

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Вокруг птичьей кормушки в одной плоскости с ней по двум окружностям с одинаковой скоростью летают синица и снегирь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой кормушка (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Синица движется по часовой стрелке, а снегирь – против. В начальный момент времени синица и снегирь находятся в точках $M_0(\sqrt{3}; 3)$ и $N_0(6; -2\sqrt{3})$ соответственно. Определите координаты всех положений снегиря, в которых расстояние между птицами будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a, \\ 3bx + (a-b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

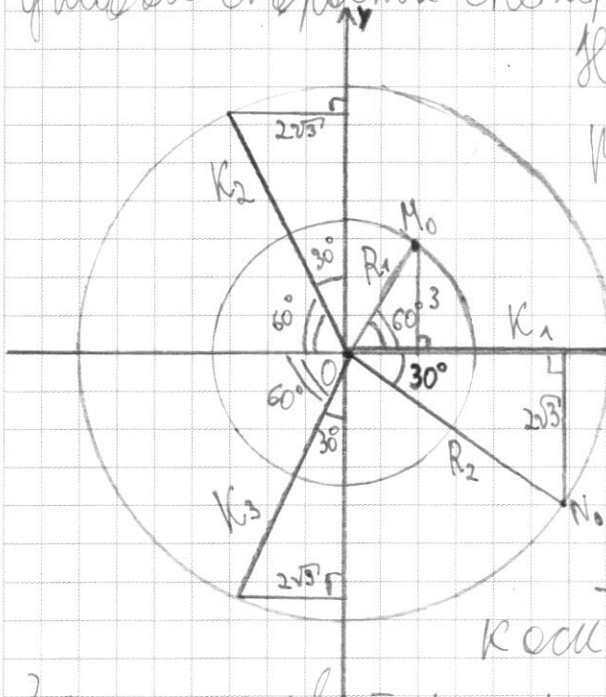
3. [4 балла] Решите уравнение $\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2|x+1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 7000. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 7 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10, \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Радиус окружности, описываемой синицей равен $\sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} = R_1$; радиус окр. описываемой скелерей равен $\sqrt{6^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{36 + 12} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} = R_2$. Мы знаем, что $l = 2\pi R$. Из этого можно понять, что $\frac{l_2}{l_1} = \frac{2\pi R_2}{2\pi R_1} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 2$. Следовательно, угловая скорость синицы в 2 раза больше угловой скорости скелера.



Нетрудно понять, что кратчайшее расстояние между ними достигается, когда R_1 лежит на R_2 .

Изначально угол между линиями равен 90° , т.к.

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \frac{\sin 60^\circ}{\frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}} = \frac{3}{2\sqrt{3}}$$

$\frac{90^\circ \cdot 2}{3} = 60^\circ$ - изменение угла синицы к осм. Получим положение K_1 .

Значит, первый раз кратчайшее расстояние мы получим, когда координаты скелера будут $(4\sqrt{3}; 0)$.

До следующей таковой ситуации K_2 синица пролетит $\frac{360^\circ \cdot 2}{3} = 240^\circ$, а координата скелера будет $(-2\sqrt{3}; 6)$; До K_3 синица пролетит ещё 240° и координата скелера будет $(-2\sqrt{3}; -6)$.

Все последующие K будут совпадать с предыдущими, и, следовательно, координаты скелера тоже совпадут.

Ответ: $(4\sqrt{3}; 0); (-2\sqrt{3}; 6); (-2\sqrt{3}; -6)$.

У5.

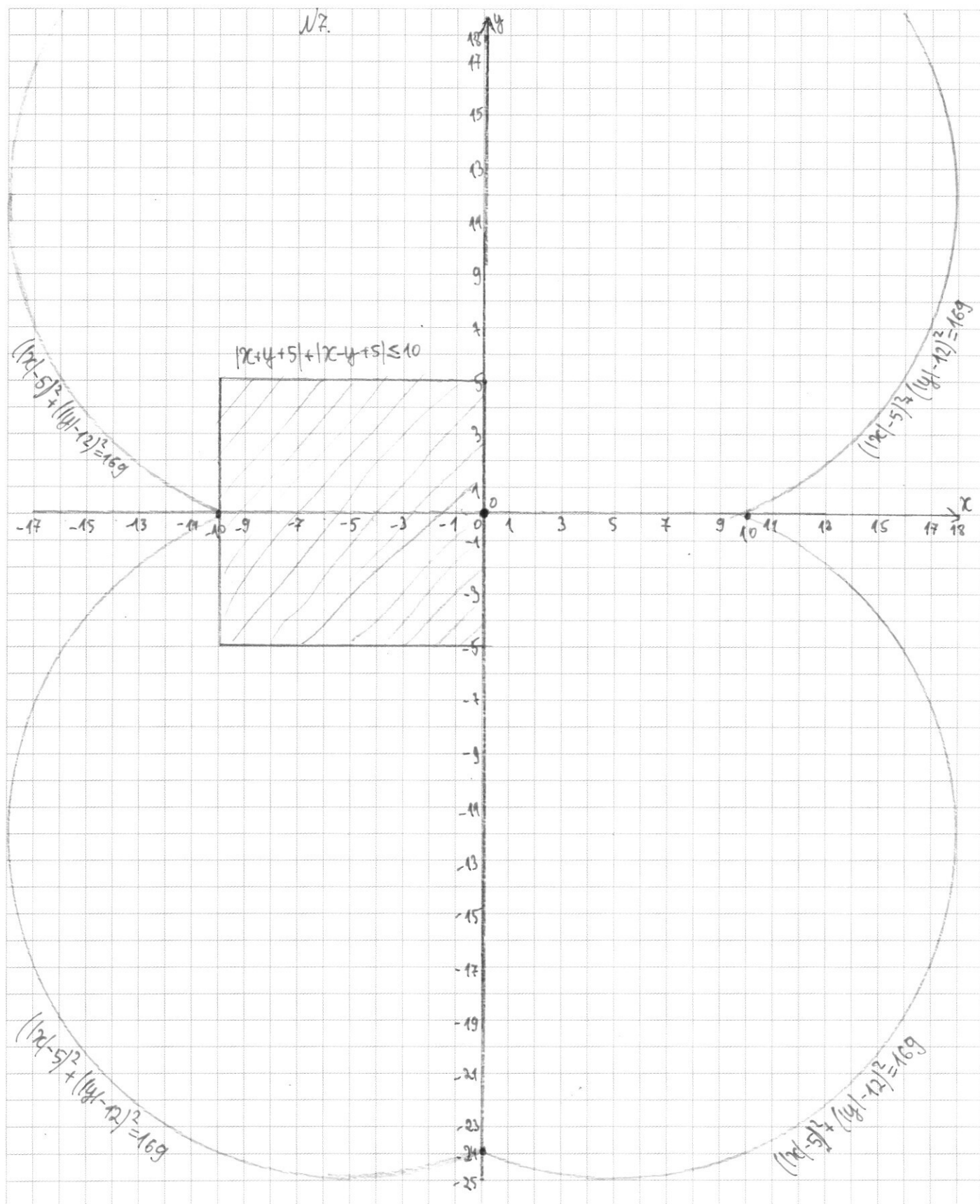
$7000 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 7 = 4 \cdot 2 \cdot 5^3 \cdot 7 = 8 \cdot 5^3 \cdot 7$ - это все возможные разложения числа 7000 на однозначные натуральные множители.
(не учитывая 1)

кол-во восьмизначных чисел, имеющих в своей десятичной записи цифры 2; 2; 2; 5; 5; 5; 7 и 1, поскольку умножение на 1 не изменяет результат равно $\frac{8!}{3! \cdot 3!}$; кол-во таких же чисел, состоящих из цифр 2; 4; 5; 5; 5; 7 и 1; 1 равно $\frac{8!}{3! \cdot 2!}$; кол-во таких же чисел из цифр 8; 5; 5; 5; 7 и 1; 1; 1 равно $\frac{8!}{3! \cdot 3!}$.

$$\frac{8!}{3! \cdot 3!} + \frac{8!}{3! \cdot 2!} + \frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{2 \cdot (8!)}{3! \cdot 3!} + \frac{3 \cdot (8!)}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot (8!)}{3! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 5 = 5600$$

Ответ: 5600.

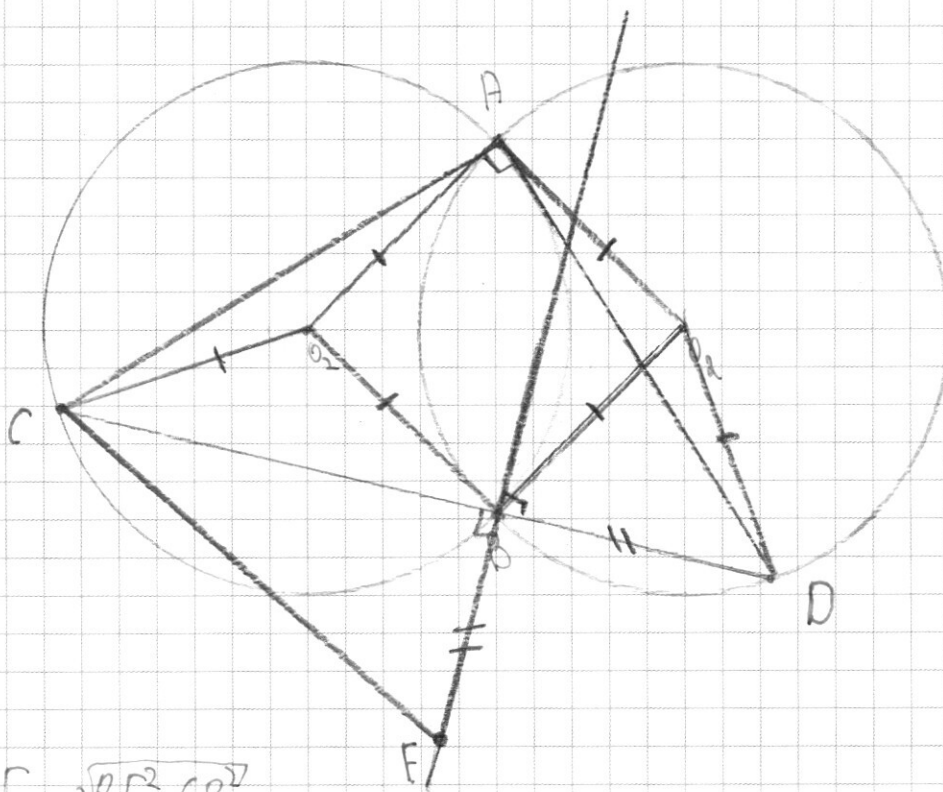
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Графики данных функций имеют 2 точки пересечения:
 $(0;0)$ и $(-10;0)$

Ответ: $(0;0) \vee (-10;0)$

№6.



$$CF = \sqrt{BF^2 + CB^2}$$

$$CB^2 = CO_2^2 + BO_2^2 - 2(\cos \angle CO_2B) \cdot CO_2 \cdot BO_2$$

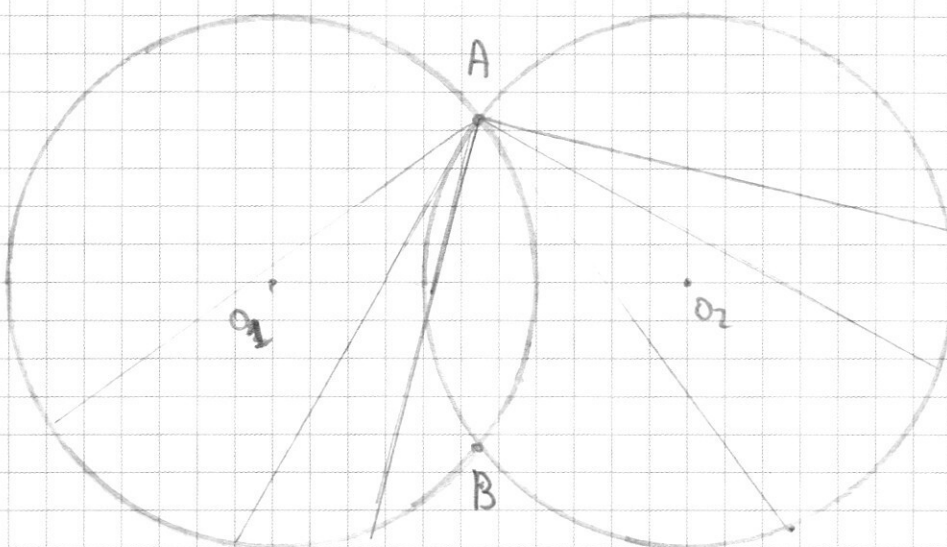
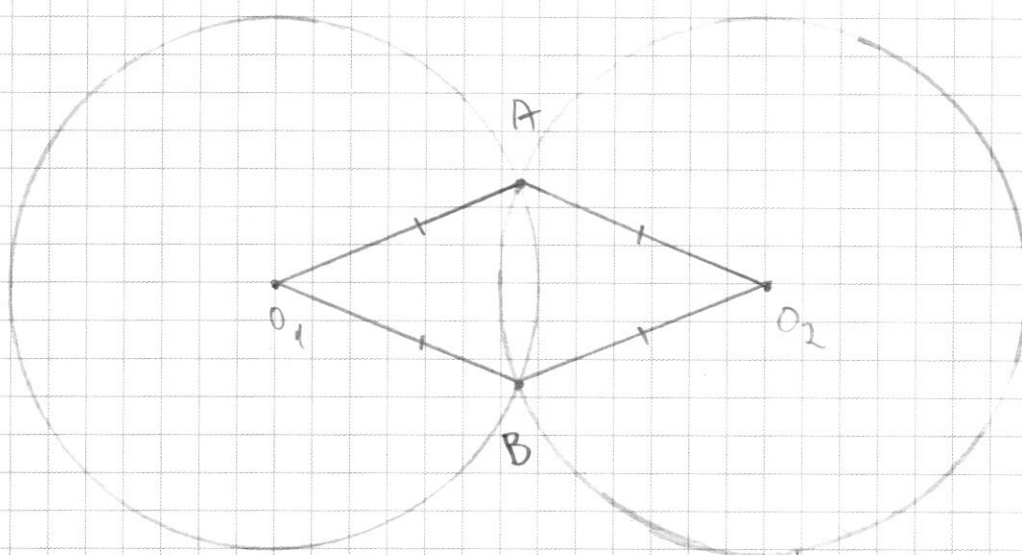
$$BF^2 = BD^2 = BO_2^2 + DO_2^2 - 2(\cos \angle BO_2D) \cdot BO_2 \cdot DO_2$$

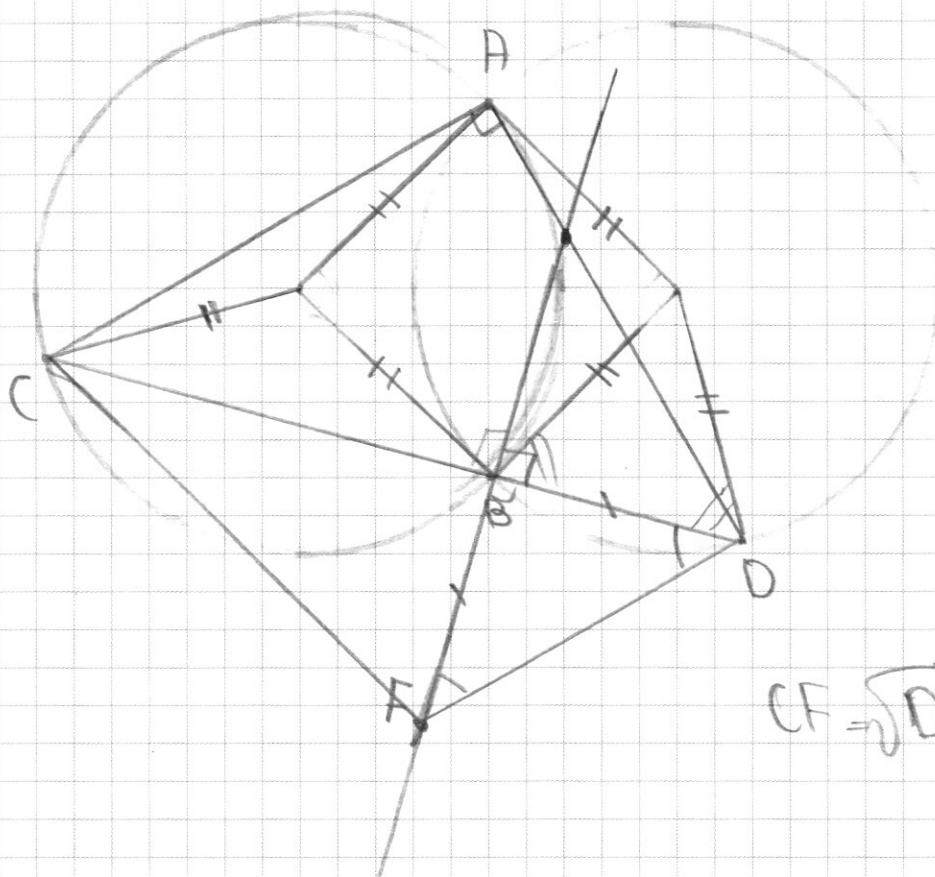
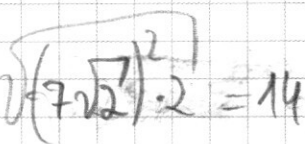
$$CF = \sqrt{49 + 49 - 2 \cdot 49 \cdot (\cos \angle CO_2B) + 49 + 49 - 2 \cdot 49 \cdot (\cos \angle BO_2D)} = \sqrt{4 \cdot 49 - 2 \cdot 49 \cdot (\cos \angle CO_2B + \cos \angle BO_2D)}$$

$$\cos \angle CO_2B + \cos \angle BO_2D = 0$$

$$CF = \sqrt{4 \cdot 49} = 2 \cdot 7 = 14.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



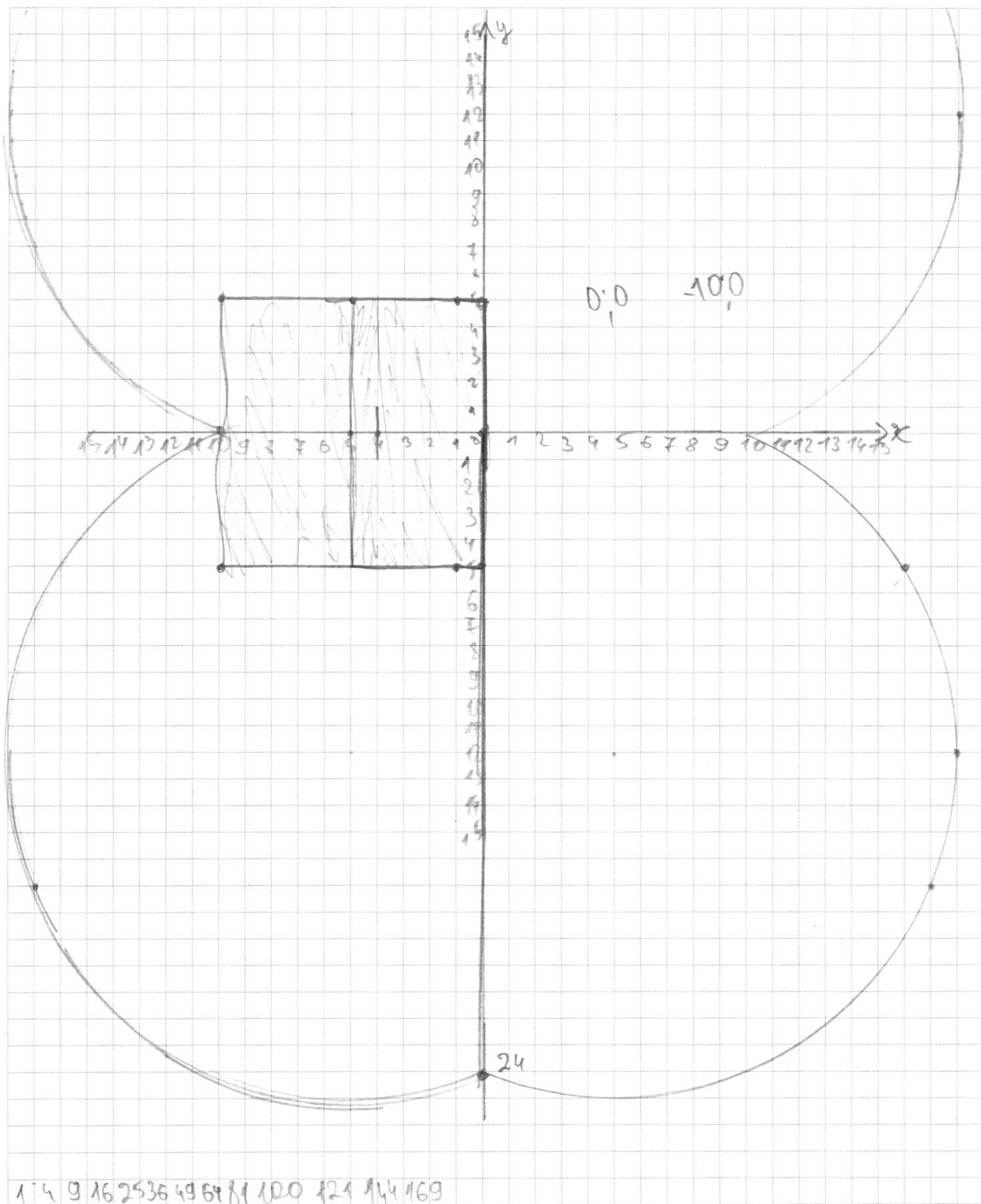


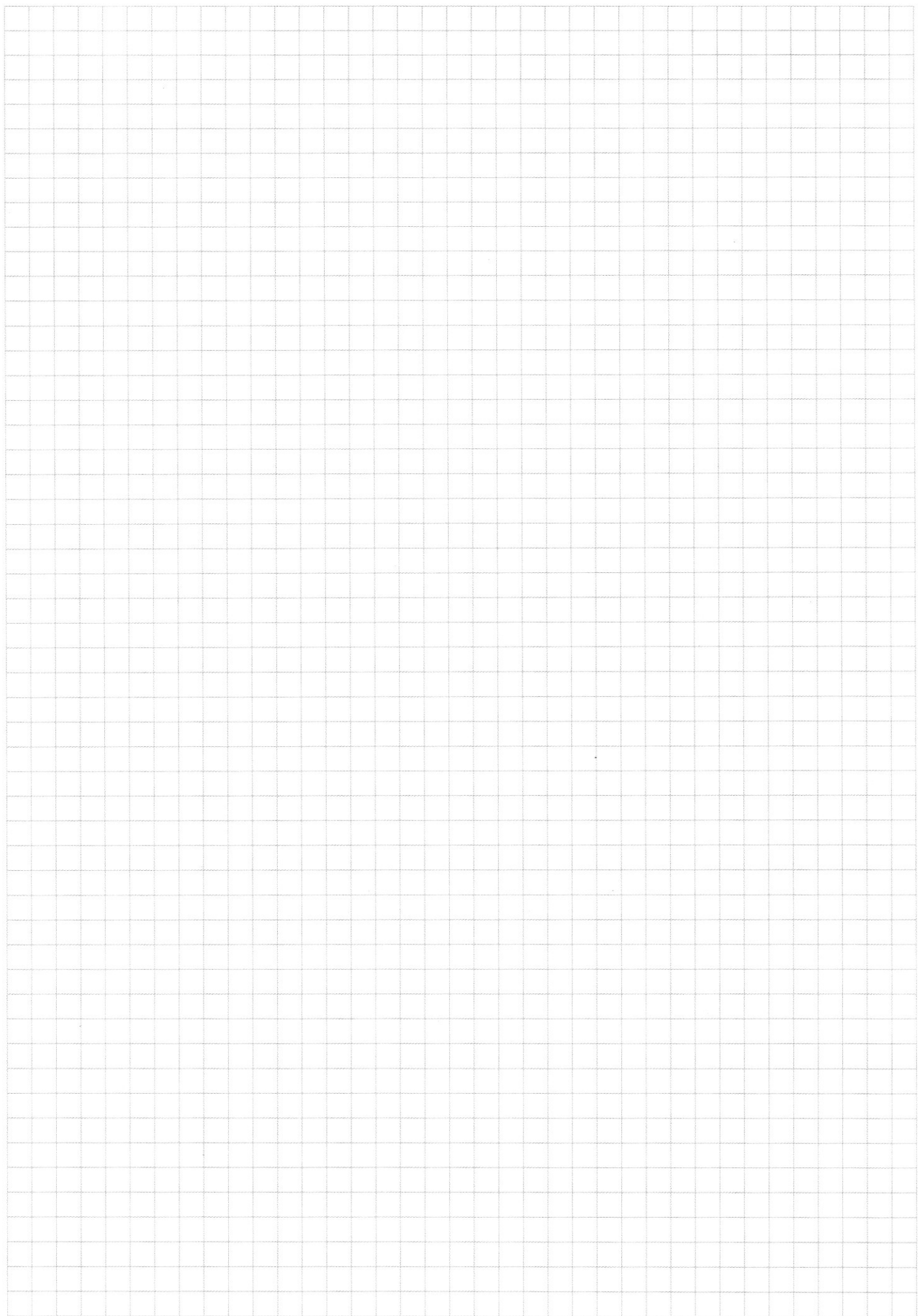
$$CF = \sqrt{DB^2 + CB^2}$$

$$OB^2 + CB^2$$

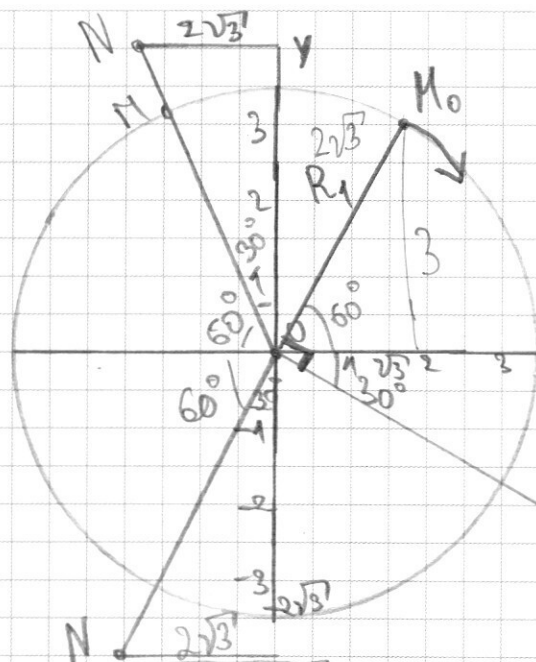


ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\sqrt{3} \approx 1,7$$

$$1 < \sqrt{3} < 2$$

$$1,7 < \sqrt{300} < 18$$

$$1+0+7+0+4+9=289$$

$$180+80+64=324$$

$$2\sqrt{3} \approx 3,4$$

$$R_1 = \sqrt{3^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$R_2 = \sqrt{6^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{36+12} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$L_1 = \pi R_1 = 2\pi R_1 = 4\sqrt{3} \cdot 3,14 \approx 12,56\sqrt{3}$$

$$L_2 = 2\pi R_2 = 2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 3,14 = 8\sqrt{3} \cdot 3,14 = 25,12\sqrt{3}$$

Закрытая фигура V_1

$$\Delta L_1 = 0,5 \Delta L_2$$

$$12+36=48$$

$$\begin{array}{r} \times 3,14 \\ 25,12 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{380}{3} \approx 126$$

$$(4\sqrt{3}; 0); (-2\sqrt{3}; 6); (-2\sqrt{3}; -6)$$

$$16 \cdot 3 = 48$$

$$\sin 60^\circ = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,5\sqrt{3}$$

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a \\ 3bx + (a-b)y = 1 \end{cases}$$

УЗ
Омкери: 0.0

$$\Rightarrow \begin{matrix} b/3x + (a-b)y = 1 \\ y \leq 5 \\ 5 \geq y \end{matrix}$$

$$x \geq -y-5 \quad x \geq y-5$$

$$x+y \geq -5 \quad x-y \geq -5$$

$$x+y+x-y \leq 0$$

$$2x \leq 0 \quad x \leq 0$$

$$x^2 + 25 - 10|x| + y^2 + 14y - 24|y| = 169$$

$$x^2 + y^2 - 10|x| - 24|y| = 0$$

$$x^2 + y^2 = 10|x| + 24|y|$$

$$x \geq 0 \quad y \geq 0$$

$$x(x-10) + y(y-24) = 0$$

$$\begin{matrix} 2 & 4 & 8 \\ 2 & 2 & \\ 2 & & \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} &|-5+5+5| + |-5-6+5| = 12 \\ &|11-5| + |5-11| = |6| + |-6| = 12 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 70002 \\ 35002 \\ 17502 \\ 8755 \\ 1755 \\ 355 \\ 77 \\ 1 \end{array} \begin{array}{l} > 4 \\ 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \end{array}$$

$$72225551$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 3!}$$

$$78555111$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 3!}$$

$$74255511$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 2!}$$

$$\frac{8! + 8! + 3(8!)}{3! \cdot 3!} = \frac{5(8!)}{6^2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 5}{6 \cdot 6} = 1 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 5 = 4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 8 = 4 \cdot 25 \cdot 56 = 100 \cdot 56 = 5600$$