

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Вокруг птичьей кормушки в одной плоскости с ней по двум окружностям с одинаковой скоростью летают синица и снегирь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой кормушка (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Синица движется по часовой стрелке, а снегирь – против. В начальный момент времени синица и снегирь находятся в точках $M_0(\sqrt{3}; 3)$ и $N_0(6; -2\sqrt{3})$ соответственно. Определите координаты всех положений снегиря, в которых расстояние между птицами будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a, \\ 3bx + (a-b)by = 1 \end{cases}$$

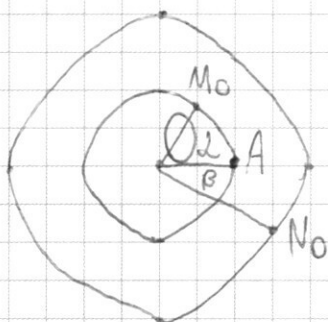
имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2|x+1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 7000. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 7 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10, \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1)



Найдем радиус I окружн.

$$r_1 = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = 2\sqrt{3}$$

Найдем радиус II окружн.

$$r_2 = \sqrt{6^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4\sqrt{3}$$

Найдем угол α . $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\alpha = 60^\circ$$

Найдем угол β . $\sin \beta = \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\beta = 30^\circ$$

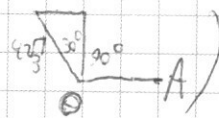
Также, заметим, что $r_1 = \frac{r_2}{2} \Rightarrow$ скорости прохождения дуги окр. на кот. опирается центр, угол, равный 1° будет t_1 (секунды), а у внешней $2t_1$. ($\frac{250R}{360}$ и $\frac{450R}{360}$).

Будем считать угол относительно ~~горизонта~~ ^{относит. OA} OA , тогда $\alpha = -60^\circ$, $\beta = 30^\circ$. $-60 + 2x = 30 - x$ (секунда в два раза быстрее, x - скорость в $\frac{\text{град.}}{\text{мин.}}$) $x = 30^\circ$. Надо отметить, что наименьшее разст. Φ между потенциалами будет, когда их градусные мерки совпадут. (направление). Первая встреча произойдет

в т. $(0^\circ; 0^\circ)$ для секунды и минуты совп. II встреча произойдет, когда они пройдут 360° , т.е. $2x + x = 360^\circ$, $x = 120^\circ$.

Когда II встретит - $(240^\circ; -120^\circ)$. Аналогично, когда I встретит ~~$(240^\circ; 120^\circ)$~~ $(120^\circ; -240^\circ)$. После них они опять встретятся в т. $(0^\circ; 0^\circ)$.

$(0^\circ; 0^\circ)$ - когда секунда $(4\sqrt{3}; 0)$ Ответ: $(4\sqrt{3}; 0)$, $(-2\sqrt{3}; 6)$, $(-2\sqrt{3}; -6)$.
 $(240^\circ; -120^\circ)$ - когда секунда $(-2\sqrt{3}; 6)$ (по т. Пифагора
 $(120^\circ; -240^\circ)$ - когда секунда $(-2\sqrt{3}; -6)$. Ответ: $(4\sqrt{3}; 0)$



$$3) \frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10 = (x+5)(x-2)$$

при $x = -5$, $x^3-16x+25 < 0$, что невозможно

$$\sqrt{x^3-16x+25} = 2(x-2) \quad (1)$$

$$x^3-16x+25 = 4x^2-16x+16$$

$$x^3-4x^2+9=0, \text{ по м. Безу } x=3$$

$$(x-3)(x^2-x-3)=0, x=3$$

$$x^2-x-3=0$$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$, но при $x = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$ правая часть ~~отрицательна~~, уравнения ⁽¹⁾ меньше нуля, что невозможно.

$x = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ - посторонний корень ($-3+\sqrt{13} \neq 4$)

Ответ: 3

4) $6x^4+x^3+2x-5x^3(x+1)+1 \geq 0$. Решим методом интервалов

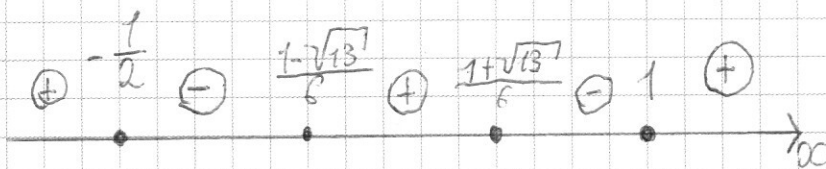
a) $x \geq -1$

$$6x^4+x^3+2x-5x^3-5x^2+1=0. \text{ По м. Безу } x=1$$

$$(6x^3+x^2-3x-1)(x-1)=0. \text{ По м. Безу } x=-\frac{1}{2}$$

$$(6x^2-2x-2)(x-1)(x+\frac{1}{2})=0$$

$$3(x-\frac{1+\sqrt{13}}{6})(x-\frac{1-\sqrt{13}}{6})(x-1)(x+\frac{1}{2})=0$$



В то же время $x \geq -1$

$$x \in [-1, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1-\sqrt{13}}{6}, \frac{1+\sqrt{13}}{6}] \cup [1, +\infty)$$

b) $x < -1$

$$6x^4+x^3+2x+5x^3+5x^2+1=0$$

$$\begin{cases} 6x^4 > 5x^3 \\ 6x < 5 \quad (x < 0) \\ x < \frac{5}{6} \end{cases}$$

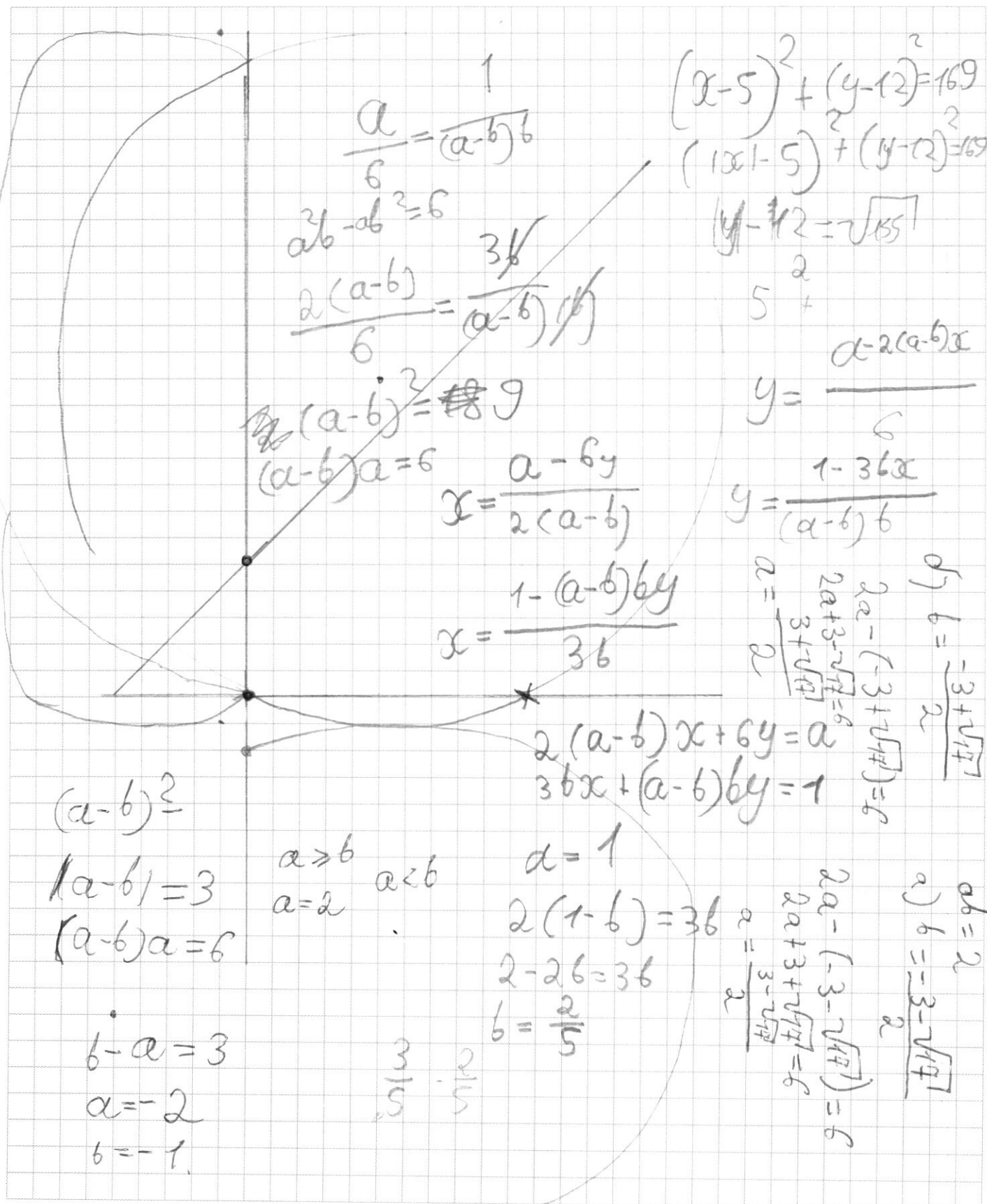
$$\begin{cases} 6x^2 > 2x \\ 6x < 2 \quad (x < 0) \\ x < \frac{2}{6} \end{cases}$$

такое выражение
всегда больше нуля
и решений не имеет.

Ответ:

$$\begin{aligned} & [-1, -\frac{1}{2}] \cup \\ & [\frac{1-\sqrt{13}}{6}, \frac{1+\sqrt{13}}{6}] \cup \\ & [1, +\infty) \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



2) Решить систему графически

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a \\ 3bx + (a-b)by = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{a - 2(a-b)x}{6} = -\frac{2(a-b)}{6} \cdot x + \frac{a}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1 - 3bx}{(a-b)b} = -\frac{3b}{(a-b)b} \cdot x + \frac{1}{(a-b)b} \end{cases}$$

Все прямые имеют вид $y = kx + b$, тогда, если они имеют бесконечное кол-во решений, k и b равны.

$$\begin{cases} -\frac{2(a-b)}{6} = -\frac{3b}{(a-b)b} \\ \frac{a}{6} = \frac{1}{(a-b)b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 18 = (a-b)^2 \cdot 2 \\ ab(a-b) = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} |a-b| = 3 \\ ab(a-b) = 6 \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}, \frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right),$
 $\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}, \frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right),$
 $(-2; 1), (-1; 2)$

a) $a > b, a-b=3$

$$\begin{cases} ab=2 \\ a-b=3 \end{cases}$$

$$(b+3)b=2$$

$$b^2+3b-2=0$$

$$b_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$a_{1,2} = \frac{3-\sqrt{17}}{2}, \frac{3+\sqrt{17}}{2}$$

b) $a < b, a-b=-3$

$$\begin{cases} ab=-2 \\ a-b=-3 \end{cases}$$

$$(b-3)b=-2$$

$$b^2-3b+2=0$$

$$b_{1,2} = 1; 2$$

$$a = -2; -1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5)

7	0	0	0	2
3	5	0	0	2
1	7	5	0	2
	8	7	5	5
	1	7	5	5
		3	5	5
			7	7
			1	

$$7000 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 7$$

Получается, одна цифра будет равна 7 (иначе, не получится множитель 7).

Аналогично, четыре цифры будут равны 5. Оставшиеся 4 цифры равны

либо (8, 1, 1, 1), либо (4, 2, 1, 1), либо (2, 2, 2, 1).

а) 7, 8, 5, 5, 5, 1, 1, 1.

Поставить „7“ и „8“ - $7 \cdot 8 = 56$ вариантов.

Разместить 3 пятёрки и три единицы на 6 позициях будет $C_6^3 = 20$

$$56 \cdot 20 = 1120 \text{ вариантов}$$

б) 7, 4, 5, 5, 5, 2, 1, 1

Поставить „7“, „4“, „2“ - $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ вариантов

Разместить две единицы на 5 позициях = $C_5^2 = 10$ вар.

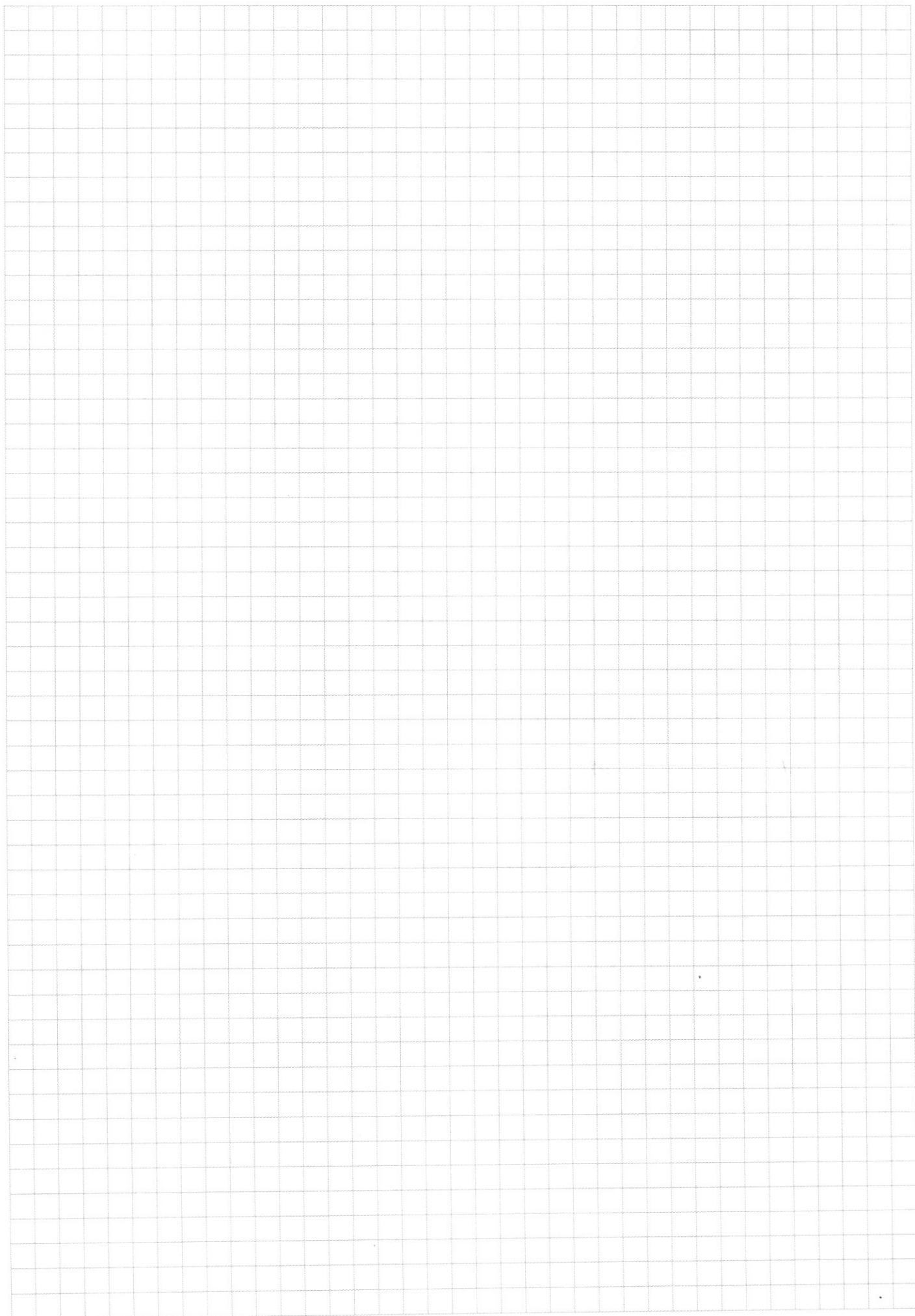
Итого, $336 \cdot 10 = 3360$ вариантов

в) Аналогично п. а, только „1“ вместо „8“ и „2“ вместо „7“.

Всего, 1120 вариантов.

$$\text{Итого, } 1120 \cdot 2 + 3360 = 5600$$

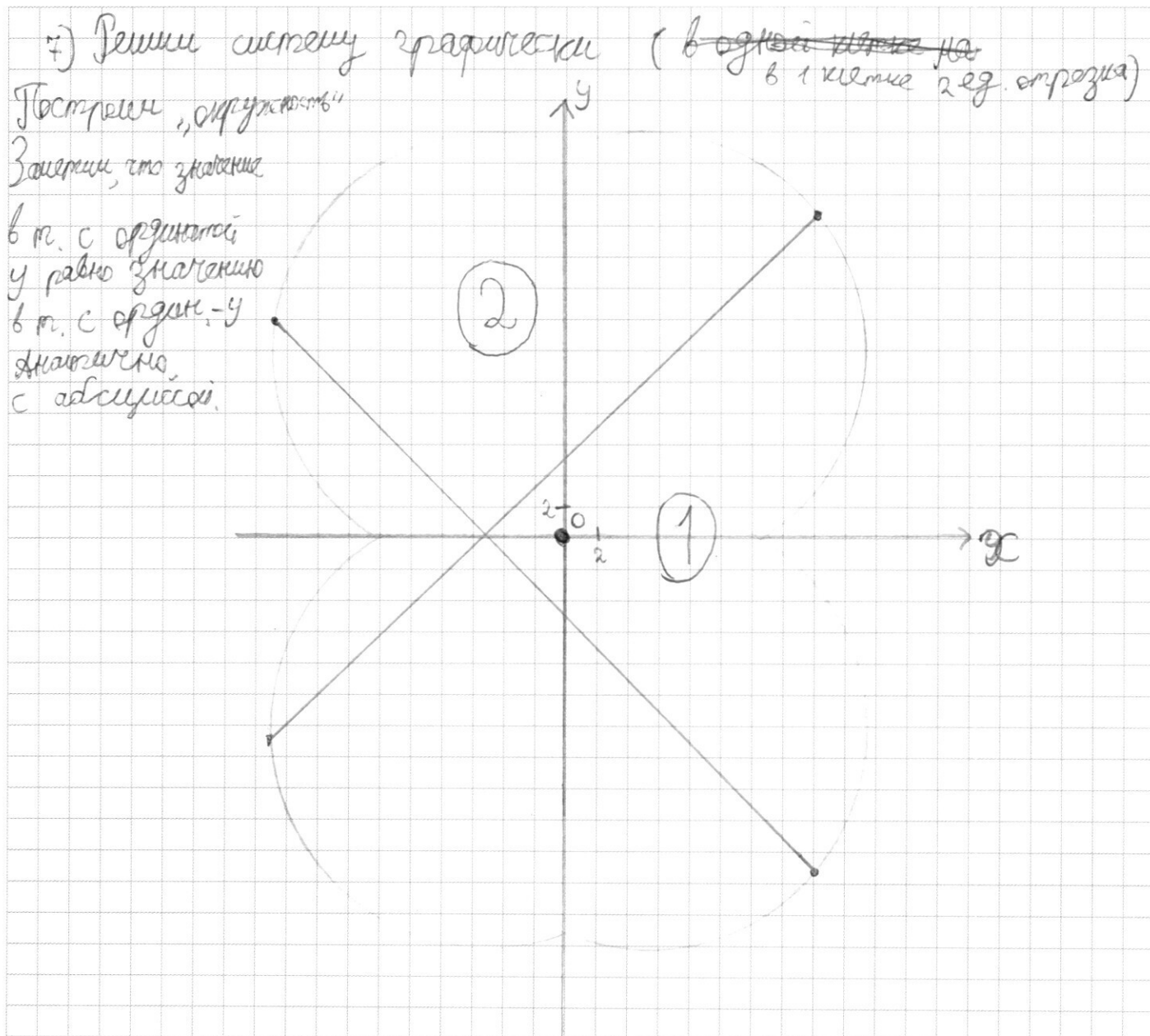
Ответ: 5600 вариантов



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Рассмотрим четыре случая. $(0;0)$ - решение

a) $x+y+5 \geq 0$ и $x-y+5 \geq 0$

$y \geq -x-5$ $y \leq 5+x$

$y = -x-5, |y| = x+5$

$(x-5)^2 + (x-4)^2 = 169$

$x = \frac{24 + \sqrt{1336}}{4}$ $y = -\frac{44 + \sqrt{1336}}{4}$

или получим область 1.

$y = 5+x$

$(x-5)^2 + (x-4)^2 = 169$

$x = \frac{24 + \sqrt{1336}}{4}$

$y = \frac{44 + \sqrt{1336}}{4}$

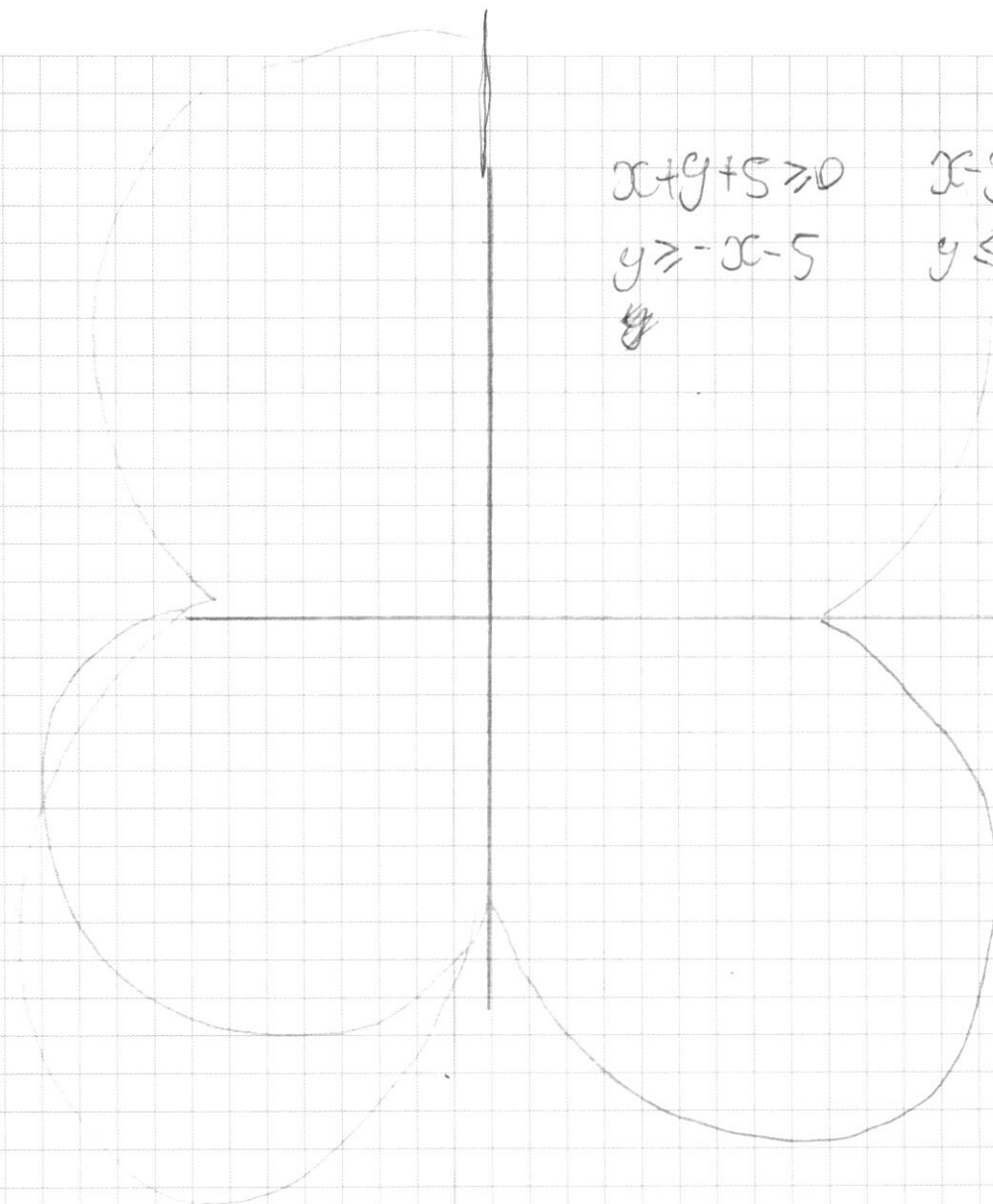
$$x+y+5 \geq 0$$

$$y \geq -x-5$$

~~g~~

$$x-y+5 \geq 0$$

$$y \leq 5+x$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y = 5 + x$$
$$(x-5)^2 + (x-4)^2 = 169$$

$$x^2 - 10x + 25 + x^2 - 8x + 16 = 169$$

$$2x^2 - 18x - 128 = 0$$

$$2x^2 - 18x - 128 = 0$$

$$D = 1336$$

$$\begin{array}{r} \times 24 \\ 24 \\ \hline + 96 \\ 48 \\ \hline 546 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 190 \\ 190 \\ \hline + 576 \\ \hline 1336 \end{array}$$

$$-x-5-12$$
$$(x+17)^2$$

$$x^2 - 10x + 25 + x^2 + 34x + 289 = 169$$

$$2x^2 + 24x + 95 = 0$$

d) $x+y+5 \geq 0$ и $x-y+5 \leq 0$
 Нам нужно найти область 2.

$$y = -x-5, \quad |y| = \cancel{5} x+5$$

$$(-x-5)^2 + (x-4)^2 = 169$$

$$(x+5)^2 + (x-4)^2 = 169$$

$$2x^2 - 4x + 25 + 19 = 169$$

$$2x^2 - 4x - 95 = 0$$

$$D = 16 + 8 \cdot 95 = 776$$

$$x = \frac{4 - \sqrt{776}}{4}$$

$$y = \frac{\sqrt{776} - 24}{4}$$

Случаи 1 и 2 рассмотрим аналогично
 Ответ: $\left(\frac{24 + \sqrt{1336}}{4}, \frac{44 + \sqrt{1336}}{4} \right), \left(\frac{24 - \sqrt{776}}{4}, \frac{\sqrt{776} - 24}{4} \right)$
 (+ -)

(0, 0)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2(x+1) + 1 \geq 0$$

$$6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2(x+1) + 1 = 0$$

$$1) x \geq -1$$

$$6x^4 + x^2 + 2x - 5x^3 - 5x^2 + 1 = 0$$

$$6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$x = 1$$

$$\begin{array}{r} 6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1 : x - 1 \\ \underline{6x^4 - 6x^3} \\ 6x^3 + x^2 - 3x - 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 4x^2 \\ \underline{ x^3 - x^2} \\ -3x^2 + 2x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -6 + 3 + 3 - 1 \\ -3x^2 + 2x \\ -3x^2 + 3x \\ \underline{ -3x^2 + 3x} \\ -x + 1 \end{array}$$

$$6x^3 + x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$-3x^3 + 3x(x^2 - 1) + (x^3 - 1) = 0$$

$$-3x^3 + (3x+1)(x^2-1) = 0$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{r} 6x^3 + x^2 - 3x - 1 : x + \frac{1}{2} \\ \underline{6x^3 + 3x^2} \\ -2x^2 - 3x \\ \underline{-2x^2 - x} \\ -2x - 1 \end{array}$$

$$\frac{6}{8} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} - 1$$

$$-\frac{6}{8} + \frac{1}{4} + \frac{3}{2} - 1$$

$$-\frac{1}{2}$$

$$52$$

$$D = 4^2 + 12 \cdot 4 = 48 + 16 = 64$$

$$3x^2 - x - 1 = 0$$

$$D = 1 + 12$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{13}}{6}$$

$$6x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 2x + 1$$

1) $x < -1$

$6x^4 + 6x^2 + 2x + 5x^3 + 5x + 1 = 0$

$6 + 1 - 2 - 5 + 5 + 1$

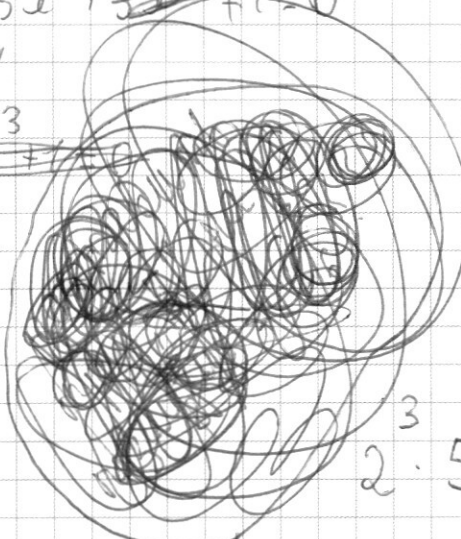
$6 + 6 + 2x + 5x + 1 = 0$

$6x^4 > 5x^3$

$6x < 5$

$6x^2 > 2x$

$6x < 2$



7000 | 2
3500 | 2
1750 | 2
875 | 5
175 | 5
35 | 5
7 | 1
1 | 1

$\frac{875}{37} = 23.65$

$\frac{6.5.4}{3.2.1} = 42.8$

$2 \cdot 5^3 = abcdefg$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = abcd$

$\frac{2240}{3350} = 6.68$

- 7, 5, 5, 5, 1, 1, 1, 8
- 7, 5, 5, 5, 4, 2, 1, 1
- 7, 5, 5, 5, 2, 2, 2, 1

- 1) 8111, 1811, 1181, 1118
- 2) 4211, 4121, 4112, 2411, 1421, 1142, 1412

2, 2, 2, 5, 5, 5 на 6 позиций.

- 1) 555222
- 552522
- 552252
- 552225

еще 142 по 12 вар.

- 2) 5... - 12 вар.
- 5...

- 25
- 1) 255522
- 255252
- 255225
- 252552
- 252525
- 252255
- 252255

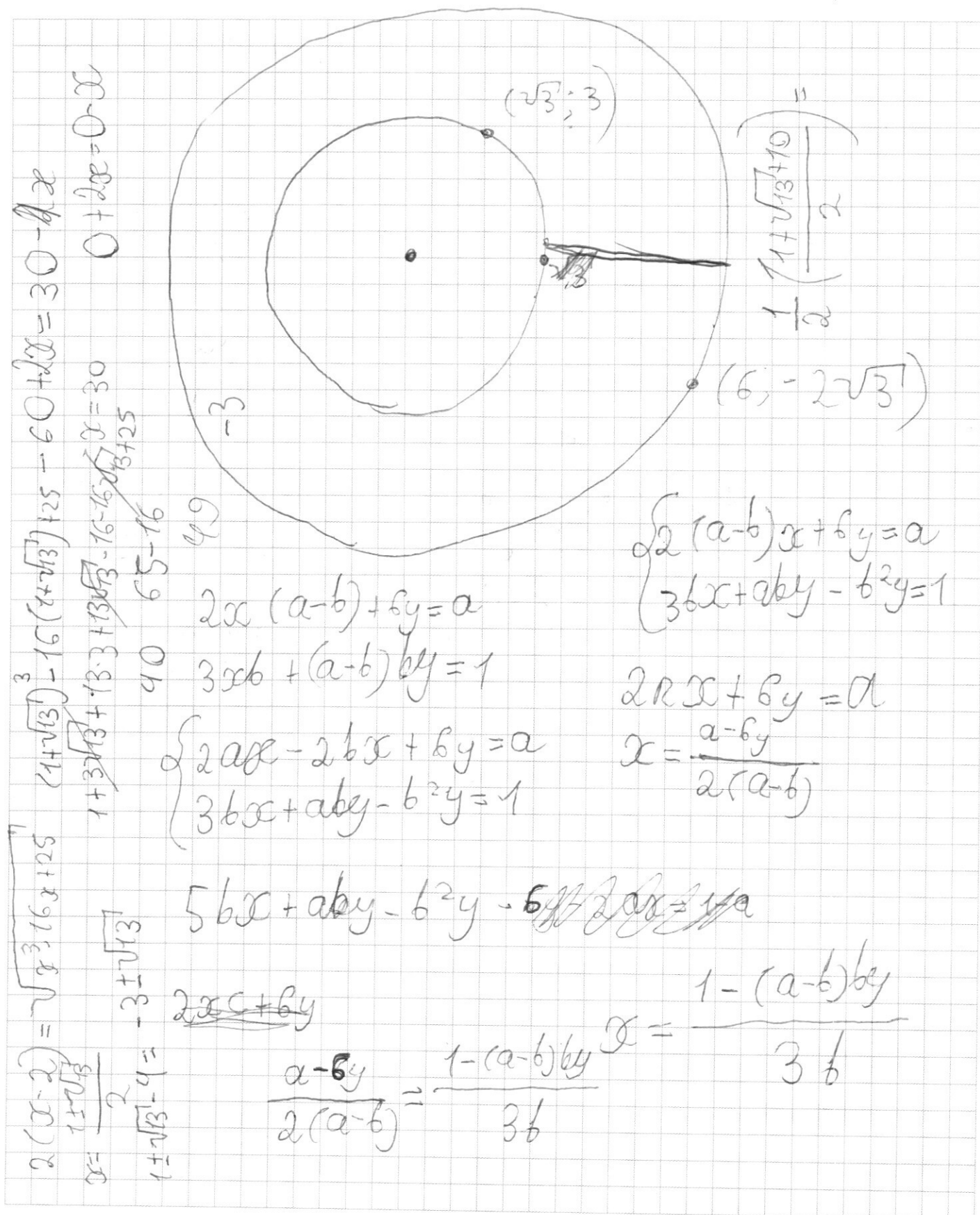
- 555222
- 555222
- 555222
- 555222
- 555222
- 555222
- 555222
- 555222

2) 6

6

... M ... M ... M ... M ... M ... M ...

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



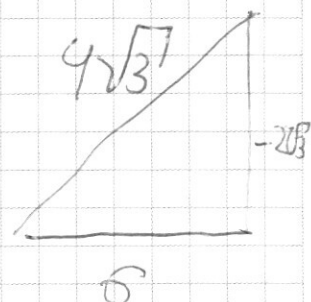
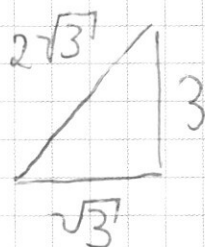
$$(a-6y)3b = (1-(a-b)by)2(a-b)$$

$$3ab-18by = 2a-2b-2(a-b)^2by$$

$$3ab-2a+2b = y(18b-2(a-b)^2b)$$

$$y = \frac{18b-2(a-b)^2b}{3ab-2a+2b}$$

$$9+3=12$$



$$r_1 = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

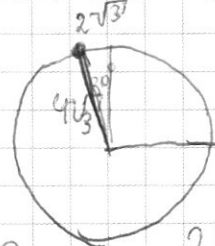
$$r_2 = 4\sqrt{3}$$

480

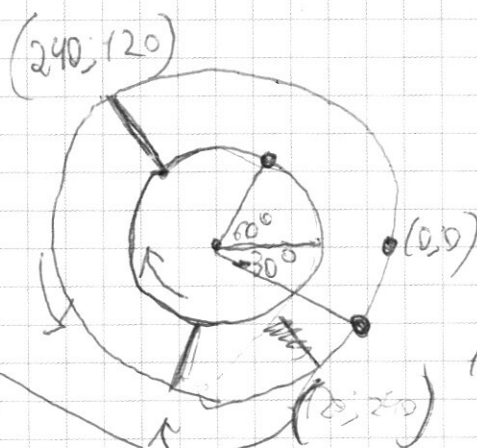
120

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$36+12=48$$



$$27-48+25$$



$$S_1 = 2\pi R$$

$$1229g = \frac{250R}{V} = \frac{1}{2}$$

$$-125+80+25$$

$$x^2+3x-10$$

$$1229g = \frac{450R}{V} = 2\sqrt{2}t$$

$$3) \frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3+16x+25} = (x+5)(x-2)$$

$$x \neq -5$$

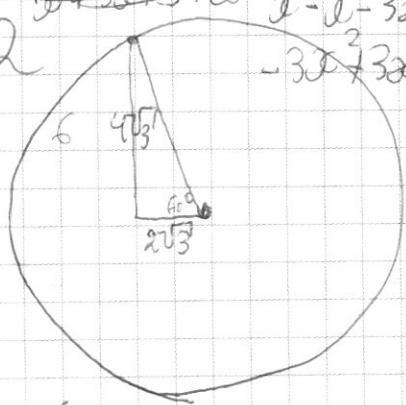
$$\sqrt{x^3+16x+25} = 2x-4, x \geq 2$$

$$x^3+16x+25 = 4x^2-16x+16$$

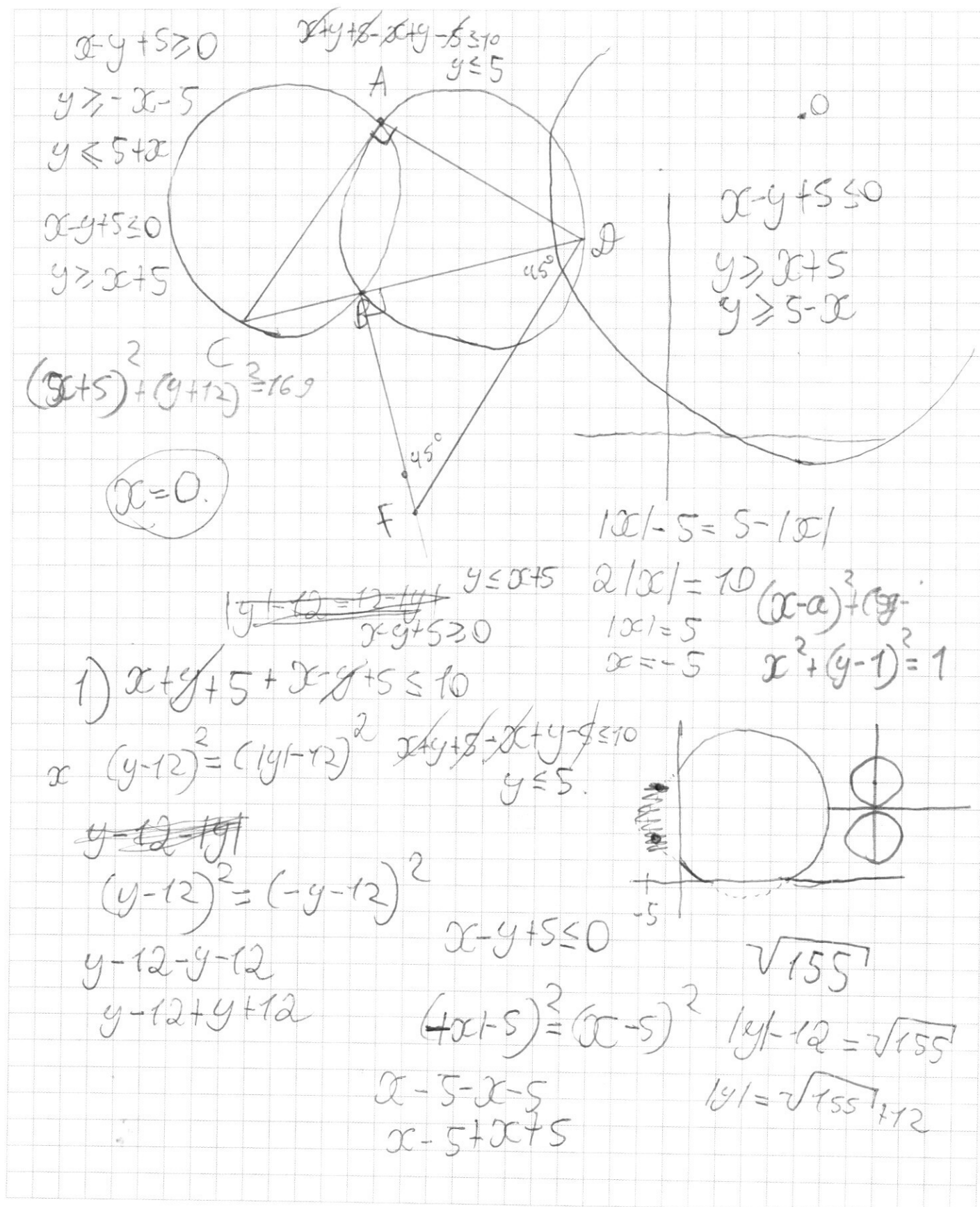
$$x^3-4x^2+9=0, x=3, \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{4\sqrt{3}}$$

$$x^3-4x^2+9 \div (x-3) = x^2-x+3$$

$$2x=12, x=6$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$x \leq 0$$

$$x - y \geq 5$$

$$x + y \geq 5$$

$$y \geq 5 - x$$

$$y \leq x - 5$$

$$x - 5 + y \geq 5 - x + y$$

$$x \geq 5$$

$$x \leq 0$$

$$1) \begin{cases} y \geq -5 - x \\ y \leq x + 5 \\ -y \geq -x - 5 \end{cases}$$

$$\frac{-3\sqrt{14}}{2} \cdot \frac{3-\sqrt{14}}{2} = 2$$

$$-(3+\sqrt{14})(3-\sqrt{14}) = 8$$

$$(9+\sqrt{14})(-3-\sqrt{14})$$

$$x + y + 5 < 0$$

$$x - y + 5 \geq 0$$

$$-5 - x - y + x - y + 5 \leq 10$$

$$-2y \leq 10$$

$$y \geq -5$$

$$y \leq -5 - x$$

$$y \leq x + 5$$

$$2y \leq 0$$

$$y \leq 0$$

$$2a - (-3 + \sqrt{14}) = 6$$

$$2a - 3 - \sqrt{14} = 6$$

$$2a = \frac{9 + \sqrt{14}}{2}$$

$$2a + 3 + \sqrt{14} = 8$$

$$a = \frac{3 - \sqrt{14}}{2}$$

$$y \in [-5; 0]$$

$$D = 9 + 8$$

$$\frac{-3 \pm \sqrt{14}}{2}$$

$$a = \frac{y}{-3 \pm \sqrt{14}}$$

$$a \cdot (-3 \pm \sqrt{14}) = 4$$

