

**МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ**  
**ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ**

**9 класс**

ВАРИАНТ 2

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб  
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Вокруг птичьей кормушки в одной плоскости с ней по двум окружностям с одинаковой скоростью летают синица и снегирь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой кормушка (общий центр окружностей) находится в точке  $O(0; 0)$ . Синица движется по часовой стрелке, а снегирь – против. В начальный момент времени синица и снегирь находятся в точках  $M_0(\sqrt{3}; 3)$  и  $N_0(6; -2\sqrt{3})$  соответственно. Определите координаты всех положений снегиря, в которых расстояние между птицами будет кратчайшим.
2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров  $a$  и  $b$ , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a, \\ 3bx + (a-b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение  $\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$ .
4. [6 баллов] Решите неравенство  $6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2|x+1| + 1 \geq 0$ .
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 7000. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 7 пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . На первой окружности выбрана точка  $C$ , а на второй – точка  $D$ . Оказалось, что точка  $B$  лежит на отрезке  $CD$ , а  $\angle CAD = 90^\circ$ . На перпендикуляре к  $CD$ , проходящем через точку  $B$ , выбрана точка  $F$  так, что  $BF = BD$  (точки  $A$  и  $F$  расположены по разные стороны от прямой  $CD$ ). Найдите длину отрезка  $CF$ .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10, \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169. \end{cases}$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$  - число

$$1) 7000 = 10^3 \cdot 7 = 5^3 \cdot 2^3 \cdot 7$$

цифры

2) ~~0~~ ~~цифры~~ 0 нет.

т.к.  $a_1, \dots, a_8$  будет 0

3) Нужны такие цифры, чтобы их суммой был  $5^3 \cdot 2^3 \cdot 7$ , замечаем что 1 всегда присутствует.

$$\text{т.к. } 3+3+1=7 < 8$$

делитель 5 только у 5; 7 - только у 7

2 - 2, 4, 6, 8: 6 - не ~~под~~ подходит, т.к.  $6=2 \cdot 3$

4) Вариант: ~~цифры~~ 2, 5, 7

3 нет.

3 двойки 3 пятерки (семь и 1 единица).

8! - всего восьмизнач. ~~3~~ 3! - лишние двойки

3! - лишние пятерки

$$\frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{56 \cdot 20}{9} = 1120$$

5) 2 вар.: 4, 5, 7, 2. Только 4 меньше т.к.  $3/2$ , а

1 - четверка 3 - пятерки 1 - семь 1 - дв.  $4=2^2$

2 - единица

$$\frac{8!}{3! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{2} = \frac{56 \cdot 60 \cdot 10}{2} = 3360$$

6) 3 вар.: 8, 5, 7.  $8=2^3$  ~~8 нет~~

1 - восьмерка, 1 - семёрка, 3 - пятерки, 3 - едн.



$$\frac{8!}{3! \cdot 3!} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 = 1120$$

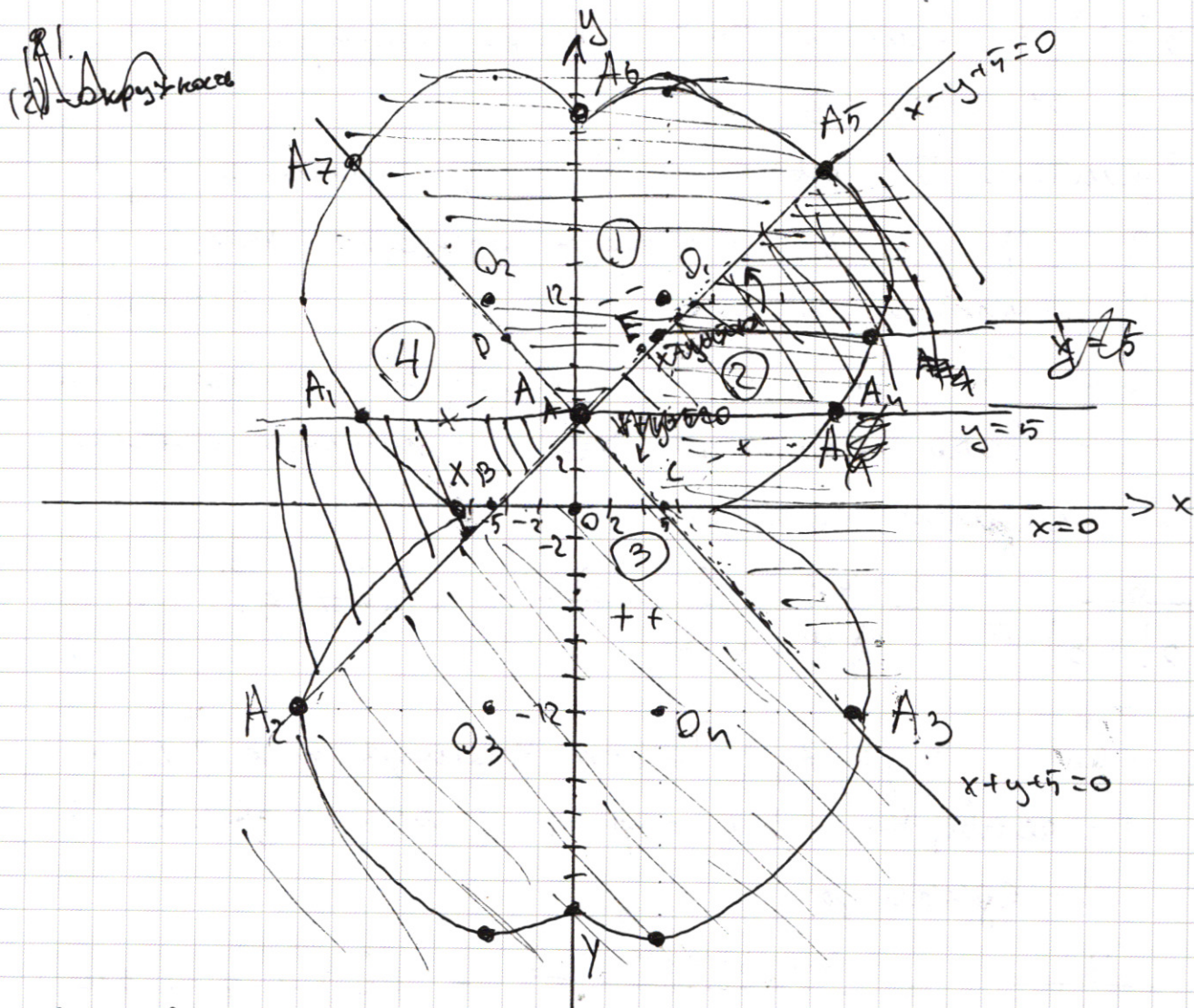
7) Всего вариантов их учета

$$2 \cdot 1120 + 3360 = 5600$$

Ответ: 5600

157.

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10 & (1) - \text{ленточка} \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 13^2 & (2) - \text{окружности (полюс)} \end{cases}$$



1. (2) - окружность с центром (5; 12) если  $x \geq 0, y \geq 0, R=13$   
 аналогично -5; 12 если  $x \leq 0, y \geq 0$  и т.д.  
 симметрия осн. (0; 0)



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. (2) раскрывается в областях: , A (0; 5)

③: оба модуля с нулем

B (-5; 0)

$$x + y + 5 + x - y + 5 \leq 10$$

C (5; 0)

$$2x + 10 \leq 10$$

$$x \leq 0$$

②: 1-й модуль с - ; 2-й с +

$$-x - y - 5 + x - y + 5 \leq 10$$

$$-2y \leq 10$$

$$y \geq 5 ; \text{Пусть } E (5; x_1) \in x - y + 5 = 0$$

④: ①: оба модуля с минусом

$$-x - y - 5 - x + y - 5 \leq 10$$

$$-2x - 10 \leq 10$$

$$2x \geq -20$$

$x \geq -10$  - весь ~~участок~~ <sup>наде</sup>  $\in$  PAE, <sup>участок</sup> D  $\in$   $x + y + 5 = 0$

⑤ первый с + , второй с - и выше A

$$x + y + 5 - x + y - 5 \leq 10$$

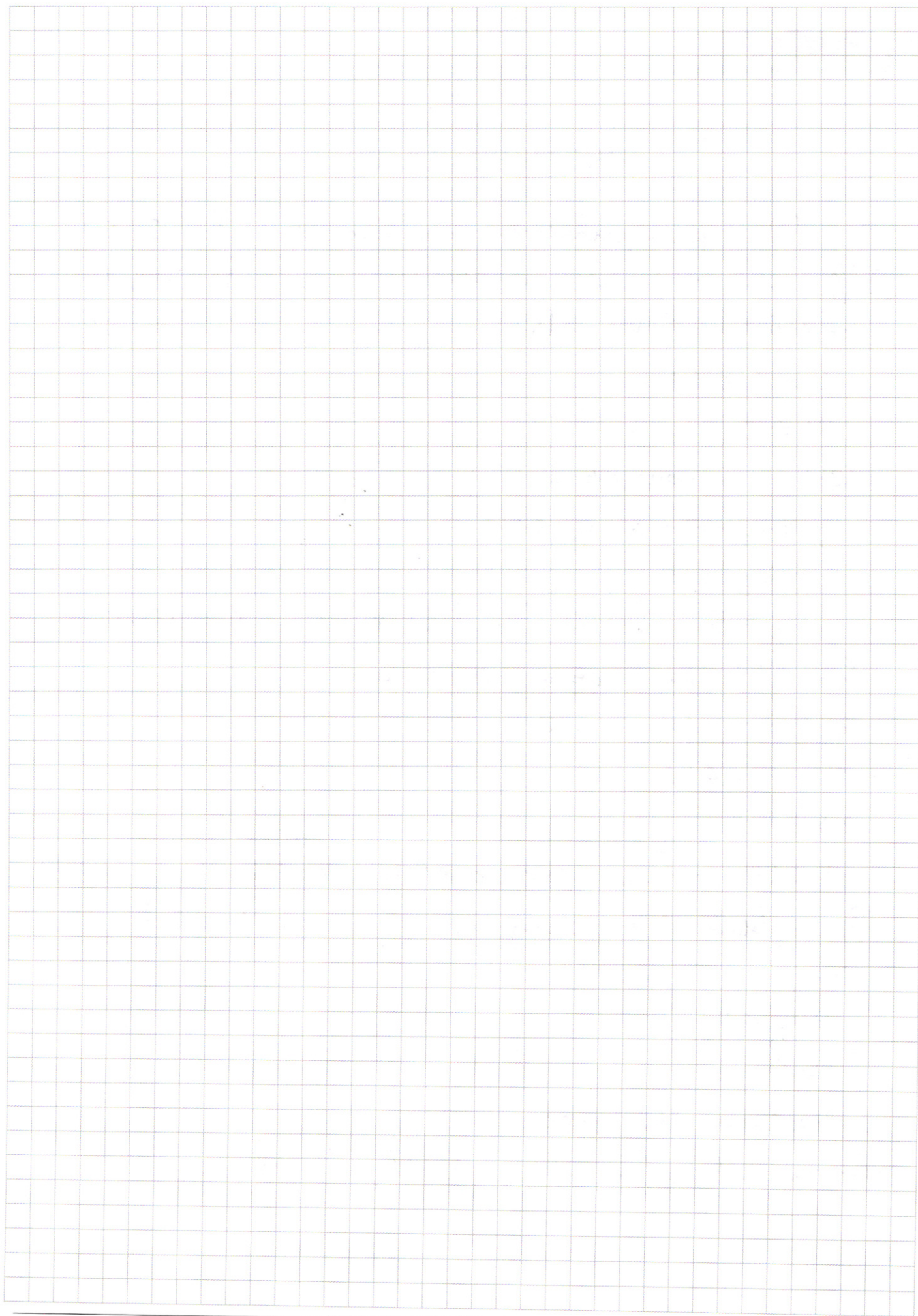
$$2y \leq 10$$

$$y \leq 5$$

Решением является

$$\cup A_7 A_6, \cup A_6 A_5 A_4, \cup A_5 A_2 X, \cup X A_1$$





☐ черновик    ☐ чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

I  $x \geq -1$

$$1. 6x^4 + x^2 + 2x - 5x^3 - 5x^2 + 1 \geq 0$$

$$2. 6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$(x-1)(6x^3 + x^2 - 3x - 1) \geq 0$$

$$(x-1)((x-1)^2 - x - 2 + 6x^3) \geq 0$$

$$(x-1)((x-1)^2 + (6x^3 + 3x - 6)) \geq 0$$

$$3. 6x^4 - 5x^3 - 5x^2 + (x+1)^2 \geq 0$$

$$x^2(6x^2 - 5x - 5) + (x+1)^2 \geq 0$$

II  $x \leq -1$

$$6x^4 + x^2 + 2x + 5x^3 + 5x^2 + 1 \geq 0$$

$$6x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$(x+1)^2 + 6x^4 + 5x^3 + 5x^2 \geq 0$$

$$(x+1)^2 + x^2(6x^2 + 5x + 5) \geq 0$$

$$D = 5^2 - 4 \cdot 6 \cdot 5 = 25 - 120 = -95 < 0$$

корней нет;  $a > 0 \Rightarrow 6x^2 + 5x + 5 \geq 0 \quad \forall x$

$\Rightarrow \forall x \leq -1$  верно

$x \leq -1$  - решение.



№2.

$$\begin{cases} 2(a-b)x + by = a \\ 3bx + (a-b)y = 1 \end{cases}$$

1. Все переменные.

→ реш. сис. совпадающих.

2. Условие совпадения:

$$\begin{cases} 2(a-b) = \lambda \cdot 3b \\ b = \lambda(a-b)b \\ a = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b = \frac{3}{2}ab \\ a-b = \frac{b}{a-b} \end{cases}$$

3. Если  $a=b$ , то  $b = \lambda \cdot 0$  — реш. нет.

и  $a \neq b$ :

$$\frac{3}{2}ab = \frac{b}{a-b}$$

$$a^2b^2 = 4$$

$$5. \frac{2(a-b)}{3b} = \frac{b}{(a-b)b}$$

$$2(a-b)^2b = 3b$$

$$(a-b)^2 = \frac{3b}{2}$$

Если  $b=0$ , то  $b=0 \cdot \lambda$  — реш. нет.

∀  $b \neq 0$ ;  $a \neq 0$ :

$$a-b = \pm 3$$

$$a = b \pm 3$$

6. 1 случай  $a = b+3$

$$\frac{2(b+3-b)}{3b} = \frac{b}{(b+3-b)b}$$

1 сл.  $a = b+3$

$$\frac{2(b+3-b)}{3b} = b+3 \Rightarrow 3b^2 + 9b - 6 = 0$$

$$b^2 + 3b - 2 = 0$$

⊄ ℝ!

$$b = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

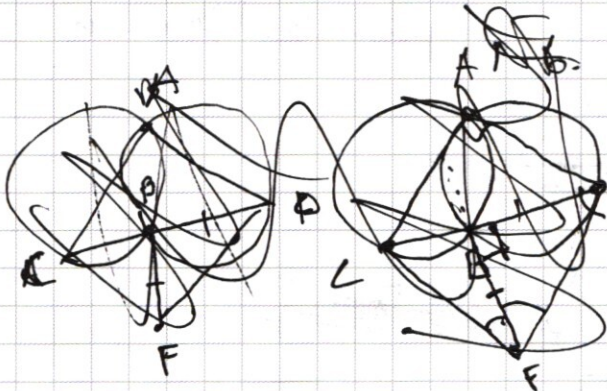


## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2 случая  $a = b - 3$

$$\frac{2(b-3-b)}{3b} = b-3 \Rightarrow b^2 - 3b + 2 = 0$$

$$\begin{cases} b=1 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ a=-1 \end{cases} \quad \text{Ответ: } \begin{cases} a=-2; b=1 \\ a=-1; b=2 \end{cases}$$



$$\sqrt{3} \quad \frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = (x-2)(x+5)$$

$x = -5$  - решение  
 $\forall x \neq -5$ :

$$\frac{1}{2}\sqrt{x^3-16x+25} = x-2$$

$x^3 - 4x^2 - 16x + 16 = x^3 - 16x + 25$  - корни проверим на ОДЗ.

$$(x-3)(x^2-x-3) = 0$$

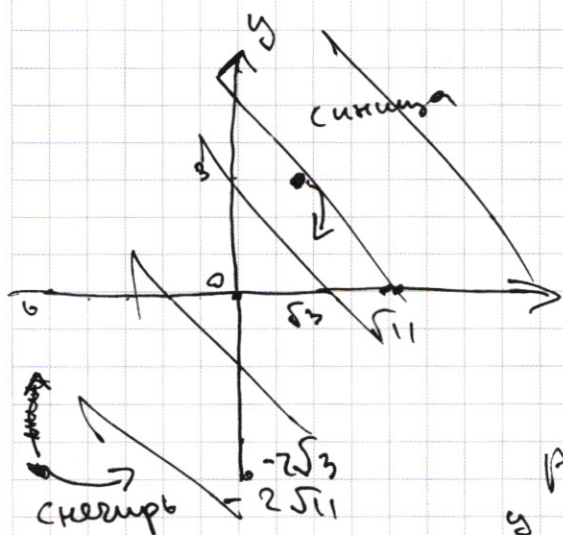
$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4 \cdot 3}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

подставим под корень (1)

$$\begin{cases} x=3 \\ x=\frac{1+\sqrt{13}}{2} \\ x=\frac{1-\sqrt{13}}{2} \\ x=-5 \end{cases}$$

Ответ:  $x \in \{3; \frac{1+\sqrt{13}}{2}; \frac{1-\sqrt{13}}{2}\}$





51

1. Пусть  $r_1$  - радиус.  $\varnothing$  окр., по которой движется сигнуса

$$r_1 = \sqrt{3+3} = \sqrt{6}$$

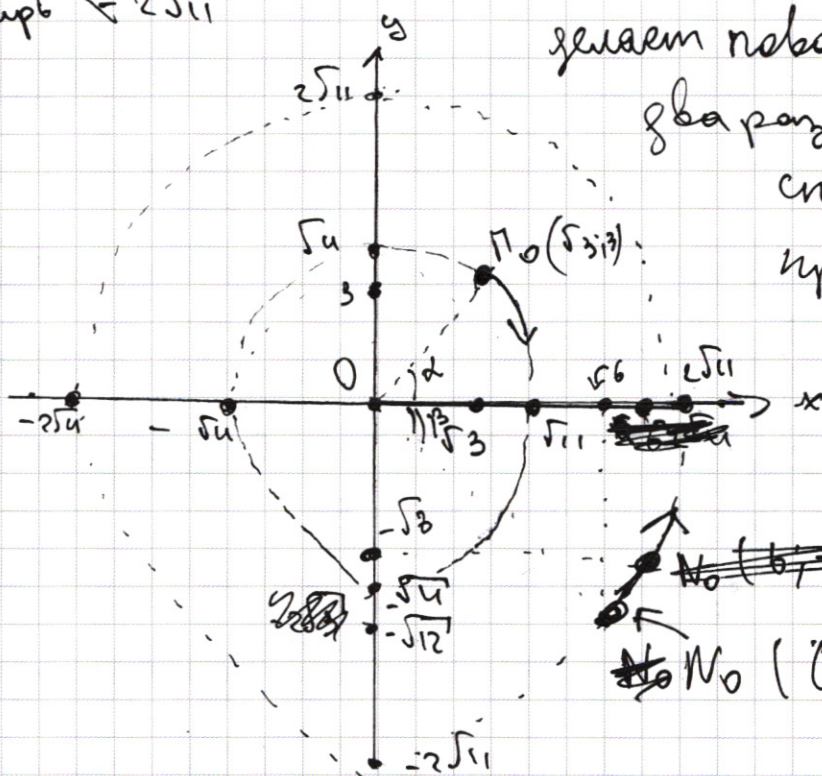
$$r_2 - \text{сигнуса } r_2 = \sqrt{36+3} = 2\sqrt{6} = 2r_1$$

2. Т.к. радиусы ~~равны~~ <sup>отл. в 2 раза</sup>, а скорости

равны ~~то~~, то ~~сигнуса~~ ~~делает поворот на угол~~

два раза больше, чем

сигнуса за равное время.



$$M_0(5, 3)$$

$$N_0(6, -\sqrt{12})$$

3. Кратчайшее расстояние будет, если  $OM_0N_0$  - на одной прямой и  $M_0$  между  $O$  и  $N_0$

Пусть  $\angle (OM_0, Ox) = \alpha$ ;  $\angle (ON_0, Ox) = \beta$

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30^\circ; \quad \tan \beta = \frac{\sqrt{12}}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 60^\circ$$

$$\beta = 2\alpha \Rightarrow \text{выгода при } M_0(5, 0) \quad N_0(2\sqrt{6}, 0)$$

крат. расстояние

$$\text{Ответ: } (5, 0) \text{ и } (2\sqrt{6}, 0)$$







54

$$6^1 - 5 - 4 \in 2 + 1$$

$$\frac{3}{6} = 2u$$

$$x \geq -1$$

$$6x^4 + x^2 + 2x - 5x^3 - 5x^2 + 12 \geq 0$$

$$6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$(x-1)(6x^3 + x^2 - 3x - 1) \geq 0$$

$$6x^4 + x^2 - 3x^2 - x$$

$$-6x^3 - x^2 + 3x + 1$$

$$6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1$$

$$-6 + 1 + 3 - 1$$

$$6 \cdot 8 = 48$$

$$-48 + 4 + 6 - 1$$

$$\begin{array}{r} 6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1 : x-1 \\ \underline{6x^4 - 6x^3} \phantom{+ 1} \\ x^3 - 4x^2 + 2x + 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 4x^2 \\ \underline{-x^3 + x^2} \\ -3x^2 + 2x + 1 \end{array}$$

$$-3x^2 + 2x$$

$$\underline{-3x^2 + 3x}$$

$$-x + 1$$

$$\underline{-x + 1}$$

q-корень

$$\frac{1}{6} - ? \quad 1: p$$

$$6: q$$

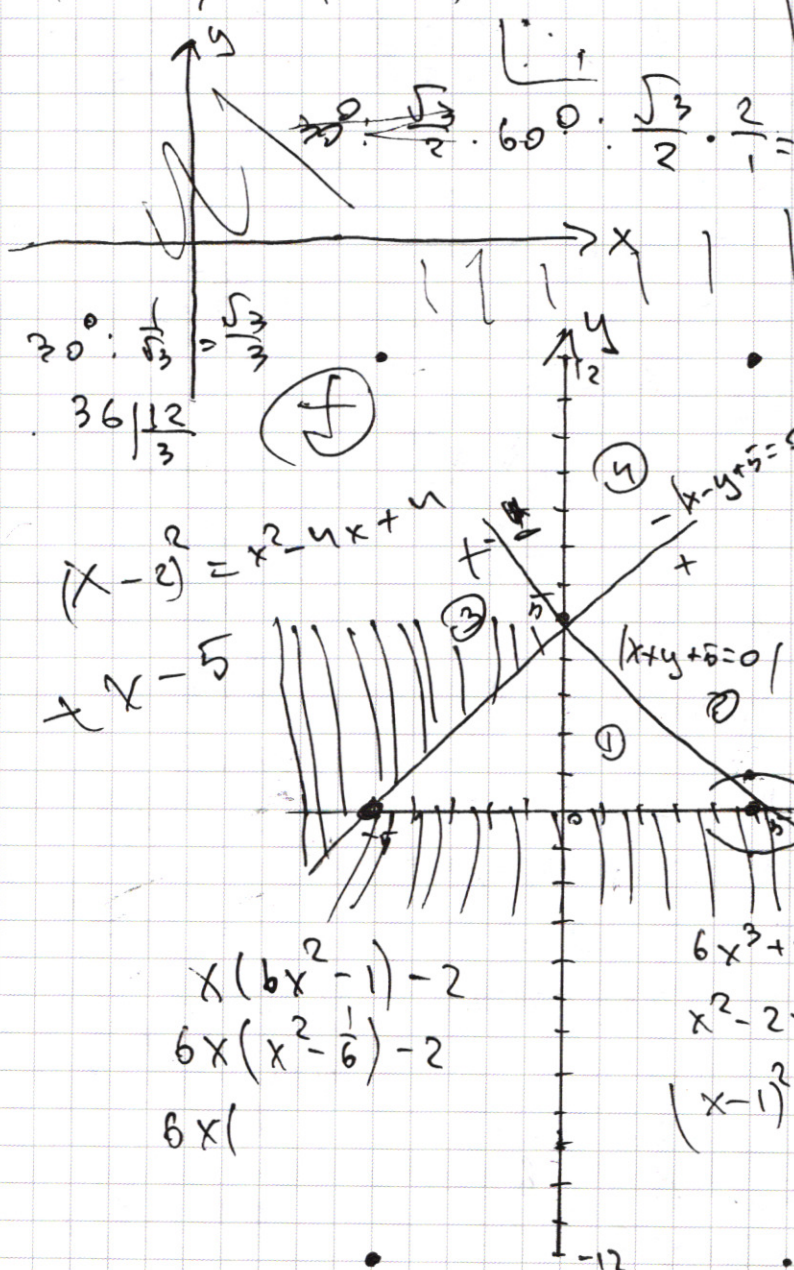
$$\frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^2} - \frac{2}{6} + 1$$

$$\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$-\frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{2}{6} - 1$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10 \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 13^2 \end{cases}$$



$$30^\circ: \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$36 \mid 12$$

$$\frac{1}{3}$$

$$(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$$

$$x^2 - 5$$

$$6x^2 + x - 5$$

$$x - y + 5 + x + y + 5 \leq 10$$

$$2x \leq 10$$

$$x \leq 5$$

$$(3) \quad x + y + 5 - x + y - 5 \leq 10$$

$$2y \leq 10 \quad y \leq 5$$

$$(4) \quad -x + y - 5 -$$

$$6x^3 + x^2 - 3x - 1 = (x-1)^2 - x - 2 - x - y - 5 \leq 10$$

$$x^2 - 2x + 1$$

$$-2x - 10 \leq 10$$

$$-2x \leq 20$$

$$x \geq -10$$

$$(x-1)^2 + 6x^3 + x^2 - 3x - 1$$

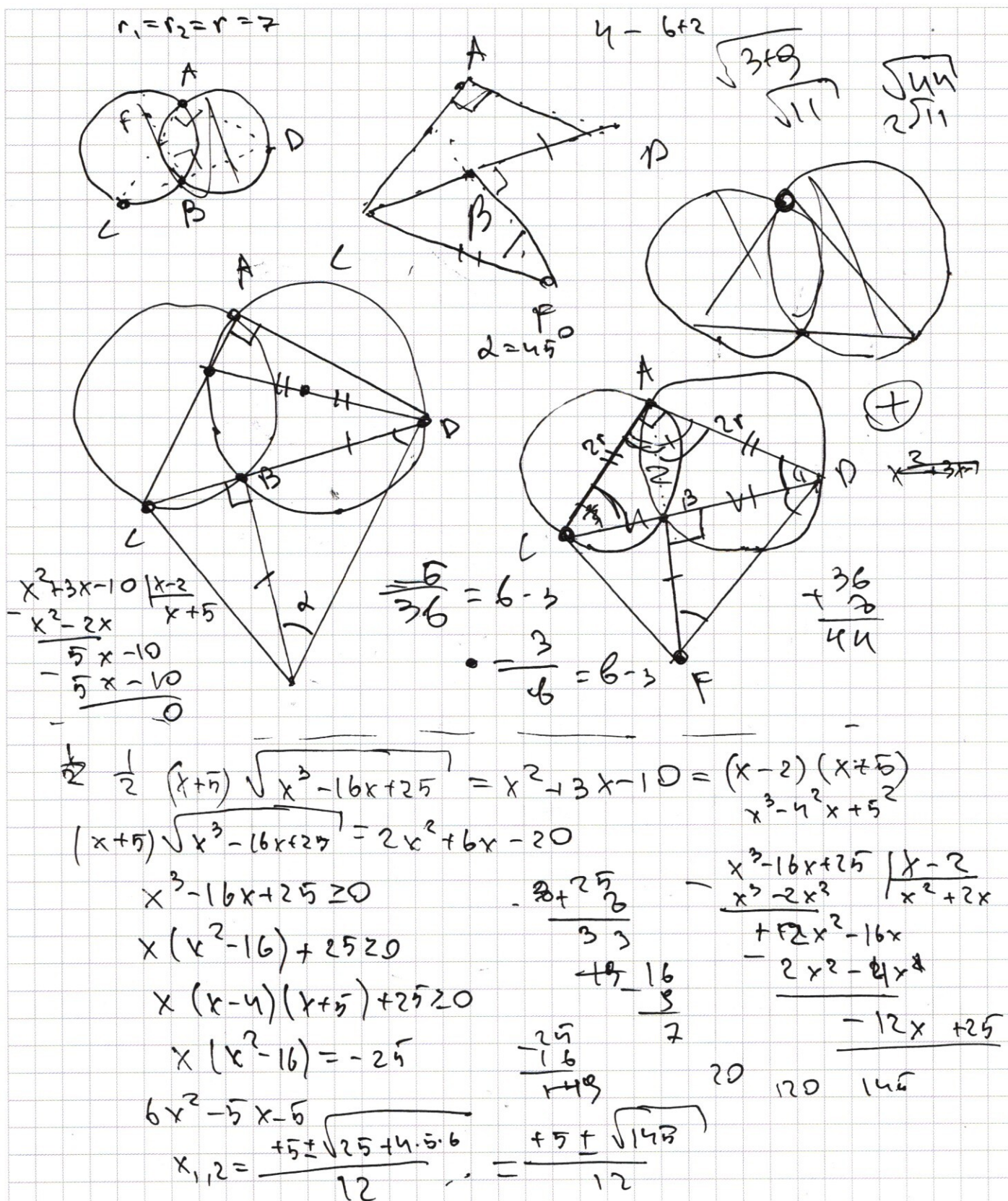
$$x(6x^2 - 1) - 2$$

$$6x(x^2 - \frac{1}{6}) - 2$$

$$6x$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$$x \leq -1$$

$$6x^4 + x^2 + 2x + 5x^3 + 5x^2 + 1 \geq 0$$

$$6x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

~~$$6x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 2x + 1$$~~

~~$$(x+1)^2 + 5x^2 + 6x^4 + 5x^3$$~~

$$x^2(5 + 6x^2 + 5x)$$

$$x^2(6x^2 + 5x + 5)$$

$$6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$6x^4 - 5x^3 - 5x^2 + (x+1)^2 \geq 0$$

$$x^2(6x^2 - 5x - 5) + (x+1)^2 \geq 0$$

~~$$25 + 4 \cdot 6 \cdot 5$$~~

~~$$6x^4 + x^2 +$$~~

$$\begin{array}{r} 6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1 \\ 6x^4 + 6x^3 \end{array}$$

$$-11x^3 - 4x^2$$

$$-11x^3 - 11x^3$$

$$-7x^2 + 2x$$

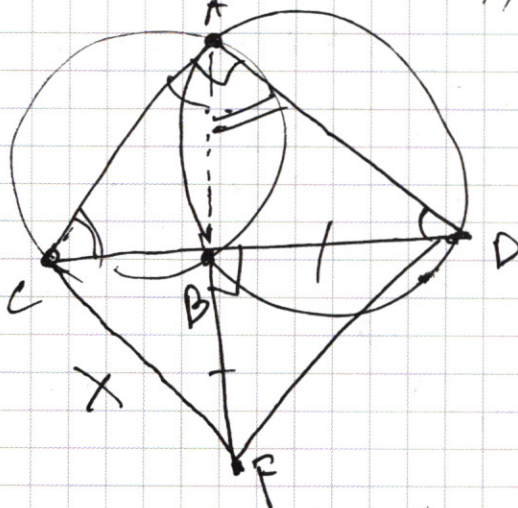
$$7x^2 + 7x$$

$$-5x + 1$$

$$\left. \begin{array}{l} x+1 \\ 6x^3 + 11x^2 + 7x \end{array} \right\}$$

$$x^2(26x^2 - 5x) - 4x^2 + 2x + 1$$

$$4x -$$



$$6 - 5 + 6 - 2 + 1$$

$$\begin{array}{cccc} 2 & 4 & 8 & 16 \\ 6 \cdot 16 - 5 \cdot 8 + 6 \cdot 4 + \\ & -4 & & +1 \end{array}$$

$$D = 25 - 4 \cdot 6 \cdot 5$$