

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Вокруг цветка в одной плоскости с ним по двум окружностям летают шмель и пчела. Скорость пчелы в полтора раза больше скорости шмеля. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой цветок (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Пчела двигается по часовой стрелке, а шмель – против. В начальный момент времени пчела и шмель находятся в точках $M_0\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ и $N_0(2; 0)$ соответственно. Определите координаты всех положений шмеля, в которых расстояние между ним и пчелой будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все тройки целочисленных параметров a , b и c , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y + cz = c, \\ 3x + by + 4z = 4b \end{cases}$$

не имеет решений.

3. [4 балла] Решите неравенство $(\sqrt{x^3 - 10x + 7} + 1) \cdot |x^3 - 18x + 28| \leq 0$.

4. [5 баллов] Решите уравнение $2x^4 + x^2 - 6x - 3x^2|x - 3| + 9 = 0$.

5. [5 баллов] Бросили 70 игральных костей (кубиков с цифрами от 1 до 6 на гранях; вероятность выпадения каждой из граней одна и та же) и посчитали сумму выпавших чисел. Какая из вероятностей больше: того, что сумма больше 350, или того, что сумма не больше 140?

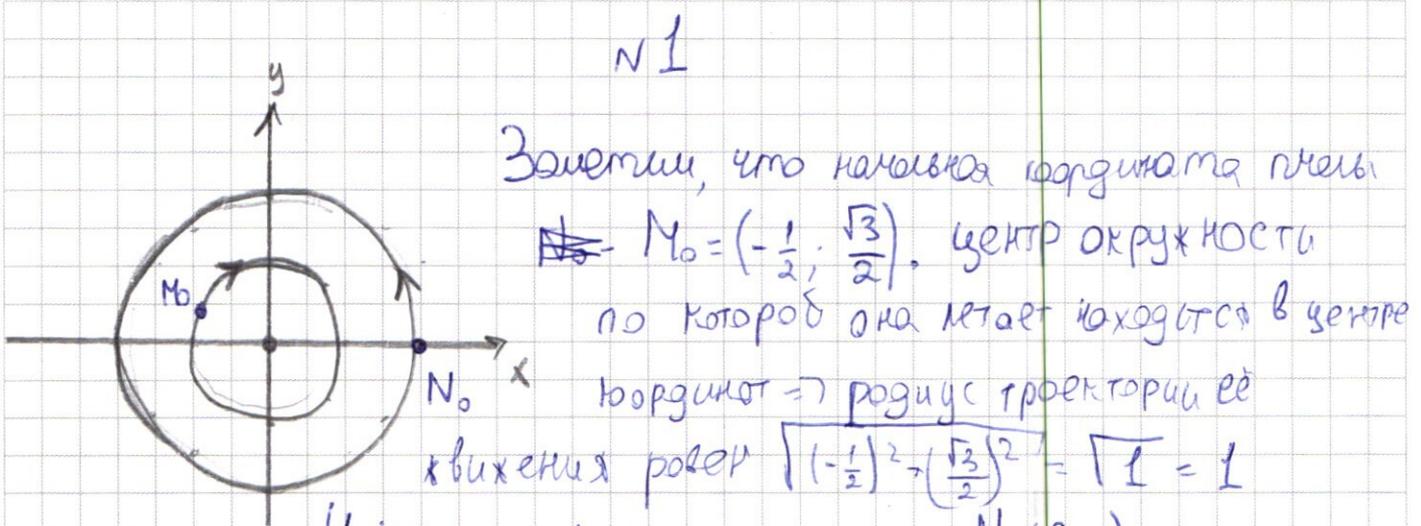
6. [4 балла] Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D , пересекает прямую ℓ_2 в точках B и E , а также вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2BE равно $\frac{5}{4}$. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1 .

7. [7 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} a^2 - 2ax - 6y + x^2 + y^2 = 0, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = 25 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



N 1

Заметим, что начальная координата пчелы

~~M_0~~ $M_0 = (-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$, центр окружности

по которой она летает находится в центре

координат \Rightarrow радиус траектории её

движения равен $\sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{1} = 1$

У шмеля начальная координата $N_0(2; 0)$ из чего

сразу делаем вывод, что радиус траектории движения шмеля равен 2.

Заметим также, что будет удобно перевернуть координаты

и пчелы и шмеля из декартовой в полярную систему

координат т.к. они движутся по окружностям постоянного

радиуса и с общим центром. Координата N_0 в полярной

системе координат равна $(2; 0)$, $M_0 - (1; 2\pi/3)$

движение их в данной системе описывается следующим образом:

$M = (1; 2\pi/3 - \omega_M t)$ $N = (2; 0 + \omega_N t)$ где ω_M и ω_N -

угловые скорости движения пчелы и шмеля по окружностям

пусть скорость шмеля = $2x \Rightarrow$ скорость пчелы = $3x = 2x \cdot 1,5$

угловая скорость считается по следующей формуле: $\omega = \frac{v}{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega_M = \frac{3v}{1} = 3v$ $\omega_N = \frac{2v}{2} = v \Rightarrow$

$\Rightarrow M(t) = (1; 2\pi/3 - 3vt)$ $N(t) = (2; vt)$

Заметим, что минимальное расстояние между ~~и~~ шмелем и пчелой равно минимальному расстоянию между двумя точками их траекторий равно разнице радиусов окружностей, являющихся их траекториями.

Оно достигается, когда шмель и пчела находятся на одной прямой с центром координат \Leftrightarrow их угловые координаты равны. \Rightarrow расстояние минимально, ~~когда $2\pi/3 - 3\delta t = \delta t \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow 4\delta t = 2\pi/3$~~ когда $2\pi/3 - 3\delta t = \delta t$ но т.к. мы считаем равными углы α и $\alpha + 2\pi n$, то правильнее будет записать равенство угловых координат так:

$$2\pi/3 - 3\delta t = \delta t + 2\pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\pi/3 - 2\pi n = 4\delta t \Rightarrow \delta t = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi n}{2}$$

Так, как δt - изменение угловой координаты, то $\delta t \geq 0$; $\delta t \leq 2\pi n$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{6} - 0 \leq \frac{\pi}{6} - \frac{\pi n}{2} \leq 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n \in \{0, -1, -2, -3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta t \in \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{4\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{10\pi}{6} \right\}$$

теперь заметим ~~т~~, что координаты шмеля ~~при $t=0$~~ $N = (2; \delta t) \Rightarrow$

\Rightarrow координаты шмеля, когда расстояние от него до пчелы

минимальное равны $N_1 = (2; \frac{\pi}{6})$, $N_2 = (2; \frac{4\pi}{6})$, $N_3 = (2; \frac{7\pi}{6})$ и

$N_4 = (2; \frac{10\pi}{6})$ в полярной системе координат. координаты

$(r; \varphi)$ в полярной системе = ~~$(r \cos \varphi; r \sin \varphi)$~~ $(r \cdot \cos \varphi; r \cdot \sin \varphi)$. в

декартовой \Rightarrow в декартовой системе координат:

$$N_1 = (\sqrt{3}; 1) \quad N_2 = (-1; \sqrt{3}) \quad N_3 = (-\sqrt{3}; -1) \quad N_4 = (1; -\sqrt{3})$$

$$\text{Ответ: } N_1 = (\sqrt{3}, 1) \quad N_2 = (-1, \sqrt{3}) \quad N_3 = (-\sqrt{3}, -1) \quad N_4 = (1, -\sqrt{3})$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{x^3 - 10x + 7} + 1 \cdot |x^3 - 18x + 28| \leq 0.$$

Заметим что:

а) \sqrt{a} - неотрицательное число $\Rightarrow \sqrt{a} + 1$ - положительное число \Rightarrow
 $\Rightarrow \sqrt{x^3 - 10x + 7} + 1 > 0$

б) $|a| \geq 0 \Rightarrow |x^3 - 18x + 28| \geq 0.$

в) $\begin{cases} \sqrt{x^3 - 10x + 7} + 1 > 0 \\ |x^3 - 18x + 28| \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x^3 - 10x + 7} + 1 \cdot |x^3 - 18x + 28| \geq 0. \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{x^3 - 10x + 7} + 1 \cdot |x^3 - 18x + 28| \leq 0$ при $\sqrt{x^3 - 10x + 7} + 1 \cdot |x^3 - 18x + 28| = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow |x^3 - 18x + 28| = 0.$

$|x^3 - 18x + 28| = 0 \Rightarrow x^3 - 18x + 28 = 0 \Rightarrow x^3 - 2x^2 + 2x^2 - 4x - 14x + 28 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2(x-2) + 2x(x-2) - 14(x-2) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2x - 14)(x-2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = 2 \quad x_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 + 14 \cdot 4}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{60}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{15}}{2} = 1 \pm \sqrt{15}$

$x_1 = 2$
$x_2 = 1 + \sqrt{15}$
$x_3 = 1 - \sqrt{15}$

Однако: $x^3 + 10x + 7 \geq 0$ иначе вычислить
 квадратный корень невозможно $\Rightarrow x$

$\Rightarrow x \notin \left(\frac{10 - \sqrt{10^2 - 7 \cdot 4}}{2}; \frac{10 + \sqrt{10^2 - 7 \cdot 4}}{2} \right) \Rightarrow$

$\Rightarrow x \notin \left(\frac{10 - \sqrt{72}}{2}; \frac{10 + \sqrt{72}}{2} \right) \Rightarrow x \notin \left(\frac{10 - 6\sqrt{2}}{2}; \frac{10 + 6\sqrt{2}}{2} \right) \Rightarrow$

$\Rightarrow x \notin (5 - 3\sqrt{2}; 5 + 3\sqrt{2}) \quad 2, 1 + \sqrt{15} \in (5 - 3\sqrt{2}; 5 + 3\sqrt{2}) \Rightarrow$

$\Rightarrow x \neq 2 \quad x \neq 1 + \sqrt{15} \Rightarrow x = 1 - \sqrt{15}$

Ответ: $x = 1 - \sqrt{15}$

№5

Заметим, что вероятность выпадения каждого числа на кубике равна \Rightarrow
 \Rightarrow вероятность выпадения ~~на~~ всех пятёрок равна вероятности
выпадения всех единиц, а 60 пятёрок и 10 шестёрок вероятности
выпадения 60 двоек и 10 единиц

Назовём 2 числа из арифметической прогрессии „симметричными“, если
они „одинаково удалены“ от среднего арифметического всех чисел
множества. Для 3 чисел с граней кубика: числа 1 и 6, 2 и 5,
3 и 4 - симметричные.

Посмотрим на сумму чисел, выпавших при броске 70 кубиков:
суммы 350 и 420, 360 и 410, 370 и 400 - „симметричные“ и т.д.

При этом две „симметричные“ суммы можно получить
одинаковым количеством способов. Это легко понять, заметив
что достаточно в сумме заменить все слагаемые на „симметричные“ им
числа и мы получим сумму „симметричную“ начальной.

Вероятность выпадения двух наборов, равных по количеству
и размеру групп одинаковых чисел, равна т.к. нам не важно кто
считать: вероятность выпадения \leq десяти троек или десяти
пятёрок. \Rightarrow

\Rightarrow вероятность выпадения двух симметричных сумм равна.

Вероятность выпадения суммы ≥ 350 - это сумма вероятностей выпадения

всех сум ≥ 350 . \Rightarrow вероятность выпадения суммы $\geq 350 =$

вероятности выпадения суммы $\leq 40 \Rightarrow$ вероятность выпадения

суммы ≤ 140 - выше. Т.к. она выше, чем вероятность выпадения

суммы ≤ 70 , что мы уже поняли.

Ответ: Нет вероятность, что сумма ≤ 140 - выше.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} ax+2y+cz=c \\ 3x+by+4z=4b \end{cases} \xrightarrow{\times 2} \begin{cases} 3ax+2by+3cz=3c \\ 3ax+oby+4az=4ab \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3ax+by+3cz=3c \\ aby+4az-by-3cz=4ab-3c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax+2y+cz=c \\ (ab-b)y=4ab-3c+3cz-4az \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax+2y+cz=c \\ y = \frac{4ab-3c+3cz-4az}{ab-b} \end{cases}$$

т.к. эта система не имеет решений,
то подходящих значений y не существует \Rightarrow
 $ab=b \Rightarrow$

$$\begin{cases} ax+2y+cz=c \\ 6b+4az-by-3cz=24-3c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax+2y+cz=c \\ (4a-3c)z=24-3c \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax+2y+cz=c \\ z = \frac{24-3c}{4a-3c} \end{cases}$$

система не имеет решений $\Rightarrow 4a-3c=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a=3c \\ ab=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ c=4 \\ b=2 \end{cases} / \begin{cases} a=6 \\ b=1 \\ c=8 \end{cases}$$

Проверим:

$$a=3 \quad b=2 \quad c=4$$

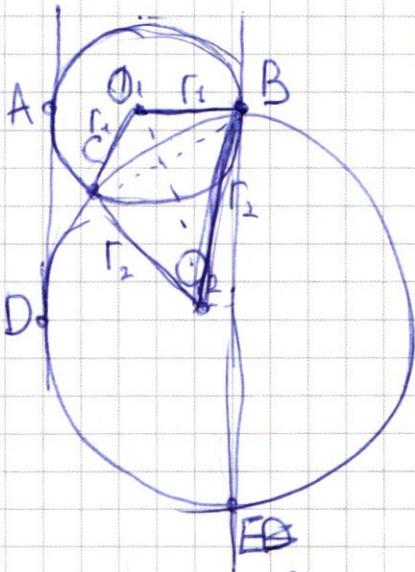
$$\begin{cases} 3x+2y+4z=4 \\ 3x+2y+4z=8 \end{cases} \text{ - не имеет решений}$$

$$a=6 \quad b=1 \quad c=8$$

$$\begin{cases} 6x+2y+8z=8 \\ 3x+y+4z=4 \end{cases} \text{ - тут одно уравнение следует из другого но решения системы имеет} \Rightarrow a \neq 6 \quad b \neq 1 \quad c \neq 8$$

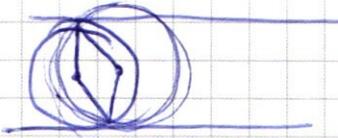
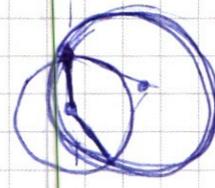
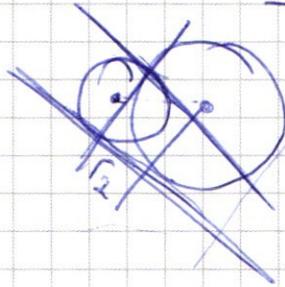
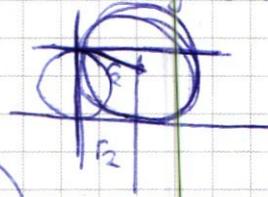
Ответ: $a=3 \quad b=2 \quad c=4$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{(2r_1^2 - r_2^2) \cdot BE}{2}$$

Два набора равных по
численности и размеру групп
разных чисел в них

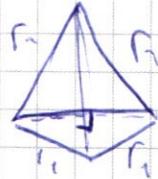


$$r_1^2 - (2r_1 - r_2)^2 = 4r_1^2 - 4r_1 r_2$$

$$BE(2r_1 - r_2)(r_1^2 - r_1 r_2) = 2r_1(2r_1 - r_2)\sqrt{r_1 - r_2}$$

$$\begin{cases} 4ax + 8y + 4cz = 4c \\ 3cx + 6cy + 4cz = 4bc \end{cases}$$

$$3cx + 6cy - 4cx - 8y = 4bc - 4c$$



$$(6c - 8)y = \dots$$

$$(r_2 - r_1)^2 + 4r_1^2 + 4r_1 r_2 = r_2^2 + 5r_1^2 + 2r_1 r_2$$

$$6c = 8$$

$$3cx + 8y + 4cz = 32$$

$$a = 2, b = 3 \Rightarrow 3c - 3cz + 8z - 24 \neq 0$$

$$3cx + 8y - 4cx - 8y = 32 - 4c$$

$$(8 - 3c)z \neq 24 - 3c$$

$$(3c - 4a)x = 32 - 4c$$

$$3ax + 6y + 3cz = 3c$$

$$3c = 4a$$

$$3ax + 6y + 4cz = 4ab$$

$$6y + 4cz - 6y - 3cz = 4ab - 3c$$

17/33

$$4\delta t = \frac{\pi}{3} + 22\pi \Rightarrow \delta t = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi D}{2} \text{ при } \pi = \theta \text{ переходит сама в себя}$$

N3

$$\sqrt{\dots} \geq 0 \quad 1 \geq 0 \quad \sqrt{\dots} \cdot 1 \geq 0 \quad |1| \geq 0 \Rightarrow (\sqrt{\dots} + 1) \cdot |1| \geq 0$$

$$28 = 7 \cdot 4$$

$$(\sqrt{3x^3 - 10x + 7} + 1) \cdot (x^3 - 18x + 28) = 0$$

$$|1| \sqrt{\dots} = - \quad x^3 - 18x + 28 = 0$$

$$x^3 - 4x^2 + 4x^2 - 16x$$

$$x^3 - 7x^2 + 7x^2 - 49x +$$

$$(x^3 - 2x) + (2x^2 - 4x) - (14x - 28) = 0$$

$$x^2(x-2) + 2x(x-2) - 14(x-2) = 0$$

$$(x^2 + 2x - 14)(x-2) = 0$$

$$x = 2$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 56}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{15}}{2} = -1 \pm \sqrt{15}$$

$$2x^4 + x^2 - 6x - 3x^3 + 9x^2 + 9 = 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 10x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$2x^4 + 2x^3 - 5x^3 - 5x^2 + 15x^2 + 15x - 2(x^2 - 2)$$

$$2x^4 - 4x^3 + x^3 - 2x^2 + 12x^2 - 24x - 18x - 36 \quad 3c - 6y - 3cz + by + 4z = 4b$$

$$2x^4 - 2x^3 + x^3 + x^2 + 9x^2 - 9x - 3x + 3$$

$$(2x^4 - 2x^3) - (x^3 - x^2) + (9x^2 - 9x) - (3x - 3)$$

$$2x^3(x-1) - x^2(x-1) + 9x(x-1) - 3(x-1)$$

$$(2x^3 - x^2 + 9x - 3)(x-1) = 0$$

$$2x^3 + 2x^2 - 3x^2 \quad 2x^3 - 2x^2 + x^2 - x$$

$$2x^3 - 2x^2 + x^2 + x - 8x + 3$$

$$2x^3 - 6x^2 + 5x^2$$

$$2x^3 - (3x+3) + 12x - 12x^2$$

$$2x^3 - x^2 \quad 3x + 2y + 4z = 4$$

$$a = 6 \quad b = 1$$

$$c = 8$$

$$6x + 2y + 8z = 8$$

$$3x + y + 4z = 4$$

$$4x + 2y + cz = c$$

$$3x + 6y + 4z = 4b$$

$$x = \frac{c - 2y - cz}{a}$$

$$3ac - 6y - 3cz + aby + 4az = 4ab$$

$$3c - 3cz + aby + 4az - 4ab = 6y - aby$$

$$3c - 3cz + ab + 4az - 4ab = y$$

$$\frac{3c}{6} - \frac{3cz}{6} + \frac{ab}{6} + \frac{4az}{6} - \frac{4ab}{6} = \frac{y}{6}$$

$$6 = ab$$

$$3c - 3cz + 4az = 24$$

$$(4a - 3c)z = 24 - 3c$$

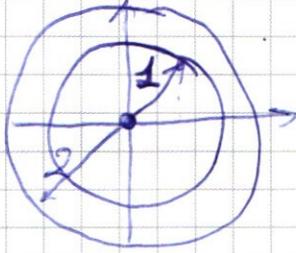
$$4a = 3c$$

$$a = 3 \quad b = 2 \quad c = 4$$

$$6 = ab$$

$$4a = 3c$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

$$2^2 + 0^2 = 4$$

$$\sqrt{\frac{15}{2}}$$

$$\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + y_1^2 = 1$$

$$x_2^2 + y_2^2 = 2$$

нч

$$2x^4 + x^2 - 6x - 3x^2(x-3) + 9 = 0$$

$$1) 2x^4 + x^2 - 6x - 3x^3 + 9x^2 + 9 = 0 \quad x > 3$$

$$2) 2x^4 + x^2 - 6x + 3x^3 - 9x^2 + 9 = 0 \quad x \leq 3$$

$$1) 2x^4 - 3x^3 + 10x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$2x^4 - x^3 - 2x^3 + x^2 + 9x^2 - 9x + 3x - 9$$

$$(2x^4 - 2x^3) - (x^3 + x^2) + (9x^2 - 9x) + (3x - 9)$$

$$(2x^4 - 6x^3) + (3x^3 - 9x^2) + 9x^2$$

$$70 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{70}$$

1, 2, 3, 4, 5, 6

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{70} + \left(\frac{1}{3}\right)^{68} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} +$$

$$+ \left(\frac{1}{3}\right)^{66} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$$

$$1 - \sqrt{15}$$

$$5 - 3\sqrt{2}$$

$$100 - 28 = 72 = 36 \cdot 2 = 18 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 =$$

$$= (3 \cdot 2)^2 \cdot 2$$

$$\frac{36}{2} = 18$$

11	12	13	14	15	16
22	23	24	25	26	
33	34	35	36		
44	45	46			
55	56				
66					

$$\frac{6+1}{2} \cdot 6 = 7 \cdot 3 = 21$$

$$70 - 420$$

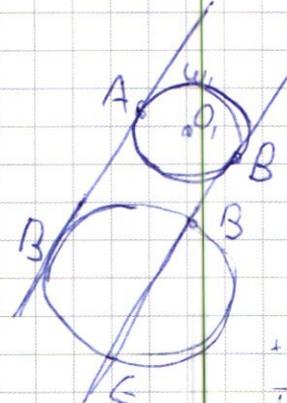
$$350 - 420$$

$$420 - 70 = 350$$

$$10 - 140$$

$$\frac{9}{33}$$

$$\frac{13}{33}$$



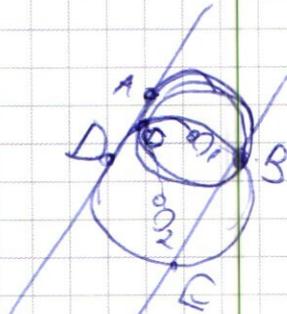
$$16 + 10 + 7 =$$

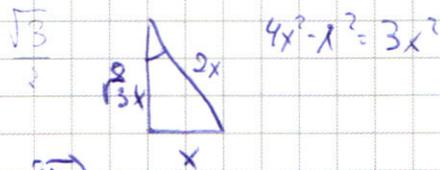
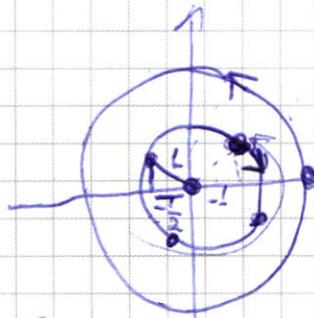
$$\frac{10}{14}$$

$$\frac{100}{56}$$

$$\frac{196}{196}$$

$$3 \times 1,4 = 3 + 1,2 = 4,2$$





$$\left(1; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$v_1 = 2\sqrt{3} \quad \omega_1 = 2\sqrt{3}$$

$$\left(2; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad (2; 0)$$

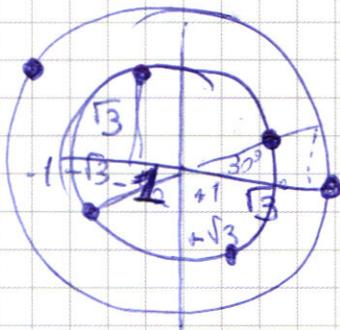
$$v_2 = -3\sqrt{3} \quad \omega_2 = -3\sqrt{3}$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$4\sqrt{3}t = \pi$$

$$\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}t = 0 - 3\sqrt{3}t$$

$$\boxed{4\sqrt{3}t = \frac{2\pi}{3}} \Rightarrow \sqrt{3}t = \frac{\pi}{6} \Rightarrow$$



$$4\sqrt{3}t = \frac{8\pi}{3} \Rightarrow \sqrt{3}t = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \frac{4\pi}{6}$$

$$4\sqrt{3}t = \frac{14\pi}{3} \Rightarrow \sqrt{3}t = \frac{7\pi}{6}$$

$$4\sqrt{3}t = \frac{20\pi}{3} \Rightarrow \sqrt{3}t = \frac{5\sqrt{3}}{3} = \frac{10\pi}{6}$$

$\sqrt{3}$

$$\left(\sqrt{3}; 1\right), \left(\sqrt{3}-1; \sqrt{3}\right), \left(\sqrt{3}; -1\right)$$

$$\left(\sqrt{3}; 1\right), \left(-1; \sqrt{3}\right), \left(-\sqrt{3}; -1\right), \left(1; -\sqrt{3}\right)$$

$$\begin{cases} ax + 2y + cz = c \\ 3x - 6y + 4z = 4b \end{cases}$$

$$x = \frac{2y + cz - c - 2y}{a}$$

$$x = \frac{4b - 4z - 6y}{3}$$

$$\frac{3c - 3cz - 6y}{a} + 6y + 4z = 4b \quad 4b = 4z - 6y + \frac{3c - 3cz - 2y}{a}$$

$$3c - 3cz - 6y - 6ya + 4za = 4ba \quad 4ba - 4za - 6ya \neq 3c - 3cz - 6y$$

$$(6 - 6a)y = 3c - 3cz + 4za - 4ba$$

$$y = \frac{3c - 3cz + 4za - 4ba}{6 - 6a} \quad a = 6 \Rightarrow 3c - 3cz + 4za - 24 \neq 0$$

$$3c - 12 = 7c - 4a = 3b = 2 \Rightarrow 3c - 3cz + 12a - 24 \neq 0$$

$$12 - 3c = 0 \quad 24 + 3c \neq 0 \quad (12 - 3c)z \neq 24 + 3c$$