

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс



ВАРИАНТ 2

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Вокруг птичьей кормушки в одной плоскости с ней по двум окружностям с одинаковой скоростью летают синица и снегирь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой кормушка (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Синица движется по часовой стрелке, а снегирь – против. В начальный момент времени синица и снегирь находятся в точках $M_0(\sqrt{3}; 3)$ и $N_0(6; -2\sqrt{3})$ соответственно. Определите координаты всех положений снегиря, в которых расстояние между птицами будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a, \\ 3bx + (a-b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2|x+1| + 1 \geq 0$.

5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 7000. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 7 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10, \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 Заметим, что оба уравнения системы имеют линейный вид, следовательно

бесконечное множество решений получится, если они будут лежать на той прямой, т.е. в виде $y=kx+d$, $k_1=k_2$, $d_1=d_2$. Приведем к виду:

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a, \\ 3bx + (a-b)y = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2(b-a)}{6}x + \frac{a}{6}, \\ y = \frac{-3b}{(a-b)b}x + \frac{1}{a-b}; \end{cases}$$

Т.к. $k_1=k_2$, $d_1=d_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2(b-a)}{6} = -\frac{3}{a-b}, \\ \frac{a}{6} = \frac{1}{(a-b)b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)^2 = 9, \\ ab(a-b) = 6 \end{cases} \begin{cases} a-b=3, \\ a-b=-3, \\ ab(a-b)=6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b=3, \\ ab=2, \\ a-b=-3, \\ ab=-2, \end{cases} \text{ Из 2-ой системы: } \begin{cases} a=-1, \\ b=2, \\ a=2, \\ b=-1. \end{cases}$$

Из 1-ой системы:

$$a = \frac{2}{b}, \quad b_1 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}, \quad b_2 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{4}{\sqrt{17}-3}, \quad a_2 = \frac{4}{\sqrt{17}+3}. \text{ Пусть возьмем: } (a;b)$$

Ответ: $(-1; 2); (-2; 1); (\frac{\sqrt{17}-3}{2}, \frac{4}{\sqrt{17}-3});$
 $(-\frac{4}{\sqrt{17}+3}, \frac{-3-\sqrt{17}}{2}).$

№3 $\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^2-16x+25} = x^2+3x-10;$

$$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^2-16x+25} = (x-2)(x+5). \text{ Следовательно}$$

$x_1 = -5$, Тогда если другие множители не равны 0

$\frac{1}{2}\sqrt{x^3-15x+25} = (x-2)$; $\uparrow^2$ и после приведения
~~оооооооо~~ $x^3-4x^2+9=0$; по теореме Безу, заметим

$x_2=3$ После деления:

$$x^2-x-3=0$$

$$x_3 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}; x_4 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$$

Подставляя в исходное заметим $x_1=-5$ не подходит, т.к. подкоренное выражение будет меньше 0.

Ответ: $x_2=3$; $x_3 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$; $x_4 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$.

x^4 $6x^4+x^2+2x-5x^2/(x+1)/(x+1) \geq 0$.

$$|x+1| \Rightarrow \begin{cases} x+1, & x \geq -1 \\ -(x+1), & x < -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 6x^4+x^2+2x-5x^3-5x^2+1 \geq 0 \quad \text{или} \quad 6x^4+x^2+2x+5x^3+5x^2+1 \geq 0$$

$$x \geq -1 \quad \text{или} \quad x < -1$$

Заметим: $x_1=1$. Тогда

после деления многочленов:

$$6x^4+x^2-3x-1 \geq 0. \text{ Заметим}$$

$x_2=-0,5$. После деления

$$6x^2-2x-2=0$$

$$x_3 = \frac{1+2}{3} = 1; x_4 = -\frac{1}{3}$$

После разложения на множители

по теореме Безу:

$$6(x+1)(x-1)(x+0,5)(x+\frac{1}{3}) \geq 0$$

на числовой оси:

$$-1 \quad -0,5 \quad -\frac{1}{3} \quad 1$$

$$\Rightarrow x \in [-1; -0,5] \cup [-\frac{1}{3}; +\infty)$$

Ответ: $x \in (-\infty; -0,5] \cup [-\frac{1}{3}; +\infty)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

15 Зададим 0 среди цифр нет.

Разложим 7000:

$$7000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$$

$\Rightarrow$ Поставить набор из 5, 5, 5, 7 цифр
есть $\frac{n!}{(n-k)!}$ способов, т.е. $\frac{8!}{4!3!} = 5 \cdot 8 / 3!$ так
как 5-мощь повториться $\Rightarrow$ лишние способы.

Тогда останутся: 4 свободных места под цифры
из оставшихся ^{св} 2, 2, 2. Могут под 4 ячейки получить

$$\text{св: } 2221 \text{ или } 4211 \text{ или } 8111$$

Расстановок с 2, 2, 2, 1: $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} = 4$ (3! в знаменателе
нельзя, потому что 2-ки могут повториться)

$$\text{С } 4211: \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{4!}{2!} = 12 \text{ способов}$$

$$\text{С } 8111 - 4 \text{ способа}$$

$$\text{Следовательно } 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot (4 + 4 + 12) = 5600.$$

Ответ: 5600.

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10, \\ (|x-5|)^2 + (|y-12|)^2 = 769. \end{cases}$$

Заметим, что 2 уравнение соответствует значению ^{по формуле Пифагора} $C^2 = 69$
сторон для прямоугольного треугольника, т.к. $C^2 = 69$

$$\Rightarrow (|x-5|)^2 = 25 \text{ или } 769, (|y-12|)^2 = 25,$$

$$\begin{cases} (|x-5|)^2 = 144, \\ (|y-12|)^2 = 144; \end{cases}$$

$$x = 0; \pm 10; \pm 17$$

$$y = 0; \pm 17 \pm 24; \pm 4$$

тогда подставляя в 1-ое уравнение системы, проверяем.

$$\begin{cases} x=0, \\ y=0; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x=-10, \\ y=0; \end{cases}$$

Ответ: $(0; 0); (-10; 0)$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

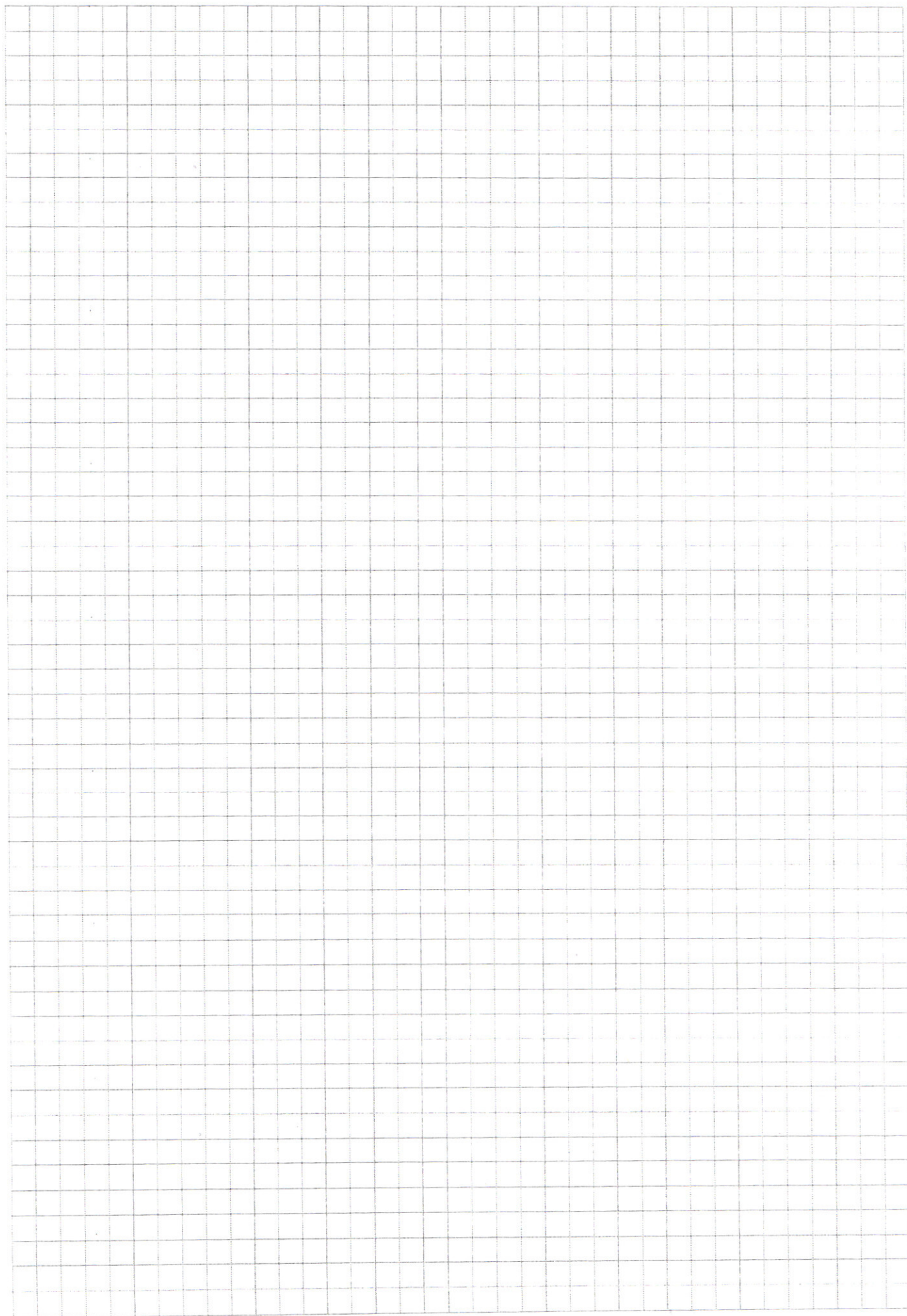
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^3 - 16x + 25 = 0$$

$$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3 - 16x + 25} = x^2 + 3x - 10$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{x^3 - 16x + 25} = (x-2)\sqrt{(x-2)(x+5)}$$

$$\frac{1}{4}(x^3 - 16x + 25) = x^2 - 4x + 4$$

$$0,25x^3 - 4x + 6,25 = x^2 - 4x + 4$$

$$0,25x^3 - x^2 + 2,25 = 0$$

$$x^3 - 4x^2 + 9 = 0$$

$$x^3 - 3x^2 - x + 9 = 0$$

$$x^2 - x - 3 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+12}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x_1 = -5, x_2 = 3, x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x_1 + x_2 = 1, x_1 x_2 = -3$$

$$x_1 = -x_2$$

$$x_2 - x_2^2 + 3 = 0$$

$$x_2^2 - x_2 - 3 = 0$$

$$x_2 = \frac{1 \pm \sqrt{1+12}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\begin{array}{l}
 \sqrt[4]{6x^4 + x^2 + 2x - 5x^3} / (x+1) \geq 0 \\
 6x^4 + x^2 + 2x - 5x^3 - 5x^4 \geq 0 \quad |x+1| \begin{cases} x+1, x > -1 \\ -(x+1), x < -1 \end{cases} \\
 6x^4 - 4x^2 + 2x + 1 \geq 0 \quad x > -1 \\
 -5x^3 \\
 \textcircled{4+2-5+1} \quad \textcircled{5x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1} \quad x-1 \\
 x_1 = 1 \quad \textcircled{6x^4 - 6x^3} \quad \begin{array}{r} 5x^3 + x^2 - 3x - 1 \\ x^3 - 4x^2 \\ \hline -3x^2 + 2x \\ -3x^2 + 3x \\ \hline -x + 1 \\ -x + 1 \\ \hline 0 \end{array}
 \end{array}$$

$$6x^3 + x^2 - 3x - 1 \geq 0$$

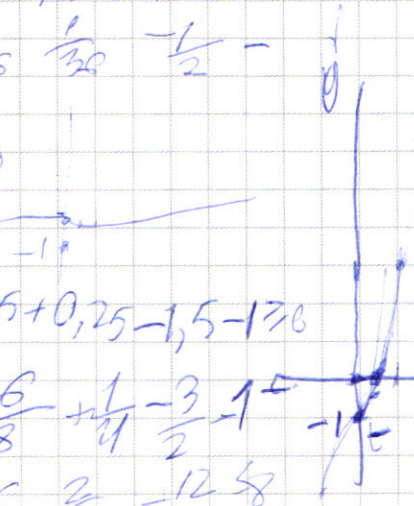
$$-6 + 1 + 3 - 1$$

$$6 \cdot 8 + 4 - 6 - 7$$

$$-6 \cdot 8 + 4 + 6 - 1$$

$$6 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1$$

$$\begin{array}{r} 600 \\ 120 \\ \hline 30 \end{array}$$



$$6 \cdot 0,125 + 0,25 - 1,5 - 1 = 0$$

$$0,75$$

$$6 \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} - 1 = -1,75$$

$$6 \cdot \frac{2}{8} + \frac{2}{8} - 12,5$$

$$x_2 = -0,5$$

$$6x^3 + x^2 - 3x - 1 \div (x + 0,5)$$

$$\begin{array}{r} 6x^3 + x^2 - 3x - 1 \\ \underline{-2x^2 - 3x} \\ 2x^2 - x - 1 \\ \underline{-2x^2 - x} \\ -2x - 1 \end{array}$$

$$6x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$3x^2 - x - 1 = 0$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{13}}{6}$$

$$\frac{1 \pm 2}{3}$$

$$x_4 = -\frac{1}{3}$$

$$108 \cdot \frac{54}{9}$$

$$6x^4 + x^2 + 2x + 5x^3 + 5x^2 + 1 \geq 0$$

$$6x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$6 \cdot 16 - 40 + 24 - 4 + 1 \geq 0$$

$$96 - 40 + 24 - 4 + 1$$

$$6 \cdot 81 - 135 + 54 - 6 + 1 \geq 0$$

$$6 \cdot 16 \cdot 4$$

$$5x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1$$

$$16 \cdot 6 - 40 - 16 + 12 + 1$$

$$6 \cdot 16$$

$$\begin{array}{r} 7000 \cdot 2 \\ 3500 \cdot 2 \\ 1750 \cdot 2 \\ 875 \cdot 5 \\ \hline 1750 \cdot 5 \\ 350 \cdot 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 275 \cdot 5 \\ \hline 32 \cdot 175 \\ \hline 222 \\ \hline 555 \\ \hline 4 \end{array}$$

$$x < -1$$

$$6$$

$$-\frac{3}{2}$$

$$6 \cdot \frac{21}{16} - 5 \cdot \frac{24}{8} + 6 \cdot \frac{9}{4} + 1 - 3 \geq 0$$

$$3 \cdot 81 - 135 + 108 - 16$$

$$-0,5 \cdot \frac{1}{3} + 1$$

$$x \in [-0,5] \cup [1; +\infty)$$

$$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9$$

$$\begin{array}{r} 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \\ \hline 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \\ \hline 8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \\ \hline 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

[illegible]

$$a-b=3$$

$$ab=2$$

$$a=\frac{2}{b}$$

$$\frac{2}{b}-b=3 \quad | \cdot b$$

$$2-b^2=3b$$

$$b^2+3b-2=0$$

$$\frac{-3 \pm \sqrt{9+8}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$b_1 = \frac{\sqrt{17}-3}{2}$$

$$b_2 = -\frac{(\sqrt{17}+3)}{2}$$

$$a-b=-3$$

$$ab=-2$$

$$\begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases}$$

$$a=b-3$$

$$\sqrt{b^2-3b+2}=0$$

$$b_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$b_1=2 \quad a=-1$$

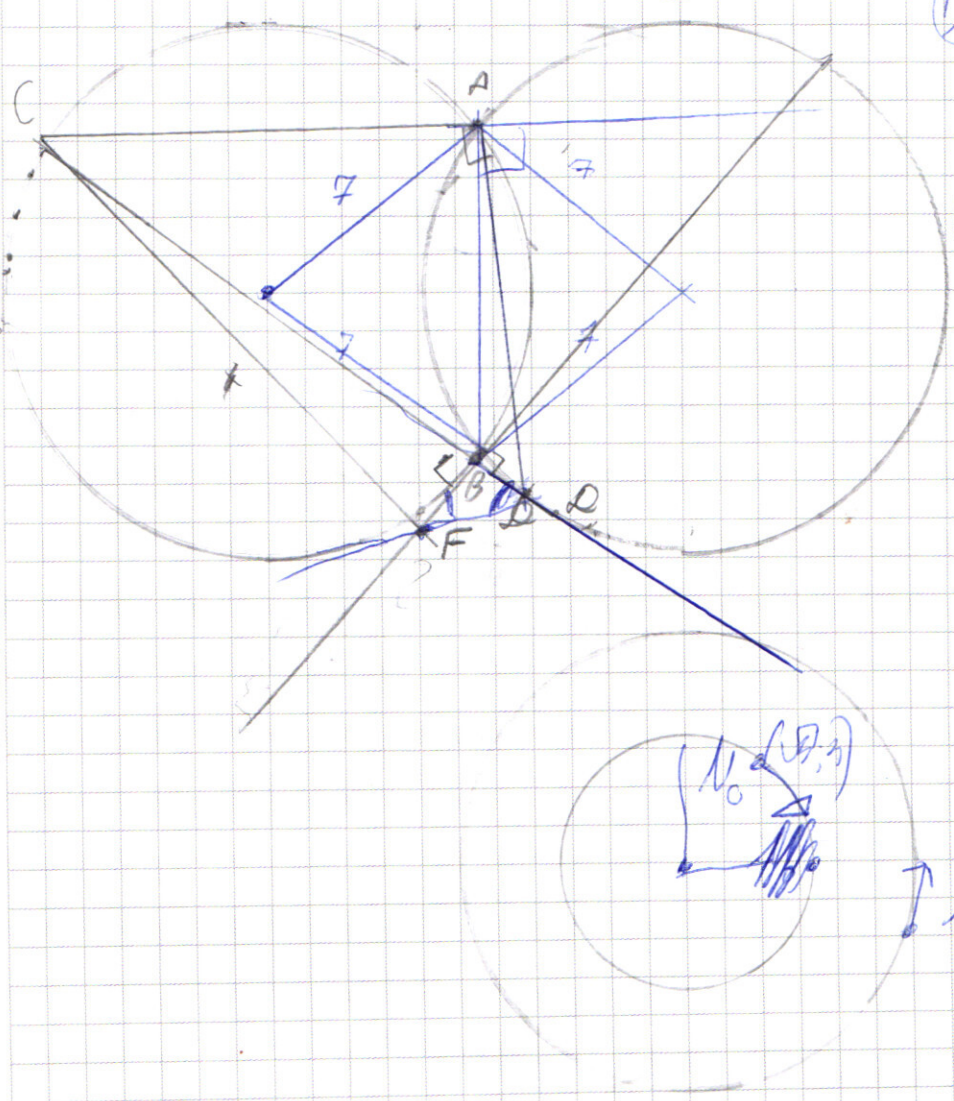
$$b_2=1 \quad a=-2$$

$$\begin{array}{r} \times 35 \\ 280 \end{array} \quad 280.$$

$$a = \frac{2}{\frac{\sqrt{17}-3}{2}} = \frac{4}{\sqrt{17}-3}$$

$$\frac{3}{\frac{2}{-\sqrt{17}-3}} = \frac{11}{\sqrt{17}+3}$$

56 20
2800



96+
100
96-46
56+
46
77
-3 484+36
6 81
10(6, -2\sqrt{3})

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(|x+y+5| + |x-y+5|) \leq 10,$
 $(|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169$

$x_1 = 0, y_1 = 0$
 $x_2 = \pm 10, y_2 = \pm 24$
 $10, 24, -24$
 -10

$\begin{cases} x+y \geq 5 \\ x+y \leq -5 \end{cases} \quad \begin{cases} x-y \geq -5 \\ x-y \leq -5 \end{cases}$

$|x-5| \leq 25$
 $|x-5|^2 = 144$
 $|x-5| = 5$
 $|x-5| = -5$
 $|x-5| = 12 \Rightarrow |x| = \pm 17$

$|y|-12 = 5$
 $|y| = \pm 17$
 $|y|-12 = -5$
 $|y| = 7$

$x = 0, y = 0$
 $x = 10, x = -10$
 $|15+y| \leq 10$
 $|y-5| \leq 10$
 $|22+y| \leq 10$
 $|y-12| \leq 10$

$x = -10$
 $y = 0$

$8, 7, 6, 5$
 2800

