МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФ[

Бланк задания должен быть вложен в р[
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0;0)$. Муравей двигается по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0\left(-1;\sqrt{3}\right)$ и $N_0\left(2\sqrt{3};2\right)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b, при каждой из которых система уравнений
$$\begin{cases} 3(a+b)x+12y=a, \\ 4bx+(a+b)by=1 \end{cases}$$
имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10}=x^2+5x+6$.

4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4+x^2-2x-3x^2|x-1|+1\geqslant 0$.

5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD=90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF=BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

7. [6 баллов] Решите систему
$$\begin{cases} |x-3-y|+|x-3+y|\leqslant 6, \\ (|x|-3)^2+(|y|-4)^2=25. \end{cases}$$

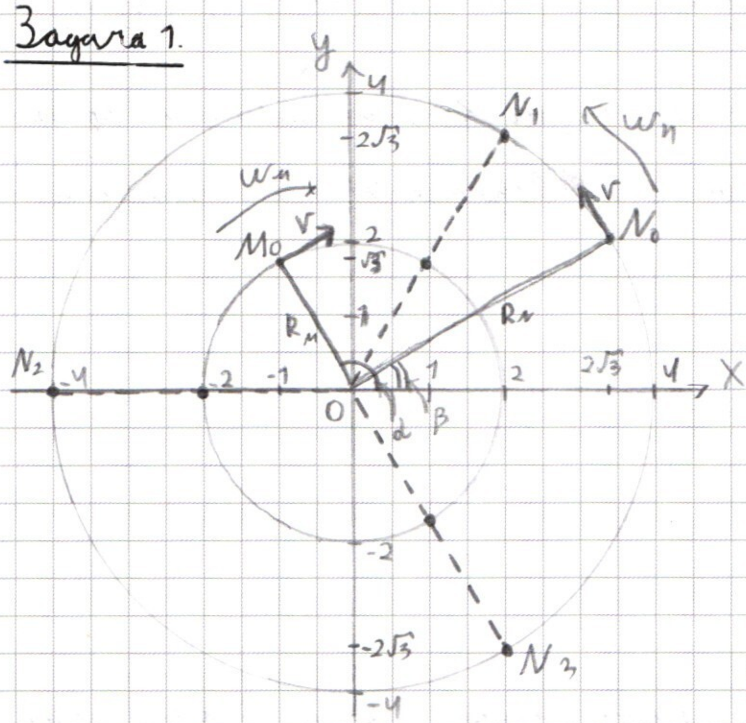
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

$M_0(-1;\sqrt{3})$, $N_0(2\sqrt{3}, 2)$ | N_1 - ?



Найдем радиусы окружностей, по которым движутся жук и муравей:

$R_N = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$

$R_M = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

Так как радиус R_M в два раза меньше радиуса R_N, то угловая скорость муравья w_M в два раза больше угловой скорости жука w_N: $\frac{w_M}{w_N} = \frac{\frac{V}{R_M}}{\frac{V}{R_N}} = 2$.

(v – скорость жука и муравья).

Зададим положение жука и муравья через углы, которые образуют отрезки M_0O и N_0O с осью Ox в начальный момент времени.

$tg\,\alpha_0 = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3} \Rightarrow \alpha_0 = 120°$, $tg\,\beta = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \beta = 30°$.

Тогда положение жука и муравья в некоторый момент времени задается формулой: $\alpha_\tau = \alpha_0 - w_M\tau$, $\beta_\tau = \beta_0 + w_N\tau$.
Также заметим, что минимальное расстояние между жуком и муравьем тогда, когда $\alpha_\tau \overset{mod\,360°}{=} \beta_\tau$. Используя соотношение $\frac{w_M}{w_N} = 2$, и делая замену $w_N\tau = \alpha_N$ получим: $\alpha_0 - 2\alpha_N \overset{mod\,360°}{=} \beta_0 + \alpha_N$,

$\alpha_0 - \beta_0 \overset{\bmod 360^\circ}{=} 3\alpha_n$, ~~$\alpha_n \overset{\bmod 120^\circ}{=} \frac{\alpha_0-\beta_0}{3}$~~ , $\alpha_n = 30^\circ, 150^\circ, 270^\circ.$ *

Тогда искомые положения жука $\beta = \beta_0 + \alpha_n = 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$, жук находится в точках $N_1(2;\ 2\sqrt{3})$, $N_2(-4;\ 0)$, $N_3(2;\ -2\sqrt{3})$.

<u>Ответ: $N_1(2;\ 2\sqrt{3})$, $N_2(-4;0)$, $N_3(2;-2\sqrt{3})$</u>

---

* на самом деле это уравнение имеет бесконечно много корней, но в координатной плоскости они сводятся к трем приведенным.

<u>Задача 2</u>

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a & (1) \\ 4bx + (a+b)by = 1 & (2) \end{cases}$$

Система имеет бесконечно много корней, если отношения коэффициентов при x, y и свободных членов равны:

$$\frac{4b}{3(a+b)} = \frac{b(a+b)}{12} = \frac{1}{a} \quad \Big| \cdot 12a(a+b)$$

$$16ab = ab(a+b)^2 = 12(a+b) \quad (3)$$

Если $b=0$, то второе уравнение не имеет решений.

Если $(a+b)=0$, то система принимает вид:

$$\begin{cases} 12y = a \\ 4bx = 1 \end{cases}$$, и имеет единственное решение $\left(\frac{1}{4b};\ \frac{a}{12}\right)$.

Если $a=0$, то система принимает вид:

$$\begin{cases} 3bx + 12y = 0 \\ 4bx + b^2y = 1 \end{cases}$$, и имеет единственное решение $\left(\frac{4}{16b-b^3};\ \frac{1}{b^2-16}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тогда равенство (3) превращается в систему.

$$\begin{cases} 16ab = ab(a+b)^2 \\ 16ab = 12(a+b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16 = (a+b)^2 \\ ab = 0{,}75(a+b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{a^2+2ab+b^2=16} \quad a+b = \pm 4 \\ a+b = \frac{4}{3}ab \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b = \pm 4 \\ ab = \pm 3 \end{cases} \Rightarrow \cancel{\left[\begin{array}{l} a=1;\ b=3 \\ a=-1;\ b=-3 \end{array}\right.} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=1;\ b=3 \\ a=-2+\sqrt{7};\ b=-2-\sqrt{7} \\ a=-2-\sqrt{7};\ b=-2+\sqrt{7} \end{array}\right.$$

Ответ: $(1;3)$, $(-2+\sqrt{7};-2-\sqrt{7})$, $(-2-\sqrt{7};-2+\sqrt{7})$

Задача 3

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$$

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = (x+3)(x+2)$$

$x=-3$ не удовлетворяет ОДЗ

$$\sqrt{x^3-x+10} = x+2$$

$$x^3-x+10 = (x+2)^2$$

$$x^3-x^2-5x+6=0$$

$$(x-2)(x^2+x-3)=0$$

$$(x-2)\left(x-\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{13}-1}{2}\right)=0$$

$$x_1=2;\ x_2=\frac{1+\sqrt{13}}{2};\ x_3=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$$

Ответ: $2;\ \frac{1+\sqrt{13}}{2};\ \frac{1-\sqrt{13}}{2}$

Задача 5

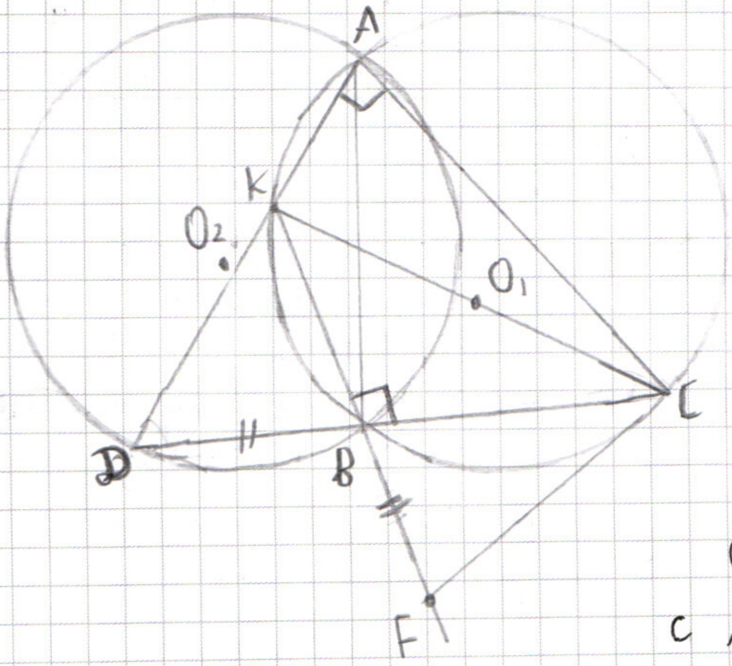
Разложим 1400 на множители:

$1400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 5\cdot 5\cdot 7$

Восьмизначное число может состоять из цифр 1,1,2,2,2,5,5,7; или 1,1,1,2,4,5,5,7 или 1,1,1,1,8,5,5,7. Количество восьмизначных чисел первого типа: $N_1 = \frac{8!}{2!\,3!\,2!} = 1680$, второго типа: $N_2 = \frac{8!}{3!\,2!} = 3360$, третьего типа: $N_3 = \frac{8!}{4!\,2!} = 840$. Общее число чисел: $N = N_1 + N_2 + N_3 = 5880$.

Ответ: $N = 5880$.

Задача 6



$R = 9$, $\angle CAD = 90°$, $KF \perp DC$, $BF = BD$	CF - ?

K – точка пересечения AD и перпендикуляра к DC через т. B. Рассмотрим четырехугольник BKAC: $\angle KBC = \angle KAC = 90°$ => BKAC вписанный; точки A, B и C лежат на одной окружности => => K тоже лежит на этой окружности.

Т. к. $\angle KAC = 90°$, то KC – диаметр окружности => => $KC = 2R = 18$. Рассмотрим $\triangle DAC$: $\angle BCA$ опирается на хорду AB окружности, $\angle BDA$ опирается на хорду AB равной

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

МФТИ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

окружности $\Rightarrow \angle ACB = \angle ADB$, а так как $\angle DAC = 90^\circ$, то $\angle ACB = \angle ADC = 45^\circ$. Теперь рассмотрим $\triangle DBK$: $\angle KDB = 45^\circ$, $\angle DBK = 90^\circ \Rightarrow \angle DKB = 45^\circ \Rightarrow DBK$ равнобедренный, $DB = BK = BF$. И наконец рассмотрим $\triangle KCF$: у него высота CB является медианой $(KB = BF) \Rightarrow \triangle KCF$ равнобедренный, $KC = CF$. Отсюда $CF = KC = 2R = 18$

Ответ: $CF = 18$

Задача 4

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$$

Раскроем модуль:

$x \geq 1$	$x < 1$
$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^3 + 3x + 1 \geq 0$	$2x^4 + x^2 - 2x + 3x^3 - 3x^2 + 1 \geq 0$
$2x^4 - 3x^3 + x^2 + x + 1 \geq 0$	$(x+1)(2x^3 + x^2 - 3x + 1) \geq 0$
верно при любом x	$(x+1)(x-0{,}5)(2x^2 + 2x - 2) \geq 0$
	$(x+1)(2x-1)(x^2 + x - 1) \geq 0$
	$(x+1)(2x-1)(x + 0{,}5 + \sqrt{1{,}25})(x + 0{,}5 - \sqrt{1{,}25}) \geq 0$

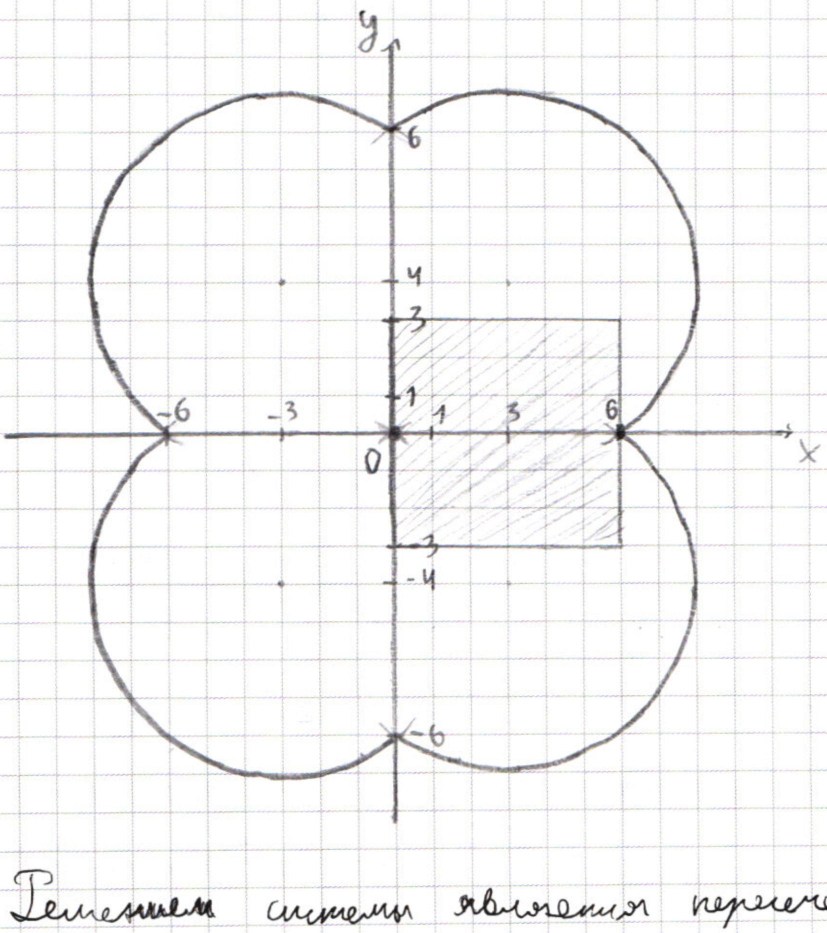
$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ -1 $0{,}5$ $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ x

Ответ: $x \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right], [-1; 0{,}5], \left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$.

Задача 7

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \le 6 & (1) \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25 & (2) \end{cases}$$

Решим систему графически. Решением первого ~~уравнения~~ неравенства является сплошной прямоугольник с вершинами в точках $(0;3)$, $(6;3)$, $(6;-3)$, $(0;-3)$. Решением второго уравнения является часть окружности с центром в точке $(3;4)$ радиуса 5, симметрично отраженная во все координатные четверти:



Решением системы является пересечение решений уравнения и неравенства, т.е. точки $(0;0)$ и $(6;0)$

Ответ: $(0;0)$, $(6;0)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА