2\right)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

2. **[4 балла]** Найдите все пары действительных параметров a и b, при каждой из которых система уравнений
$$\begin{cases} 3(a+b)x+12y=a, \\ 4bx+(a+b)by=1 \end{cases}$$
имеет бесконечно много решений.

3. **[4 балла]** Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10}=x^2+5x+6$.

4. **[6 баллов]** Решите неравенство $2x^4+x^2-2x-3x^2|x-1|+1\geqslant 0$.

5. **[4 балла]** Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

6. **[5 баллов]** Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD=90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF=BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

7. **[6 баллов]** Решите систему
$$\begin{cases} |x-3-y|+|x-3+y|\leqslant 6, \\ (|x|-3)^2+(|y|-4)^2=25. \end{cases}$$

$a+b=-4$ $b=-4-a$
$ab=-3$

$a(4-a)=3$
$a^2-4a+3=0$
$D=16-12=4$
$(a-1)(a-3)$
$a=1$
$a=3$

1 3 6

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3

$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = (x+2)(x+3)$

$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} - (x+2)(x+3) = 0$

$(x+3)\left(\sqrt{x^3-x+10} - (x+2)\right) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x^3-x+10} - x - 2 = 0 \\ x+3=0\end{array}\right.$

I. $x+3=0$

$x=-3$

$0=0$, истинно

но при $x=-3$

$\sqrt{-27+3+10} = \sqrt{-14}$

а корень из отрицательного числа не существует.

II. $x+3 \neq 0$, тогда

$\sqrt{x^3-x+10} - (x+2) = 0$

$\sqrt{x^3-x+10} = x+2$, $x+2 \geq 0$, $x \geq -2$ $\uparrow^2$

$x^3-x+10 = x^2+4x+4$

$x^3-x^2-5x+6=0$

$x^3-2x^2+x^2-2x-3x+6=0$

$x^2(x-2)+x(x-2)-3(x-2)=0$

$(x-2)(x^2+x-3)=0$

а) $x=2$, $0=0$ - истинно, $x \geq -2$

б) $x^2+x-3=0$

$D = 1+12 = 13$ $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$

при $x=2$ $\sqrt{8-2+10}$ существует, т.к. $16 \geq 0$, значит, $x=2$ верно

при $x = \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \approx \frac{-1+3,6}{2} \approx 1,3$. $1,3^3 - 1,3 + 10 > 0$ точно.

при $x = \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \approx \frac{-1-3,6}{2} \approx -2,3$. $(-2,3)^3 + 2,3 + 10 > 0$, т.к. $12,3 > 2,3^3 = 12,167$

Ответ: $x = \left\{ \frac{-1-\sqrt{13}}{2} ; \frac{-1+\sqrt{13}}{2} ; 2 \right\}$

2

№5

$1400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$, множителей, отличных от 1 - шесть максимум, значит, остальные цифры - 1

I. Когда цифры числа - 2,2,2,5,5,7,1,1. Тогда вариантов восьмизначных чисел из этого набора $\frac{8!}{3!\cdot 2!\cdot 2!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4\cdot 6} =$
$= 8\cdot 7\cdot 5\cdot 3\cdot 2 = 1680$

II. Когда цифры числа - 4,2,5,5,7,1,1,1. Тогда вариантов восьмизначных чисел из этого набора $\frac{8!}{2!\cdot 3!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 6} =$
$= 8\cdot 7\cdot 5\cdot 4\cdot 3 = 3360$

III. Когда цифры числа - 8,5,5,7,1,1,1,1. Тогда вариантов 8значных чисел из этого набора $\frac{8!}{2!\cdot 4!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 8\cdot 7\cdot 3\cdot 5 =$
$= 840$.

Всего $840 + 1680 + 3360 = 5880$ чисел.

Больше вариантов невозможно, т.к. из набора чисел 2,2,2,5,5,7 только 2 и 2; 2, 2 и 2 могут объединяться в множитель, меньше 10, чтобы это было цифрой. Поэтому возможны 3 случая: I (когда никакие из этих 6 множителей не объединены), II (когда объединены две двойки в четверку) и III (когда все три двойки объединены в восьмерку).

Ответ: 5880

1

№7

будем решать графическим методом.

Объясните по

I. $|x-3-y| + |x-3+y| \le 6$, прямые

$$\begin{cases} x-3-y+x-3+y \le 6 \\ x-3-y-x+3-y \le 6 \\ -x+3+y+x-3+y \le 6 \\ -x+3+y-x+3-y \le 6 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-6 \le 6 \\ -2y \le 6 \\ 2y \le 6 \\ -2x+6 \le 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x \le 6 \\ y \ge -3 \\ y \le 3 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

при каких условиях

II. $(|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25$, окружность. Центры - $(\pm 3; \pm 4)$, радиус 5

не всегда

с иог 0/0

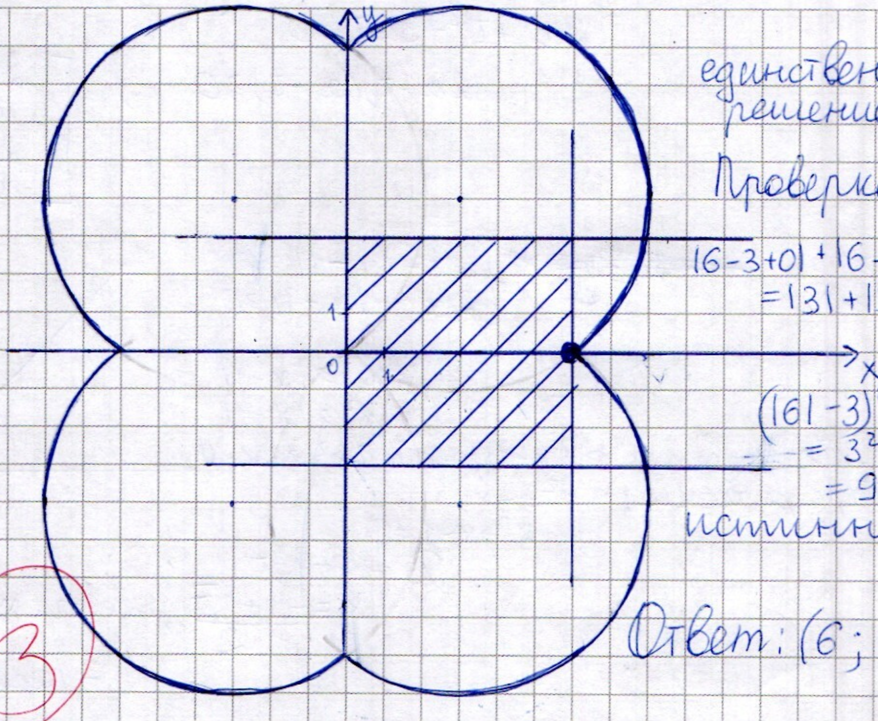
☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №2

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



единственное решение $-(6;0)$

Проверка:

$|6-3+0|+|6-3-0| = |3|+|3| = 6,\ 6 \le 6$

$(|6|-3)^2+(|0|-4)^2 = 3^2+(-4)^2 = 9+16 = 25$

истинно

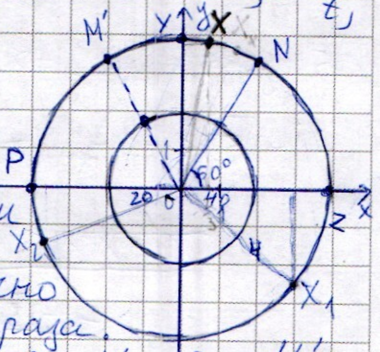
Ответ: $(6;0)$

3

№1

Заметим, что минимальное расстояние между жуком и муравьём это когда муравей, жук и сахар находятся на одной прямой.

По т. Пифагора найдем радиусы окружностей: у муравья 2, у жука – 4. Заметим, что муравей двигается в 2 раза быстрее жука, т.к. радиус его окружности вдвое меньше. $S = 2\pi R$, $V = \frac{S}{t}$, ~~2~~ $V = \frac{2\pi R}{t}$, меняется только радиус.



Сделаем проекцию муравья на окружность жука и когда эти точки M' и N встретятся то значит, M, O и N лежат на одной прямой, т. е. в данный момент расстояние между жуком и муравьем наименьшее.

Проекция M' попала в точку $(-2;2\sqrt{3})$ симметрично N, т.к. радиус вырос в 2 раза $\Rightarrow$ координаты тоже в 2 раза. ~~по~~ будем смотреть проекцию движения на оси x. $M'_x = -2$, $N_x = 2$. M' двигается в 2 раза быстрее $\Rightarrow X_x$ (место встречи на оси x) $= 2 - \frac{2-(-2)}{3} = 2 - \frac{4}{3} = 2 - 1\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

т.к. радиус $= 4$, то по т. пиф. $X_y = \sqrt{4^2 - \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{32}{9}} = \frac{4}{3}\sqrt{2} = 1\frac{1}{3}\sqrt{2}$. т. е. $X\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\sqrt{2}\right)$. Найдем вторую точку пересечения и третью. Их всего три, т. к. после каждой встречи муравей пробегает вдвое больше, чем жук. На рисунке они обозначены X, X_1 и X_2...

ПРОДОЛЖЕНИЕ НА СТРАНИЦЕ 6

№ 4 $\quad 2x^4+x^2-2x+3x^2|x-1|+1\geq 0$

Произведем замену: $|x-1|=t,\ t\geq 0;\ x^2=a; a\geq 0$

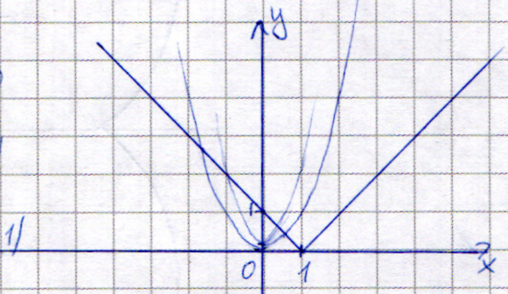
~~2a~~ $\quad 2x^4+(x^2-2x+1)+3x^2|x-1|\geq 0$

$$2x^4+(x-1)^2+3x^2|x-1|\geq 0$$

$$2a+t^2+3at\geq 0$$

$$(2a-t)(a-t)\geq 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2a-t\geq 0\\ a-t\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}2a-t\leq 0\\ a-t\leq 0\end{cases}\end{array}\right.$$

I. $\begin{cases}2a-t\geq 0\\ a-t\geq 0\end{cases}$ $\quad \begin{cases}x^2-|x-1|\geq 0\\ 2x^2-|x-1|\geq 0\end{cases}$



$\begin{cases}x^2\geq |x-1|\\ 2x^2\geq |x-1|\end{cases}$

т.к. $x^2\geq 0$, то если $x^2\geq |x-1|$, то и $2x^2\geq |x-1|$

решим графически: $x^2=-x+1$

$x^2+x-1=0$

$D=1+4=5$

$x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, т.е. при $x\in\left(-\infty;\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\infty\right)$ – неравенство истинно.

II. $\begin{cases}2a-t<0\\ a-t<0\end{cases}$ $\quad \begin{array}{l}2x^2-|x-1|\leq 0\\ x^2-|x-1|\leq 0\end{array}$ $\quad \cancel{x^2+x}^2$ $\quad \begin{array}{l}2x^2<|x-1|\\ x^2<|x-1|\end{array}$, достаточно выполнения 1-го нер-ва, т.к. $x^2<2x^2$

снова графически. $2x^2\leq |x-1|$

$2x^2=-x+1$

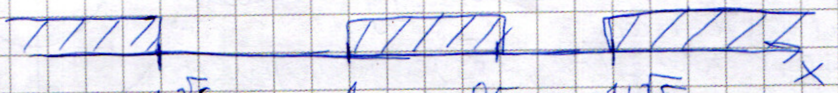
$2x^2+x-1=0$

$(2x-1)(x+1)=0$

$x=0{,}5$ $x=-1$, т.е. при $x\in[-1;0{,}5]$ – нер-во истинно.

$\sqrt{5}$ чуть больше $2 \Rightarrow \sqrt{5}-1>1 \Rightarrow \frac{\sqrt{5}-1}{2}>\frac{1}{2}$.

$-1-\sqrt{5}<-1-2$, т.е. $-1-\sqrt{5}<-3 \Rightarrow \frac{-1-\sqrt{5}}{2}<-1$ точно $\Rightarrow$

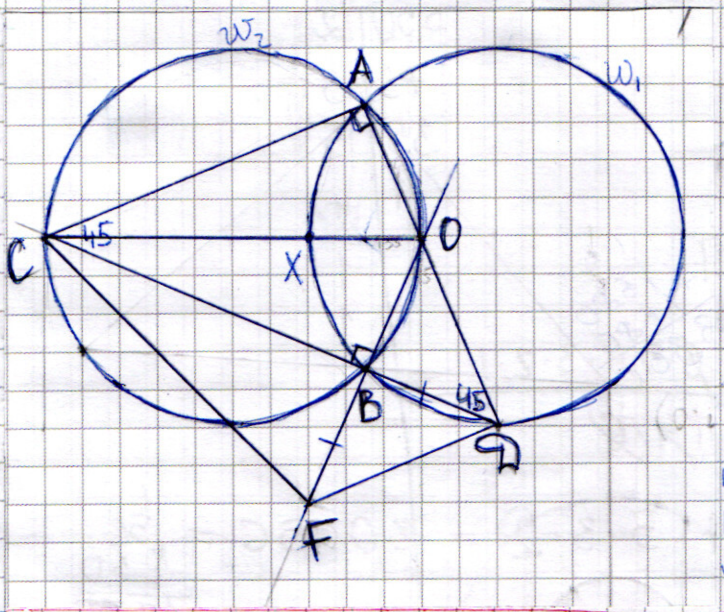


$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ $\quad -1$ $\quad 0{,}5$ $\quad \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Ответ: $x\in\left(-\infty;\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right]\cup[-1;-0{,}5]\cup\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$

6

№6



1) т.к. окружности одного радиуса, то $\cup AOB = \cup AXB$, т.к. AB – ось симметрии для этих двух окружностей.

2) $\angle BDA = 0{,}5 \cup AXB$, $\angle ACB = 0{,}5 \cup AOB$ } по св-ву вписанных углов

⇓

т.к. $\cup AOB = \cup AXB$, то $\angle BDA = \angle ACB$, т.е. по опр р/б △ △ACD – р/б. в нем $\angle A = 90° \Rightarrow \angle C = \angle D = 45°$ по теореме о сумме углов треугольника.

3) Покажем, что O – точка пересечения перпендикуляра к CD и AD, лежит на второй окружности.

В треугольнике BOD, $\angle D = 45°$, $\angle B = 90° \Rightarrow \angle O = 45° \Rightarrow \angle BOA = 135°$. Известно, что $\angle C = 45° \Rightarrow AOBC$ - вписанный по призн $\Rightarrow O \in \omega_2$, т.е. O лежит на окружности. Тогда CO - диаметр, т.к. $\angle A = 90°$

4) Т.к. $BF = BD$ по усл. и $\angle B = 90°$, то △BOD – р/б, и по транзитивности $BD = DO$, $BD = BF \Rightarrow BF = BO$.
в △BOD и $\angle D = 45° = \angle O$

5) в △ COF $CB \perp OF$; $BF = BO \Rightarrow$ по призн р/б △ COF – р/б и в нем $CF = CO$, CO - диаметр $= 18 \Rightarrow CF = 18$

5

Ответ: 18

№1 ПРОДОЛЖЕНИЕ.

Заметим, что т.к. в данном прямоуг. △ радиус 4, а катет 2, то в нем углы 30° и 60°. Т.е. $\angle YON = 30° = \angle YOM'$. Т.к. это центральный угол, то по его св-ву раз $\cup NX \cdot 2 = \cup M'X$, то и $\angle NOX \cdot 2 = \angle XOM'$. Т.е. $\angle NOX = 20$. $\angle XOX_1 = \angle X_1OX_2 = \angle X_2OX = 120 \Rightarrow \angle ZOX_1 = 40°$ и $\angle POX_2 = 20°$ по акс. изм-я углов. ~~[illegible]~~ $x_{x_1} = OX_1 \cdot \sin 40 = 4\sin 40$

$y_{x_1} = -OX_1 \cdot \cos 40 = -4\cos 40 \Rightarrow$

ответ и N

$\Rightarrow X_1(4\sin 40; -4\cos 40)$

аналогично посчитаем X_2. $x_{x_2} = -OX_2 \cdot \sin 20 = -4\sin 20$

$y_{x_2} = -OX_2 \cdot \cos 20 = -4\cos 20 \Rightarrow$

$\Rightarrow X_2(-4\sin 20; -4\cos 20)$

Ответ: $\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\sqrt{2}\right)$, $(4\sin 40; -4\cos 40)$, $(-4\sin 20; -4\cos 20)$

+2 → у стороны

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

Система имеет бесконечно много решений если одно уравнение можно получить умножением другого на какой-то коэффицент. Поэтому если $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ и ∞ решений, то

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

применив это правило к данной системе, получим:

дописать №7 0

$$\frac{3(a+b)}{4b} \overset{①}{=} \frac{12}{(a+b)b} \overset{②}{=} \frac{a}{1}.$$

(иначе $0+0=1$)

рассмотрим ①. $3(a+b)^2 b = 48b$, $b \neq 0 \Rightarrow$

$3(a+b)^2=48$

$(a+b)^2=48/3=16.$ $(a+b)=\pm 4$

теперь рассмотрим ②. $ab(a+b)=12$.

а) $a+b=4$; $ab=3$. тогда $a=1$ $b=3$ и наоборот.

проверка: $\begin{cases} 12x+12y=1 \\ 12x+12y=1 \end{cases}$ и $\begin{cases} 12x+12y=3 \\ 4x+4y=1 \end{cases}$ $1\cdot 3$

б) $a+b=-4$, $ab=-3$. ~~a=-a, b=-b~~

$a=-b-4$

$-b(b+4)=-3$

$b(b+4)=3$

$b^2+4b-3=0$

$D=16+12=28$

$b_1=-2+\sqrt{7}$ $a_1=-2-\sqrt{7}$

$b_2=-2-\sqrt{7}$ $a_2=-2+\sqrt{7}$

3

проверка: $\begin{cases} -12x+12y=-2-\sqrt{7} \\ (-8+4\sqrt{7})x+(8-4\sqrt{7})y=1 \end{cases}$ $\frac{-12}{4(-2+\sqrt{7})}=\frac{-2-\sqrt{7}}{1}$ $12=4(-2+\sqrt{7})(2+\sqrt{7})=4(7-4)=4\cdot 3=12$

$\frac{-12}{4(-2+\sqrt{7})}=\frac{12}{-4(-2+\sqrt{7})}$ — истинно.

и $\begin{cases} -12x+12y=-2+\sqrt{7} \\ 4(-2-\sqrt{7})x-4(-2-\sqrt{7})y=1 \end{cases}$ $\frac{-12}{4(-2-\sqrt{7})}=\frac{-2+\sqrt{7}}{1}$ $12=4(2+\sqrt{7})(\sqrt{7}-2)=4(7-4)=4\cdot 3=12$

$\frac{-12}{4(-2-\sqrt{7})}=\frac{12}{-4(-2-\sqrt{7})}$ — истинно.

Ответ: $(1;3)$, $(3;1)$, $(-2-\sqrt{7};-2+\sqrt{7})$, $(-2+\sqrt{7};-2-\sqrt{7})$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2x^4+x^2-2x+3x^2|x-1|+1\geq 0$

I. $x-1\geq 0$ $x\geq 1$

$2x^4+x^2-2x+3x^3-3x^2+1\geq 0$

$2x^4+3x^3-2x^2-2x+1\geq 0$

$(2x^2-|x-1|)(x^2-|x-1|)\geq 0$

$2x^4+2x^3+x^3+x^2-3x^2-3x+x+1\geq 0$

$2x^3(x+1)+x^2(x+1)-3x(x+1)+(x+1)\geq 0$

$(x+1)(2x^3+x^2-3x+1)\geq 0$

$2x^3-x^2+2x^2-x-2x+1>$

$x^2(2x-1)+x(2x-1)-1(2x-1)$

$(x+1)(2x-1)(x^2+x-1)\geq 0$

$D=1+4=5$

$x_1=\frac{-1\pm\sqrt5}{2}$

$x^2\geq|x-1|$

$x^4\geq x^2+2x+1$

$x^4-x^2-2x-1\geq 0$

II. $x-1\leq 0$ $x<-1$

$2x^4+x^2-2x-3x^3+3x^2+1\geq 0$

$2x^4-3x^3+4x^2-2x+1\geq 0$

$2x^4+x^3-4x^3-2x^2+6x^2+2x-3x+1\geq 0$

$2x^4+2x^3-5x^3$

$2x^4+x^3-4x^3-2x^2+6x^2+6x$

$2x^4+2x^3-5x^3-5x^2+x^2+x-3x+1\geq 0$

$2x^4-x^3-2x^3+x^2+3x^2-1{,}5x-0{,}5x+1\geq 0$

$2x^4-2x^3-x^3+x^2+3x^2-3x+x+1\geq 0$

$2x^4$

$\frac{2}{2{,}5}=\frac{3}{2}=\frac{x^{1,5}}{1}$

x^2 $2x^2$ $|x-1|$

$2x^4+x^2+1>3x^2|x-1|+2x$

$2x^4+x^2-2x+1>3x^2|x-1|$

$2x^4+(x-1)^2-3x^2|x-1|\geq 0$

$(2x-1)(x+1)$

$\left.\frac{-1-\sqrt5}{2}\right]$ $[-1;0{,}5]$ $\left[\frac{-1+\sqrt5}{2};+\infty\right)$

$2x^4+t^2-3x^2t\geq 0$ $a=x^2$

$t(t-3x^2)+2x^4\geq 0$ $t=|x-1|$

$2a^2-3at+t^2\geq 0$ $(2a-t)(a-t)\geq 0$

x

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\frac{3(a+b)}{4b} \overset{①}{=} \frac{12}{(a+b)b} \overset{②}{=} \frac{a}{1}$$

③

1) $3b(a+b)^2 = 48b,\ b \neq 0$

$3(a+b)^2 = 48$

$(a+b)^2 = 16$

$(a+b) = \pm 4$

2) $ab(a+b) = 12$

3 4

3) $4ab = 3(a+b)$

$ab = \frac{3}{4}(a+b)$

a	b
1	3
3	1
-1	-3
-3	-1

$a+b=-4$

$ab=3$

$$\begin{cases} 12x+12y=1 \\ 12x+12y=1 \end{cases}$$

$12x+12y=3$

$4x+4y=1$

$$\frac{-1-\sqrt{13}}{2} > -2{,}25$$

$\approx 3{,}5$

$\approx 2{,}5$

$\approx 1{,}25$

$23 \times 23 = 529$

$529 \times 23 = 12167$

$24 \times 24 = 576$

576×24

$3{,}5 \times 3{,}5 = 12{,}25$

$3{,}6 \times 3{,}6$

$144 \times 9 = 1296$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)