

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра-
боты без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Вокруг птичьей кормушки в одной плоскости с ней по двум окружностям с одинаковой скоростью летают синица и снегирь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой кормушка (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Синица движется по часовой стрелке, а снегирь – против. В начальный момент времени синица и снегирь находятся в точках $M_0(\sqrt{3}; 3)$ и $N_0(6; -2\sqrt{3})$ соответственно. Определите координаты всех положений снегиря, в которых расстояние между птицами будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a, \\ 3bx + (a-b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

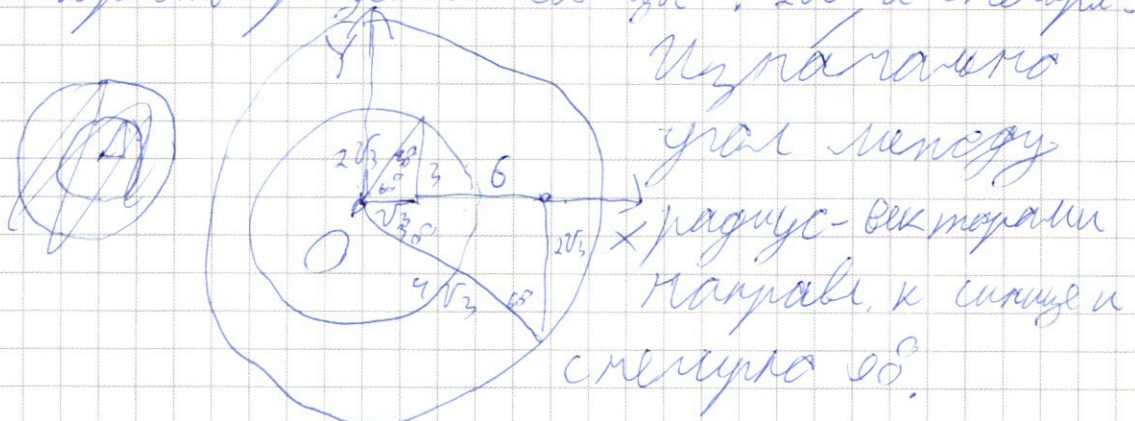
3. [4 балла] Решите уравнение $\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2|x+1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 7000. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 7 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10, \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

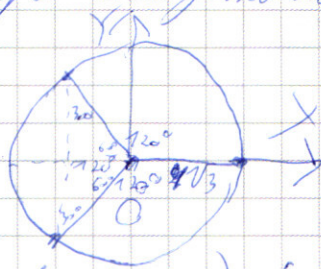
Радиус окр., по которой движется спутник: $r_1 = \sqrt{3} \cdot 6 = 2\sqrt{3}$
а по которой летит самолет: $r_2 = \sqrt{36 + 12} = 4\sqrt{3}$
 $r_2 / r_1 = 2$. Скорости круж. движения одинаковы $\Rightarrow$ угловая скорость вращения спутника $\omega_1 = 2\omega$, а самолета: ω .



Изначально угол между радиус-векторами направлен к спутнику и самолету 60° .

Из этих скоростей следует, что первая встреча состоится между птицами кратчайшее, когда радиус-векторы направлены на них совпадают. Будем называть такую ситуацию встречей. Первая встреча произойдет, когда радиус-векторы будут сонаправлены оси Ox . (Следует из вычислений на рисунке величин углов). До каждой след. встр. ~~на~~ радиус-вектор направленный на самолет будет поворачиваться на $\frac{360^\circ}{\omega - (2\omega)} \cdot \omega = 120^\circ$ против часовой стрелки. Таким образом θ (н.к. $360^\circ : 120^\circ, 360^\circ : 120^\circ = 3$)

Встречи будут происходить только при $\frac{6x}{3}$ кало-
исерия смущая,
а именно тогда
цифры находятся
в точках $(2\sqrt{3}, 0)$, $(-\sqrt{3}, 3)$, $(-\sqrt{3}, -3)$ (следует из
ответа: $(2\sqrt{3}, 0)$, $(-\sqrt{3}, 3)$, $(-\sqrt{3}, -3)$)



и 5

$$4000 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 7,$$

7 и 5 при умножении на натуральное число, больше
и становится больше 10 $\Rightarrow$ в искомого все-
возможных числах есть цифры 7, 5, 5, 5.

Есть 3 варианта оставшихся четырех цифр:

1) 2, 2, 2, 1. Таких чисел будет $\frac{8!}{3! \cdot 3!} = 1120$

2) 4, 2, 1, 1. Таких чисел будет: $\frac{8!}{3! \cdot 2!} = 3360$

3) 8, 1, 1, 1. Таких чисел будет: $\frac{8!}{3! \cdot 3!} = 1120$

Итого: $3360 + 1120 + 1120 = 5600$

Ответ: 5600

и 4

$$6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2 | x+1 | + 1 \geq 0$$

при $x \geq -1$: $6x^4 - 5x^2 + 2x + 1 \geq 0$

$$(x-1)(2x+1)(3x^2-x-1) \geq 0$$

$$(x+0,5)(x-1)(3x^2-x-1) \geq 0$$

$3x^2 - x - 1$, Δ ветви вверх, нули функции $-\frac{1 \pm \sqrt{13}}{6}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(x+0,5)(x-1)(3x^2-x-1) \geq 0 \quad \text{при } x \in [-1; -0,5] \cup \left[\frac{1-\sqrt{13}}{6}; \frac{1+\sqrt{13}}{6}\right] \cup$$



$$\text{при } x \geq -1, 6x^4 + 5x^3 + 5x^2 + (x+1)^2 \geq 0$$

$$(x+1)^2 + 6x^4 + 5x^2(x^2+x+1) \geq 0$$

$$x \in (-\infty; -1)$$

$$x \in (-\infty; -0,5] \cup \left[\frac{1-\sqrt{13}}{6}; \frac{1+\sqrt{13}}{6}\right] \cup [1; +\infty)$$

$$\text{Ответ: } x \in (-\infty; -0,5] \cup \left[\frac{1-\sqrt{13}}{6}; \frac{1+\sqrt{13}}{6}\right] \cup [1; +\infty)$$

и т

$$|x+y+5| + |x-y+5| \leq 10$$

$$\text{при } |x+5| \geq |y|: |x+y+5| + |x-y+5| = 2|x+5| \Rightarrow |y| \leq |x+5| \leq 5$$

$$\text{при } |x+5| \leq |y|: |x+y+5| + |x-y+5| = 2|y| \Rightarrow |x+5| \leq |y| \leq 5$$

$$\begin{cases} |x+5| \leq 5 \Rightarrow x \in [-10; 0] \\ |y| \leq 5 \Rightarrow y \in [-5; 5] \end{cases}$$

Решим координатную плоскость XOY.

решения уравнения: $(|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169$ — это
окружность радиуса 13 с центрами в точ-
ках: $(5; 12), (-5; 12), (-5; -12), (5; -12)$. (окружности
1, 2, 3, 4 соответственно). Тогда решение
системы это дуга 1-ой окр, ограниченная точками

$(0; 0)$ и $(5 - \sqrt{169 - (12-5)^2}; 5)$, дуга 2^{ой} окр. окр. точками
 $(0; 0)$ и $(0; -10)$, дуга 3^{ей} окр. окр. т. $(0; 0)$ и $(0; -10)$ и
 дуга 4^{ой} окр. окр. точками $(0; 0)$ и $(5 - \sqrt{169 - (12-5)^2}; -5)$
 Ответ: дуга 1^{ой} окр. окр. т. $(0; 0)$ и $(5 - \sqrt{169}; 5)$, дуга 2^{ой}
 окр. окр. т. $(0; 0)$ и $(0; -10)$, дуга 3^{ей} окр. окр. т. $(0; 0)$ и $(0; -10)$,
 дуга 4^{ой} окр. окр. т. $(0; 0)$ и $(5 - \sqrt{169}; -5)$
 N 3

$$\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$$

$$x = -5 \text{ или } \sqrt{x^3-16x+25} = 2(x-2)$$

$$x^3-16x+25 = 4x^2-16x+16$$

$$x^3-4x^2+9=0$$

$$(x-3)(x^2-x-3)=0$$

$$x = 3; \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\text{Ответ: } x = x = \left\{ -5; 3; \frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right\}$$

N 2

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a \\ 3bx + (a-b)by = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b(a-b)^2x + 6b(a-b)y = a^2b - ab^2 \\ 18bx + 6b(a-b)y = 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2b(a-b)^2 - 18)x = a^2b - ab^2 - 6$$

$$\text{при } (2b(a-b)^2 - 18) \neq 0: x = \frac{a^2b - ab^2 - 6}{2b(a-b)^2 - 18}, \text{ при подстановке } x$$

в уравнение $2(a-b)x + 6y = a$, y определяется однозначно

$\Rightarrow$ при $2b(a-b)^2 - 18 \neq 0$ не более 1^{ого} решения. $\square$

Пусть система имеет бесконечно много решений. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} b(a-b)^2 - 9b = a^2b - ab^2 - 6 = 0 \\ \text{или } b=0; 3bx + (a-b)by = 1 \Rightarrow a=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2b - ab^2 - 6 = 0 \\ ab(a-b) = 6 \\ 18a^2b - 2b^2a + b^3 - 9b = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - ab = 6/b \\ b^2 - b^2/a - 9b = -6 \end{cases} \Rightarrow ab - a^2 = b^2 - ab - 9 \Rightarrow |a - b| = 3.$$

при $a - b = 3$: $ab(a - b) = 6 \Rightarrow ab = 2$. $\begin{cases} a - b = 3 \\ ab = 2 \end{cases} \Rightarrow$
 $\Rightarrow b(b + 3) = 2 \Rightarrow b^2 + 3b - 2 = 0 \Rightarrow b = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$ рас.

$$a, b = \left(\frac{3 + \sqrt{17}}{2}; -\frac{3 + \sqrt{17}}{2} \right), \left(\frac{3 - \sqrt{17}}{2}; -\frac{3 - \sqrt{17}}{2} \right)$$

$$\begin{cases} 6x + 6y = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \\ -\frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} (3x + 3y) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow 6x + 6y = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \text{ беск. много} \\ \text{реш.}$$

при $a - b = -3$: $ab(a - b) = 6 \Rightarrow ab = -2$. $\begin{cases} a - b = -3 \\ ab = -2 \end{cases} \Rightarrow$

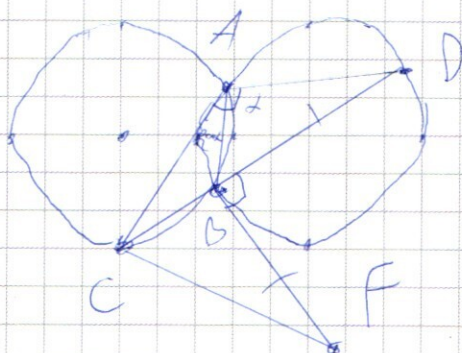
$$\Rightarrow a, b = (b - 3)b = -2 \Rightarrow (b - 2)(b - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a, b = (-1; 2), (-2; 1)$$

$$\begin{cases} -6x + 6y = -1/-2 \\ 2/1 (3x - 3y) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow -6x + 6y = -1/-2 \text{ беск. много} \\ \text{реш.}$$

ответ: $\left(\frac{3 + \sqrt{17}}{2}; -\frac{3 + \sqrt{17}}{2} \right), \left(\frac{3 - \sqrt{17}}{2}; -\frac{3 - \sqrt{17}}{2} \right), (-1; 2), (-2; 1)$

N 6



- 1) $\angle BAD = \alpha \Rightarrow \angle BAC = 90^\circ - \alpha$
- 2) $BF = BD = 2 \cdot 7 \cdot \sin \alpha$, $CB = 2 \cdot 7 \cdot \sin 90^\circ - \alpha = 2 \cdot 7 \cdot \cos \alpha$ по Т синусов
- 3) $CF = \sqrt{BF^2 + CB^2} = 14 \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = 14$ по Т Пифагора, по свойству

квадрата синуса и косинуса
Ответ: 14

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2b(a-b)^2x + 6(a-b)by = a^2b - ab^2$$

$$2a^2 + 6y = a$$

$$18bx + 6(a-b)by = 6$$

$$\frac{6x + 6y}{3bx} = a$$

$$a^2b - ab^2 - 6 = 0$$

$$ab = 2$$

$$a - b = 3$$

$$a^2b - ab^2 - 6 = 0$$

$$b^2 - ab - 9 = -6$$

$$b^3 - ab^2 - 9b + 6 = 0$$

$$a^2b - ab^2 - 6 = 0$$

$$(a-b)ab = 6$$

$$ab = 2$$

$$b^3 - ab^2 - 9b + 6 = 0$$

$$b(b^2 - ab - 9) = -6$$

$$|a - b| = 3$$

$$b^3 - 2b - 9b + 6 = 0$$

$$(a-b)a = \frac{6}{b}$$

$$a^2b - 9b - b^3 = 6$$

$$b^2 - ab - 9 = -\frac{6}{b}$$

$$a^2ab = -b^2 + ab + 9$$

$$(a-b)b^3 - 11b + 6 = 0$$

$$a - b^2 = \frac{11}{b}$$

$$\frac{3 - 2\sqrt{13}}{2}$$

$$(b-3)(b^2+3b-2)$$

$$8 - 22 + 5$$

$$3b^2 - 27 - 33 + 6 = 0$$

$$b = 3$$

$$\frac{-3 + 2\sqrt{13}}{2}$$

$$(b-3)(b-1)$$

$$b^2 + 3b - 2 = 0 \quad b = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\frac{-3 - \sqrt{13}}{2}$$

$$3x - 3y = \frac{1}{2} / 1$$

$$6x - 6y = -1 / -2$$

$$\frac{(-3 - \sqrt{13})(3 - \sqrt{13})}{4}$$

$$\frac{-3 + 2\sqrt{13}}{2}$$

$$3 + \sqrt{13}$$

$$\frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\frac{4(\pm 3 \pm \sqrt{13})}{8} \quad a = b - 3$$

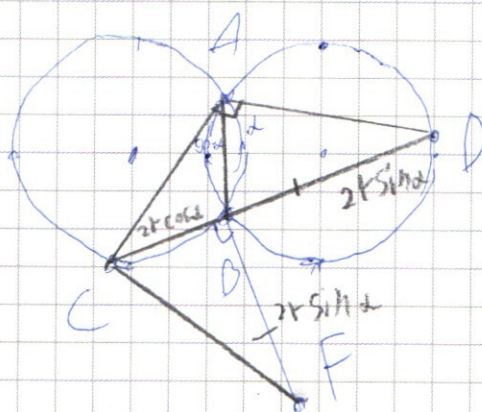
$$b = a + 3$$

$$a = b - 3$$

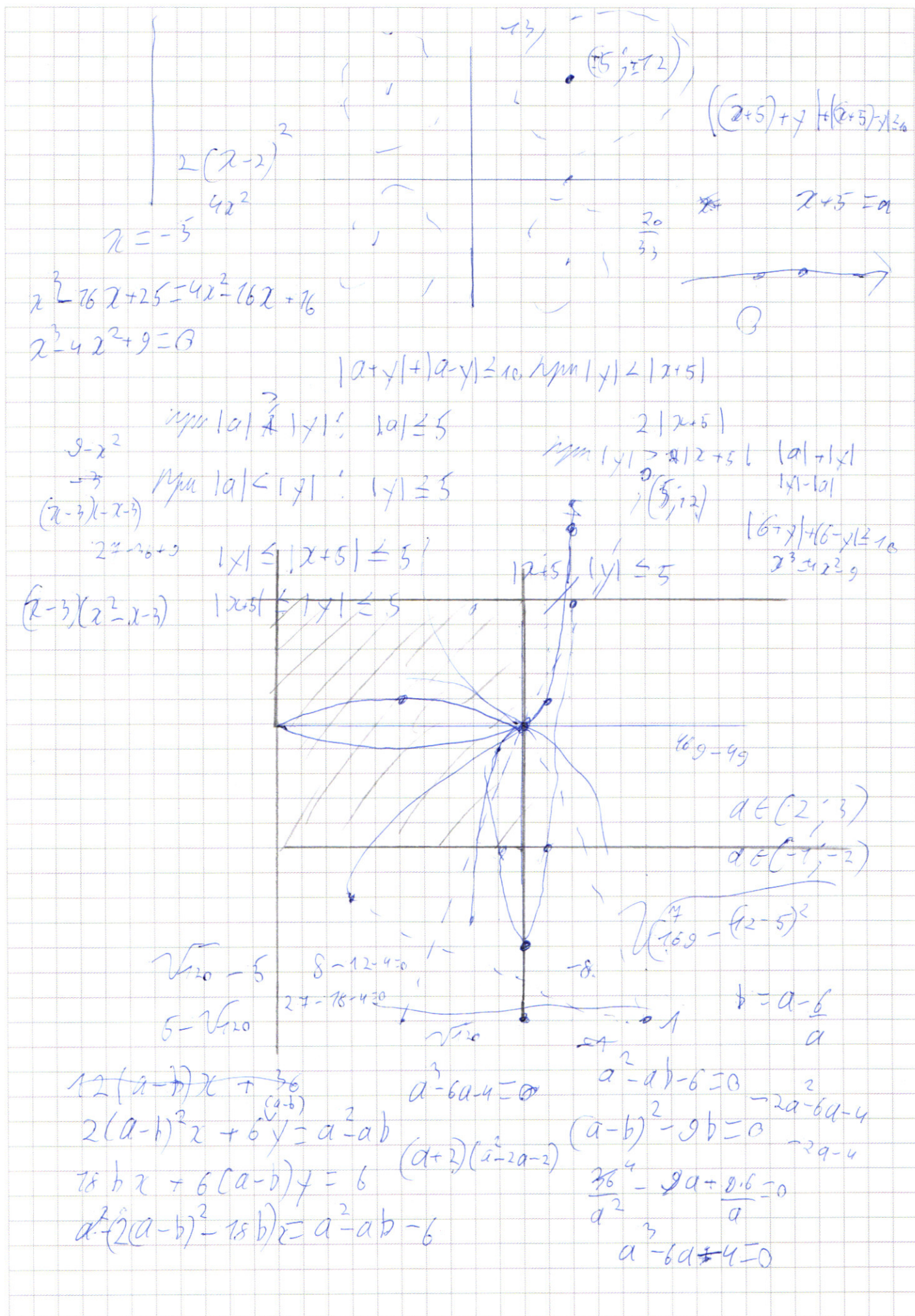
$$(b-3)b = -2$$

$$b^2 - 3b + 2 = 0$$

$$(b-2)(b-1) = 0$$



$$4\sqrt{2}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(x+a)(x^2+bx+\frac{9}{a}) = x^3-4x^2+9$$

$$a+b=-4$$

$$b=-(a+4)$$

$$(x+a)(x^2-(a+4)x+\frac{9}{a}) = x^3-4x^2+9$$

$$\frac{9}{a} - a^2 - 4a$$

$$7, 5, 5, 5, 2, 2, 2, 1$$

$$7, 5, 5, 5, 4, 2, 1, 1$$

$$7, 5, 5, 5, 8, 1, 1, 1$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 5!}$$

$$1120 \cdot 5$$

$$5600$$

$$(a-1)^4 =$$

$$a = x+1$$

$$a^4 - 4a^3 + 6a^2 - 4a + 1 = (a-1)^4$$

$$5x^4 + (x+1)^2 \geq 5x^2 | x+1 |$$

$$6x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$(x+1)^2$$

$$6x^4 + 2x^3 + 2x + 1 \geq 5x^3 - 5x^2$$

$$-\frac{3}{4} - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} - 1$$

$$6x^4 + 5x^3 + 5x^2 \geq 0$$

$$6x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$5x^4 + 2x^3 + x^2 \geq 0$$

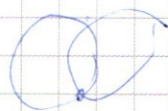
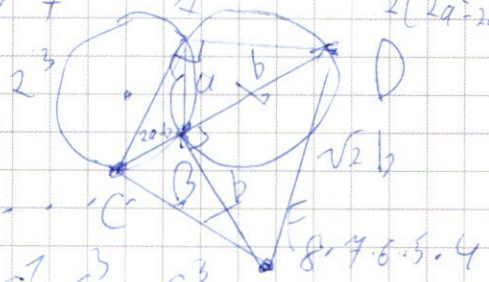
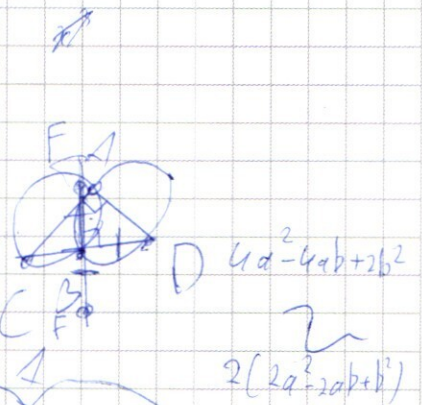
$$(x-1)(6x^3 + 2x^2 - 3x - 1) \geq 0$$

$$\frac{1-\sqrt{13}}{6} > \frac{2-4-2,5}{6}$$

$$x$$

$$(x-1)(2x+1)(3x^2-x-1)$$

$$-0,5 \frac{1-\sqrt{13}}{6} \quad 1$$



$$1120 \quad 56$$

$$x = -5$$

$$(x+5)\sqrt{x^2-16x+25} = 2(x+5)(x-2)$$

$$x^2-16x+25 = 4(x-2)^2 = 4x^2-16x+16$$

$$x^2-4x^2+9=0$$

$$x^2-4x^2+9=4x$$

$$x^2-4x^2+4x$$

$$x(x-2)^2 = 4x-9$$

$$(x+5)(x^2-16x+25) = 2(x+5)(x-2)$$

$$-1-4+9$$

$$\frac{9}{a} + 2b = 0$$

$$2(a-b)x + 6y = a$$

$$2+a^2b=0$$

$$a+b=4$$

$$b=$$

$$3abx + (a^2-ab)y = a$$

$$(x+5)(x^2-16x+25) = 2(x+5)(x-2)$$

$$\frac{9}{a} - 4 = 0$$

$$a+4 = \frac{9}{a}$$

$$a^2-4a-9=0$$

$$a = \frac{4 \pm \sqrt{16+36}}{2}$$

$$\sqrt{13}-2$$

$$17-4\sqrt{13}$$

$$17-18-4$$

$$17\sqrt{13}+8\sqrt{13}$$

$$\left(\frac{6}{b}-9\right)-9b=0$$

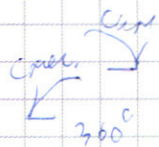
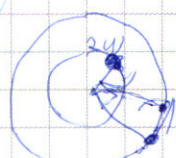
$$\frac{36}{b^2} \left(\frac{2}{b}-3\right)^2 = b$$

$$\frac{4}{b^2} - 12 + 9 = b$$

$$b^3-9b^2-12b-4=0$$

$$\frac{4}{a} - u^2 = 6$$

$$u^3$$



$$r_1 = \sqrt{12}$$

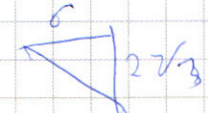
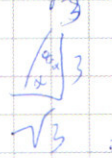
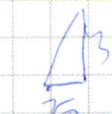
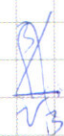
$$36+12$$

$$48$$

$$r_2 = 2\sqrt{12}$$

$$2\sqrt{12}\pi$$

$$4\sqrt{12}\pi$$



$$16\sqrt{13}-59$$

$$a^2-ab+6$$

$$18bx - 6(a-b)y = 6$$

$$2(a-b)^2x + 6(a-b)y = 6a^2-ab$$

$$(2a^2+2b^2-4ab-18b)x = a^2-ab-6$$

$$x = \frac{a^2-ab-6}{2a^2+2b^2-4ab-18b}$$

$$a^2-ab-b^2 = 6$$

$$a^2-ab-6=0$$

$$2(a-b)^2 = 18b$$

$$(a-b)^2 = 9b$$

$$\frac{36}{a^2} - 9a + \frac{54}{a} = 0$$

$$\frac{4}{a^2} - a + \frac{9}{a} = 0$$

$$a^3-6a-4=0$$