

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в папку
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Муравей движется по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0(-1; \sqrt{3})$ и $N_0(2\sqrt{3}; 2)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.
2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a, \\ 4bx + (a+b)y = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

- 3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$.
- 4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$.
- 5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
- 6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- 7. [6 баллов] Решите систему

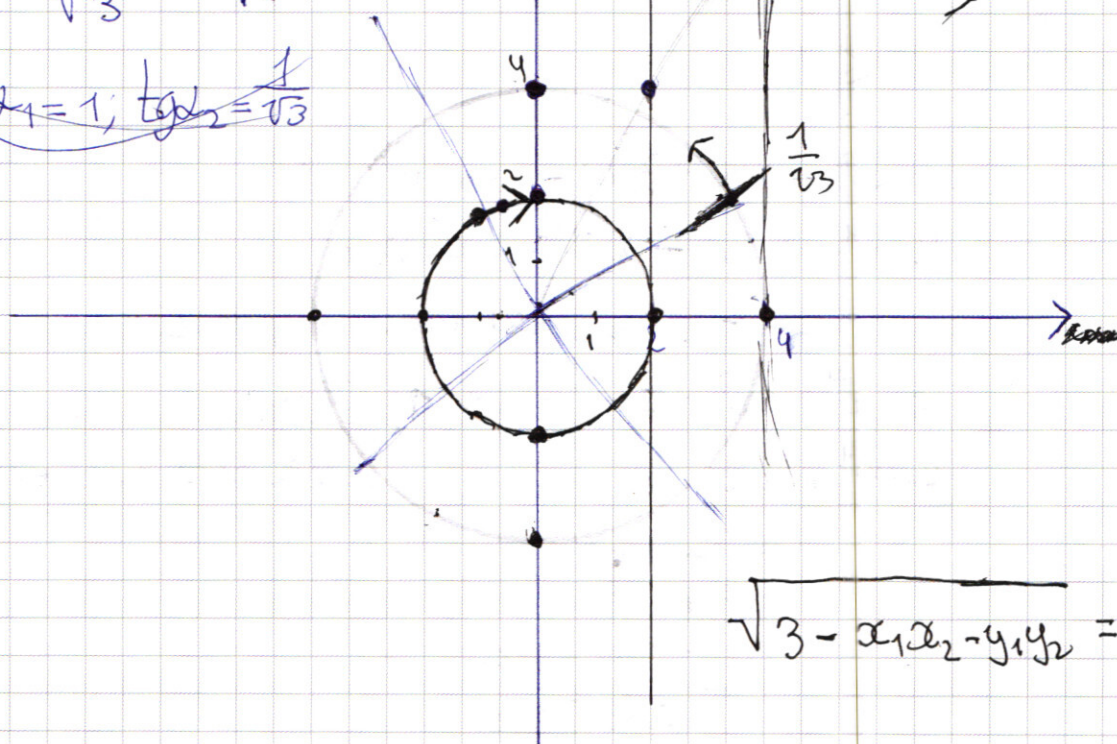
$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6, \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25. \end{cases}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} + k = -\frac{1}{\sqrt{3}} + 2k$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = k$$

$$\text{tg} \alpha_1 = 1; \text{tg} \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} \text{tg} \alpha_1 &= \text{tg} \alpha_2 \\ \text{tg} \alpha_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{tg} \alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$



$$(-1)^2 + (\sqrt{3})^2 = R^2$$

$$1 + 3 = R^2$$

$$R = 2$$

⊗

$$x_1^2 + y_1^2 = 2$$

$$x_2^2 + y_2^2 = 4$$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \min$$

$$\sqrt{x_2^2 + x_1^2 + y_1^2 + y_2^2 - 2x_1x_2 - 2y_1y_2} = \min$$

$$\sqrt{6 - 2x_1x_2 - 2y_1y_2} = \min$$

$$(2\sqrt{3})^2 + (2)^2 = R^2$$

$$4 \cdot 3 + 4 = R^2$$

$$R = 4$$

$$\frac{x_1}{y_1} = \pm \sqrt{3}$$

$$x_1^2 + y_1^2 = 2$$

$$x_1 = \pm \sqrt{3} y_1$$

$$3y_1^2 + y_1^2 = 2$$

$$y_1^2 = \frac{1}{2}$$

$$y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$D_{\text{н}} x \leq 1$$

$$2x^4 + x^2 - 2x + 3x^3 - 3x^2 + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$x = -1$ является корнем

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \bigg| x + 1 \\ \underline{2x^4 + 2x^3} \\ x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \\ \underline{x^3 + x^2} \\ -3x^2 - 2x + 1 \\ \underline{-3x^2 - 3x} \\ x + 1 \\ \underline{x + 1} \\ 0 \end{array} \quad \frac{2}{8} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 1 = 0$$

$$(x+1)(2x^3 + x^2 - 3x + 1) = 0$$

$$(x+1)\left(2x - \frac{1}{2}\right)(x^2 + x - 1) = 0$$

$$(x+1)(2x-1)(x^2+x-1) \geq 0$$

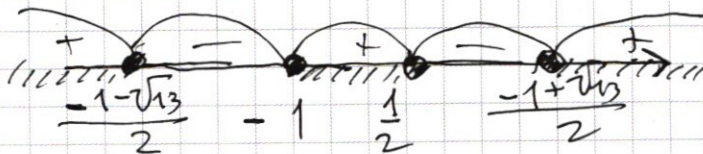
$$\begin{array}{r} 2x^3 + x^2 - 3x + 1 \bigg| 2x - 1 \\ \underline{2x^3 - x^2} \\ 2x^2 - 3x + 1 \\ \underline{2x^2 - x} \\ -2x + 1 \end{array}$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$D = 1 + 12 = 13$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$$

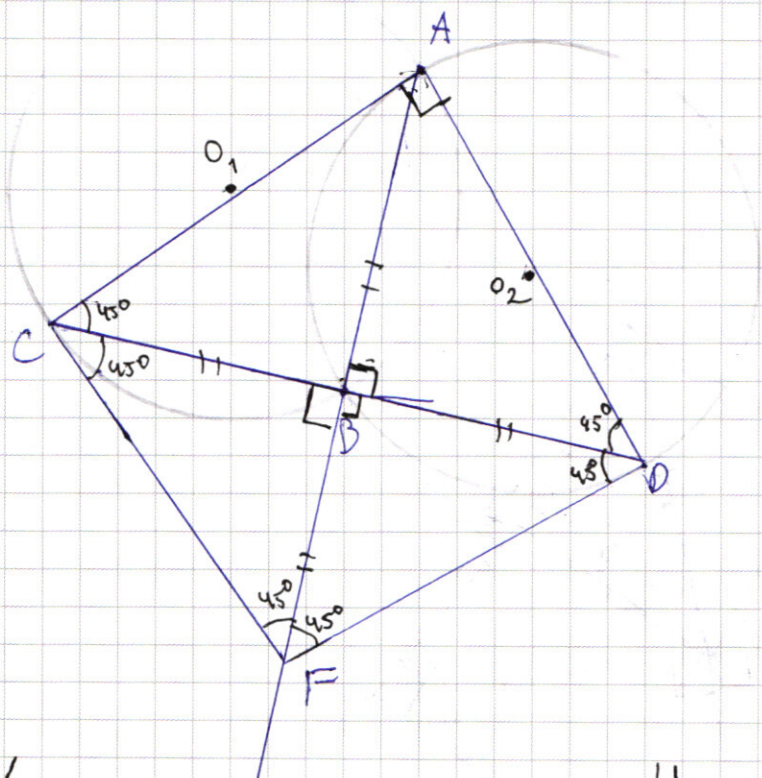
$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$$



$$x \in \left(-\infty; \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[-1; \frac{1}{2}\right]$$

$\sqrt{6} +$

1, 2, ③, 4, ⑤, ⑥, ⑦



$$\sqrt{2 \cdot 8^2} = 8\sqrt{2}$$

Омберн: $9\sqrt{2}$

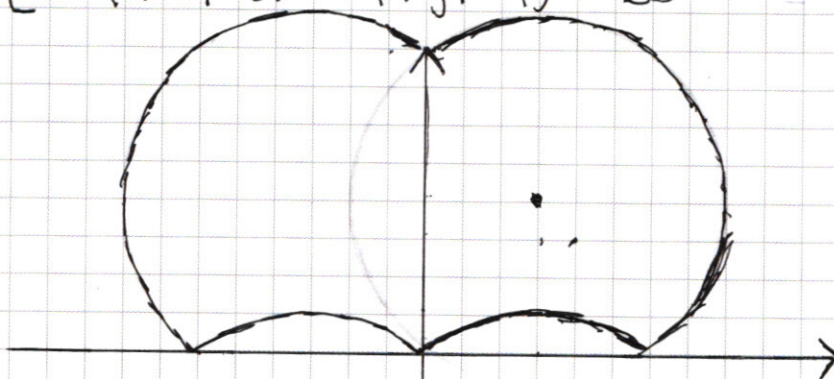
$$\sqrt{2 \cdot 9\sqrt{2}} =$$

$$3\sqrt{2 \cdot \sqrt{2}} = 3\sqrt[4]{8}$$

$\sqrt{7}$

y

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6 \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25 \end{cases}$$

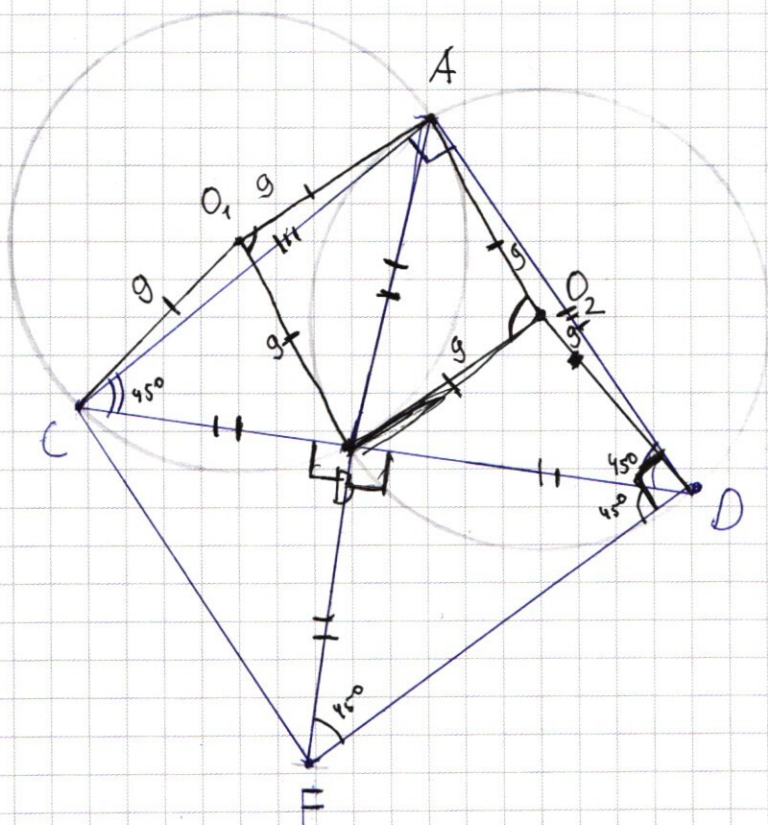


$$2 \cdot 1 - 3 + 4 - 2 + 1 = 2 + 4 + 1 - 5 = 2$$

$$2 \cdot 16 - 3 \cdot 8 + 4 \cdot 4 - 2 \cdot 2 + 1 =$$

$$= 32 + 16 - 24 - 4 + 1 = 21$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№4

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2 \mid x-1 \mid + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2 \mid x-1 \mid + 1 \geq 0$$

Пусть $x \geq 1$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^3 + 3x^2 + 1 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

~~$x = \frac{1}{2}$~~

~~$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 = 0$~~
 ~~$\frac{2}{16} - \frac{3}{8} + \frac{4}{8} - \frac{2}{4} + 1 = 0$~~
 ~~$\frac{2}{16} - \frac{3}{8} + 1 - 1 + 1 = 0$~~
 ~~$\frac{2}{16} - \frac{3}{8} + 1 = 0$~~

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$y = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1$$

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x = x(2x^3 - 3x^2 + 4x - 2)$$

$$2x_1^4 - 3x_1^3 + 4x_1^2 - 2x_1 < 2x_2^4 - 3x_2^3 + 4x_2^2 - 2x_2$$

$$x_2 > x_1 \geq 1$$

$$3x_2^3 - 3x_1^2 + 2x_2 - 2x_1 < 2x_2^4 - 2x_1^4 + 4x_2^2 - 4x_1^2$$

$$3x_2^3 - 3x_1^3 < 2x_2^4 - 2x_1^4 + 2x_2^2 - 4x_1^2$$

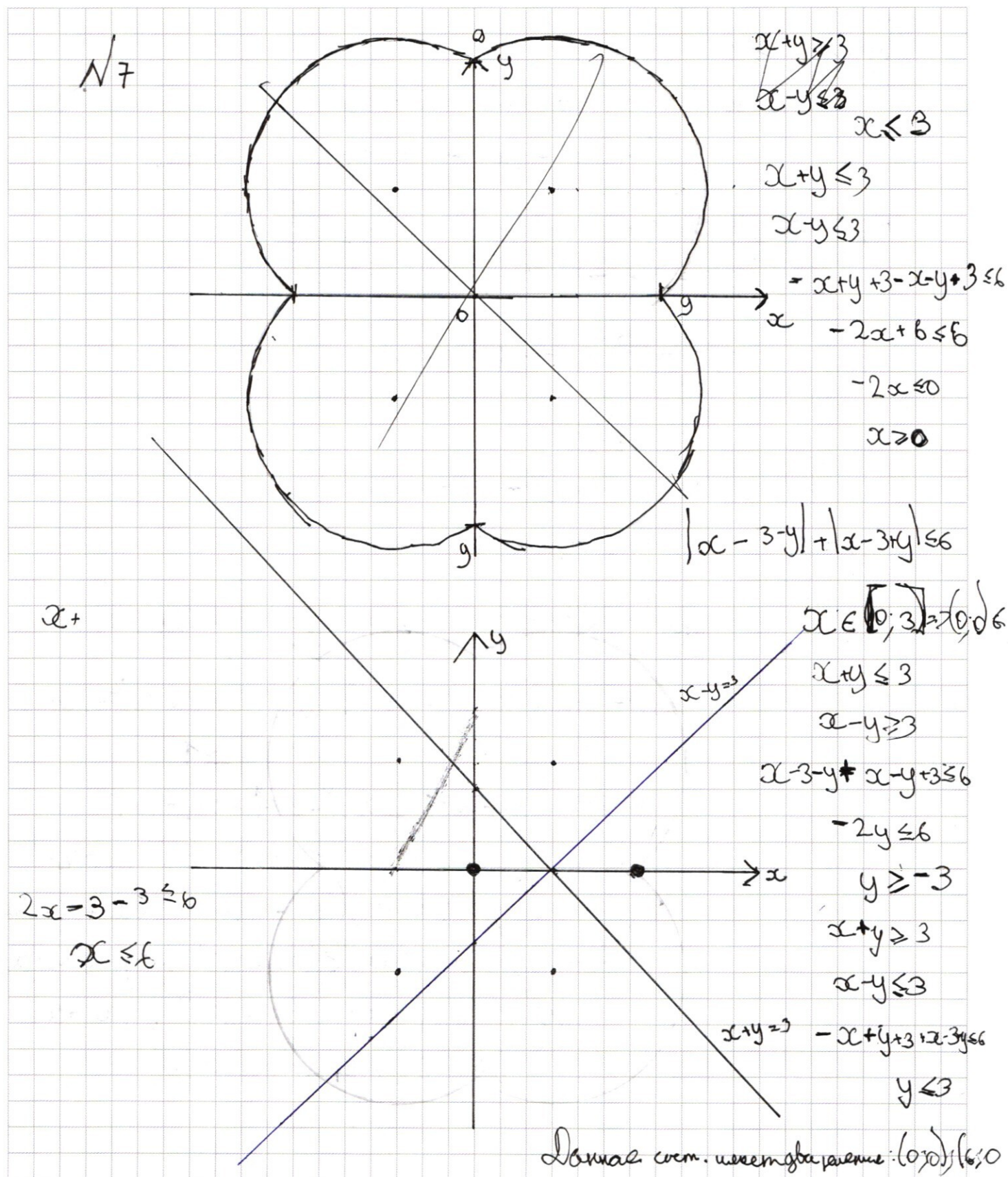
$$1,5(x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2) < x_2^4 + x_2^2 - x_1^4 - x_1^2$$

$$1,5(x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2) < (x_2^2 + x_1^2)(x_2 + x_1)(x_2 - x_1) + (x_2^2 + x_1^2) \dots$$

$$1,5(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2) < (x_2^2 + x_1^2 + 1)(x_2 + x_1)$$

$$1,5(x_2 + x_1) < (x_2^2 + x_1^2 + 1)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$I \quad \frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 1680$$

$$II \quad \frac{8!}{2! \cdot 3!} = 3360$$

$$III \quad \frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 =$$

$$= 28 \cdot 30 = 840$$

$$\begin{array}{r} +1680 \\ 3360 \\ +840 \\ \hline 5880 \end{array}$$

Answer: 5880.

№2

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = 4 \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(a+b) = 0, \\ 4b = 0; \end{cases} \Rightarrow a, b = 0$$

$$\begin{cases} 3(a+b) = 4b & (a=1) \\ 12 = (a+b)b \end{cases}$$

~~scribble~~

$$\begin{aligned} 3 \cdot (b+1) &= 4 \\ 12 &= b^2 + b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3b + 3 &= 4 \\ b &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$\sqrt{2}$

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a & * 4b \\ 4bx + (a+b)by = 1 & * 3(a+b) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 4b &\neq 0 \\ a+b &\neq 0 \end{aligned}$$

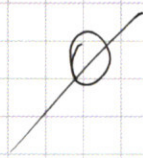
$$\begin{array}{r} 216 \overline{) 2} \\ 108 \overline{) 2} \\ 54 \overline{) 6.9} \end{array}$$

$$48by - 3(a+b)^2by = a-1$$

$$y(48b - 3(a+b)^2b) = a-1 \Rightarrow a=1$$

$$\begin{cases} 3(a+b) = 4b \\ 12 = (a+b)b \end{cases} (a=1) \quad \text{~~ay=0~~}$$

$$\begin{cases} 3+3b = 4b \\ 12 = (b+1)b \end{cases} \quad b=1$$



$$48b - 3(a+b)^2b = 0$$

$$48 - 3(1+b)^2 = 0$$

$$48 - 3 - 6b - b^2 = 0$$

$$b^2 + 6b - 45 = 0$$

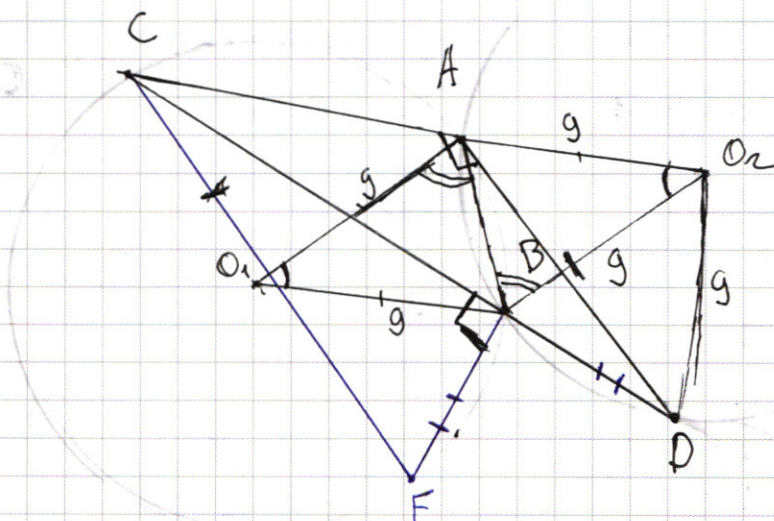
$$D = 36 + 180 =$$

$$= 216$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \sqrt{216} \\ 45 \\ 4 \\ \hline 180 \\ 36 \\ \hline 216 \end{array}$$

$$(a+b)by =$$

$\sqrt{6}$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt[3]{(x+3)\sqrt{x^3-x+10}} = x^2+5x+6$$

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = (x+2)(x+3)$$

$$x+3=0 \quad \text{или} \quad x+2=\sqrt{x^3-x+10}$$

$$x=-3$$

$$(x+2)^2 = x^3 - x + 10$$

$$\frac{-1+\sqrt{13}}{2} + 2 = \sqrt{\left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right)^3 + \frac{-1-\sqrt{13}}{2} + 10}$$

$$x^2+4x+4 = x^3-x+10$$

$$x^3-x^2-5x+6=0$$

~~$$\frac{-1+\sqrt{13}}{2} + 2 = \sqrt{\left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right)^3 + \frac{-1-\sqrt{13}}{2} + 10}$$~~

$x=1$ является корнем
данного уравнения

$x=2$ является

~~$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 - 5x + 6 \mid x-1 \\ \underline{x^3 - x^2} \\ - 5x + 6 \\ + 6 \end{array}$$~~

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 - 5x + 6 \mid x-2 \\ \underline{x^3 - 2x^2} \\ x^2 - 5x \\ \underline{x^2 - 2x} \\ - 3x + 6 \end{array}$$

$$(x-2)(x^2+x-3)=0$$

$$x^2+x-3=0$$

$$D=1+12=13$$

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$$

$$\left(3 + \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)$$

$$\sqrt{\left(-\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^3 + \frac{-1-\sqrt{13}}{2} + 10} =$$

Ответ: $-3; 2; \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$.

№5

$$\begin{array}{r|l} 1400 & 2 \\ 700 & 2.5 \\ 70 & 2.5 \\ 7 & 7 \end{array}$$

$$1400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$$

Значит, в числе произведение ~~которых~~

либо 3 раза 2, 5, 5, 2, 2, 2, 5, 5, 7, 1, 1

либо 2, 4, 5, 5, 7, 1, 1, 1

либо 8, 5, 5, 7, 1, 1, 1, 1

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 70 \\ \hline 1680 \\ + 2 \\ \hline 3360 \end{array}$$

$$I \quad \frac{8!}{2 \cdot 2} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 4} =$$

$$= 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 24 \cdot 10 \cdot 7 = 1680$$

$$II \quad \frac{8!}{2 \cdot 6} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 6} =$$

$$= 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 24 \cdot 140 = 3360$$

$$III \quad \frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4! \cdot 2!} =$$

I 2, 2, 2, 5, 5, 7, 1, 1

2_I 2_{II} 2_{III}

2_I 2_{III} 2_{II}

2_{II} 2_I 2_{III}

2_{II} 2_{III} 2_I

2_{III} 2_I 2_{II}

2_{III} 2_{II} 2_I

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$$

$$2! = 2$$

1122

2, 2, 1

1122

122

(212

212

1221

221

2211

2121

2112

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$$

Разложим на множители правую часть.

$$x^2+5x+6 = (x+2)(x+3)$$

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = (x+2)(x+3)$$

$$\Downarrow$$

$$x+3=0 \text{ или } \begin{cases} x+3 \neq 0 \\ x+2 = \sqrt{x^3-x+10} \end{cases}$$

$$x = -3$$

$$x+2 = \sqrt{x^3-x+10}$$

Возведем обе части в квадрат.

$$(x+2)^2 = x^3-x+10$$

$$x^2+4x+4 = x^3-x+10$$

$$x^3-x^2-5x+6 = 0$$

$x=2$ является корнем данного уравнения

Разделим x^3-x^2-5x+6 на $x-2$ по схеме Горнера

$$\begin{array}{r} 1 & -1 & -5 & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 & 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}$$

$$(x-2)(x^2+x-3) = 0$$

$\Downarrow$

$$x-2=0 \text{ или } x^2+x-3=0$$

$$x=2$$

$$D = 1+12 = 13$$

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}; x_2 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$$

Проверим найденные корни подстановкой в исходное уравнение.

$x = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$ не является корнем исходного уравнения.

Ответ: $-3; 2; \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$.

✓5

Разложим 1400 на простые множители:

$$1400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7.$$

2^3 может входить в число либо в виде трёх двоек, либо четвёрки и двойки, либо восьмёрки.

Значит наше число может состоять из одного из трёх наборов цифр:

1) 1, 1, 2, 2, 2, 5, 5, 7

2) 1, 1, 1, 2, 4, 5, 5, 7

3) 1, 1, 1, 1, 8, 5, 5, 7

1) Всего вариантов составить число из 8 цифр - $8!$, но у нас по 2 раза повторяются 1 и 5 и 3 раза повторяется 2 $\Rightarrow K_1 = \frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} = 1680$

2) Аналогично 1) $K_2 = \frac{8!}{2! \cdot 3!} = 3360$

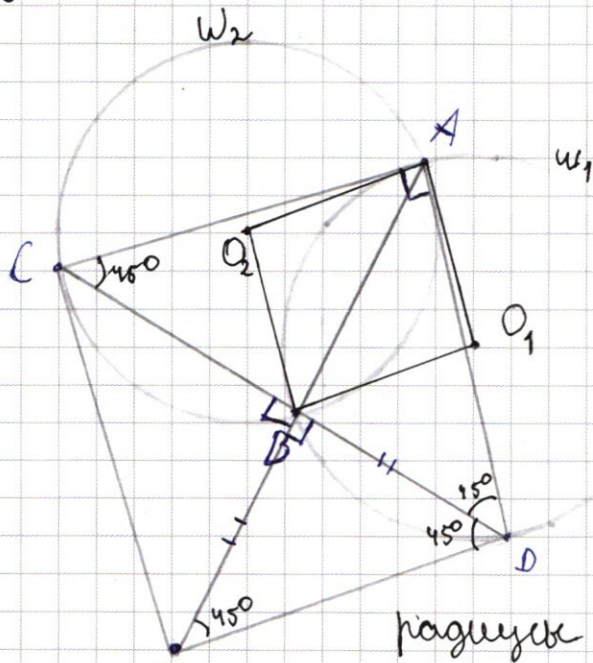
3) Аналогично, $K_3 = \frac{8!}{4! \cdot 2!} = 840$

$1680 + 3360 + 840 = 5880$ (мы можем складывать кол-во вариантов т.к. наборы не пересекаются).

Ответ: 5880.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6



условию

$O_1A = O_1B = O_2B = O_2A \Rightarrow AO_1BO_2$ - равно (по признаку)

$$\angle BO_2A = \angle BO_1A$$

$\angle BO_1A$ - центральный и опирается на дугу AB в окружности W_1 , $\angle BO_2A$ - центральный и опирается на дугу AB в окружности $W_2 \Rightarrow$ Дуги AB в окружностях W_1 и W_2 равны

Значит, $\angle ACB = \angle ADB$ (вписанные опираются на равные дуги).

П.к. $\angle CAD = 30^\circ$, $\angle ACB = \angle ADB = 45^\circ$.

$\angle AO_1B = 2 \cdot \angle ADB$ (вписанный угол равен половине центрального)
 $\angle AO_1B = 90^\circ$.

По теореме Пифагора из $\triangle AO_1B$

$$AB^2 = AO_1^2 + BO_1^2 \Rightarrow AB = 3\sqrt{2}$$

$$\angle FDC = \angle ACD \Rightarrow FD \parallel AC \text{ (признак параллельности)},$$

Вокруг четырехугольника $FDAC$ можно описать окружность, т.к. $\angle CAD + \angle FDA = 180^\circ$.

$$\angle FCD = \angle ADC \Rightarrow AD \parallel CF \text{ (признак параллельности)}$$

Значит, $FDAC$ - параллелограмм (по определению)

$$\begin{aligned} AB &= BF \\ BD &= BC \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} \text{по свойству} \\ \text{параллелограмма} \end{array} \right)$$

$$AB = BF = BD = BC = 9\sqrt{2}$$

По теореме Пифагора из $\triangle CBF$,

$$BF^2 + CB^2 = FC^2$$

$$CF = \sqrt{BF^2 + CB^2} = 18$$

Ответ: 18.

№ 4

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2 \mid x-1 \mid + 1 \geq 0$$

$$I \quad x \geq 1$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^3 + 3x^2 + 1 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$\text{При } x=1, 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 = 2 \Rightarrow 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$\forall x \in [1; +\infty) \text{ т.к. } y = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1.$$

возрастающая функция на данном промежутке.

$$II \quad x < 1$$

$$2x^4 + x^2 - 2x + 3x^3 - 3x^2 + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$x = -1$ является корнем

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(x+1)(2x^3+x^2-3x+1) \geq 0$$

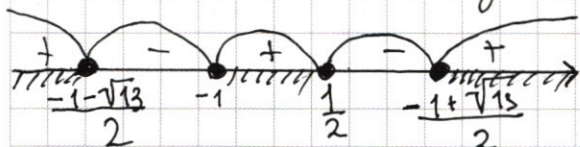
$x = \frac{1}{2}$ является корнем

$$(x+1)(2x-1)(x^2+x-1) \geq 0$$

$$x^2+x-1 = \left(x - \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x + \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$$

$$(x+1)\left(2x-1\right)\left(x - \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x + \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \geq 0$$

Решим данное неравенство методом интервалов.



Но т.к. $x < 1$, $x \in (-\infty; \frac{-1-\sqrt{13}}{2}] \cup [-1; \frac{1}{2}]$.

Ответ: $x \in (-\infty; \frac{-1-\sqrt{13}}{2}] \cup [-1; \frac{1}{2}] \cup [1; +\infty)$.

✓7

$$\begin{cases} |x-y-3| + |x+y-3| \leq 6 \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25 \end{cases}$$

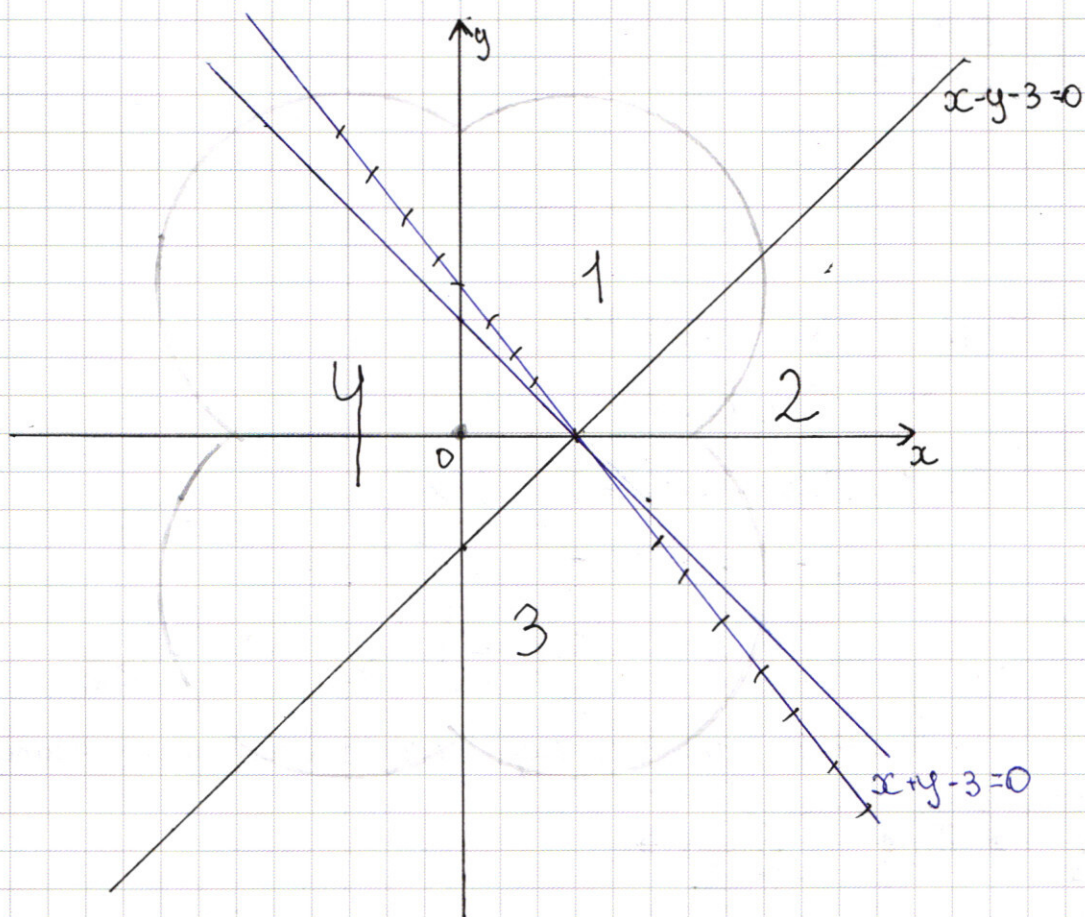
Решим данную
систему графически

$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$ - окружность с центром
в точке $(3; 4)$ и радиусом 5, но т.к.

и нас x и y в модуле, нам надо будет отразить
часть окружности из I четверти во II, III и IV

Проведём на данном графике прямые

$$x+y-3=0 \text{ и } x-y-3=0$$



Рассмотрим часть фигуры в области 1.

Тогда $x - y - 3 \leq 0$, а $x + y - 3 > 0$. Рассмотрим неравенство.

$$-x + y + 3 + x - 3 + y \leq 6$$

$$2y \leq 6 \Rightarrow y \leq 3$$

Во всей части фигуры, расположенной в области 1 нет точки с координатой $y \leq 3$

Рассмотрим область 2. Там $x - y - 3 > 0$, $x + y - 3 > 0$

$$x - 3 - y + x - 3 + y \leq 6$$

$$2x \leq 12$$

$$x \leq 6$$

В данной части этому неравенству удовлетворяет только точка $(6; 0)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Рассмотрим область 3. Там $x-y-3 > 0$, а $x+y-3 < 0$.

$$x-y-3 - x-y+3 \leq 6$$

$$-2y \leq 6$$

$$y \geq -3$$

Данному неравенству не удовлетворяет ни одна из точек фигуры в данной области.

Рассмотрим область 4. Там $x-y-3 < 0$ и $x+y-3 < 0$.

$$-x+y+3 - x-y+3 \leq 6$$

$$-2x \leq 6$$

$$-2x \leq 0$$

$$x \geq -3$$

$$x \geq 0$$

Данному неравенству не удовлетворяет ни одна из точек фигуры в данной области.

Ещё осталось не принадлежащая ни одной из областей точка $(0; 0)$. При подстановке $x=y=0$ в систему мы получаем верное равенство и неравенство.

Ответ: $(6; 0); (0; 0)$.

✓

Очевидно, что ~~наш ответ~~

Пусть уравнение окружности муровья имеет вид $x_1^2 + y_1^2 = R_1^2$, а жук - $x_2^2 + y_2^2 = R_2^2$

Подставляя туда координаты точек M_0 и N_0 , получаем $R_1 = 4$, $R_2 = 4$.

Наименьшее расстояние будет достигнуто в тот момент, когда радиус, проведенный в точку где касается жук будет проходить и через муравья.

Значит, должны быть равны тангенсы углов между радиусами и осью Ox . Тангенс угла муравья будет изменяться в 2 раза быстрее, так как радиус его окружности в 2 раза меньше.

В начальной точке, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

В момент, когда расстояние будет наименьшим,

$$\operatorname{tg} \alpha + 2k = \operatorname{tg} \alpha + k$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} + 2k = \frac{1}{\sqrt{3}} + k \Rightarrow k = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Значит, в момент достижения кратчайшего расстояния $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3} \Rightarrow$ ее координата - $(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Ответ: $(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.