

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра-
боты без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Муравей движется по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0(-1; \sqrt{3})$ и $N_0(2\sqrt{3}; 2)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a, \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

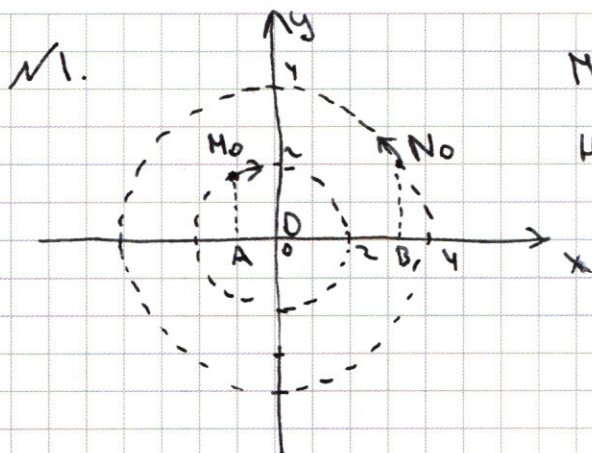
имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6, \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25. \end{cases}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$M_0(-1; \sqrt{3}), N_0(2\sqrt{3}; 2)$$

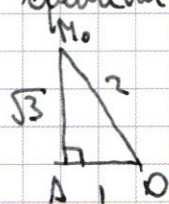
Найдем радиусы окружностей, по которым бегают муравей и тук.

$$OM_0 = \sqrt{1+3} = 2$$

$$ON_0 = \sqrt{12+4} = 4.$$

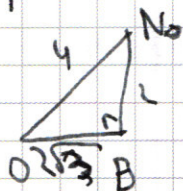
П.к. скорости муравья и тук равны, их угловые скорости относятся также, как радиусы окружностей, по которым они бегают, т.е. $4:2=2$, в 2 раза.

Теперь найдем угол, на который в начальный момент времени тук отклонен от оси, противоположной ОХ:



$$\angle AOM_0 = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = 60^\circ.$$

Теперь найдем угол, который в начальный момент времени составляет с ОХ муравей:



$$\angle BON_0 = \arcsin \frac{1}{2} = 30^\circ.$$

угловое расстояние между муравьем и тук в начальный момент времени равно $60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$.

Теперь, т.к. скорость тук (угловая) в 2 раза больше угловой скорости муравья, обозначим проекцию ^{меньше} к моменту

встретим муравьев ^(улитки) ~~на~~ расстоянии $2x$, получим $3x = 30$, откуда $x = 30$. (Это, что именно в момент, когда муравей, тук и улитка сахара лежат на одной прямой, расстояние между тукан и муравьем минимально).

Так, как в момент первой встречи ~~каждое~~ положение муравья будет симметрично улитке относительно Ox , его координаты будут $(2; 2\sqrt{3})$.

Координаты муравья при следующей встрече: $(-4; 0)$, при следующей: $(2; -2\sqrt{3})$. Все последующие встречи циклически (отмечаются на 120°).

Ответ: $(2; 2\sqrt{3}), (-4; 0), (2; -2\sqrt{3})$.

$\sqrt{2}$

Все пары $a, b \in \mathbb{R}$, при которых система имеет бесконечно много решений.
$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a \\ 4bx + (a+b)y = 1 \end{cases}$$

т.к. графики уравнений, составляющих систему, представляют из себя ~~в~~ прямые, то для бесконечного множества решений нужно, чтобы соответствующие к-ты были пропорциональны. Обозначим этот-т за K и получим следующую систему:

$$\begin{cases} 3(a+b) = 4bk \\ 12 = (a+b)bk \\ a = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12 = (k+b)bk \\ 3(a+b) = 4bk \end{cases}$$

~~разделим одно уравнение на другое~~

разделим одно уравнение на другое. Следуй, когда частное нам будет рассмотрено позже.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{4}{k+b} = \frac{k+b}{4}, \quad (k+b)^2 = 16, \quad k+b = \pm 4$$

I. $k+b=4$
 $b=4-k$
 $12=(a+b)bk \Rightarrow 12=4(4-k)k$

$$3=(4-k)k$$

$$3=4k-k^2$$

$$k^2-4k+3=0$$

$$k_{1,2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

т.к. $a=k$, имеем следующие пары решений (a, b) : $(3; 1)$, $(1; 3)$.

II. $k+b=-4$
 $b=-4-k$
 $12=(k-4-k)(-4-k)k$
 $-3=-4k-k^2$
 $k^2+4k-3=0$
 $D=16+12=28$
 $k_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{28}}{2} = -2 \pm \sqrt{7} \Rightarrow$

$$\Rightarrow b = -2 \pm \sqrt{7}$$

$$(-2+\sqrt{7}; -2-\sqrt{7}), \quad (2;$$

$$-2-\sqrt{7}; -2+\sqrt{7}),$$

Теперь рассмотрим случаи когда решено система уравнений, решить было нельзя, т.е. при $a=0$.

Это может быть при следующих ситуациях:

$a=-b$, $b=0$, $k=0$. Но при всех этих случаях система разрешается единственным образом.

Ответ: $(3; 1)$, $(1; 3)$, $(-2-\sqrt{7}, -2+\sqrt{7})$, ~~$(-2+\sqrt{7}, -2-\sqrt{7})$~~
 $(-2+\sqrt{7}; -2-\sqrt{7})$.

$$\sqrt{3} \cdot (x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$$

$$\text{ОДЗ: } x^3-x+10 \geq 0$$

$$x^2+5x+6=0$$

$$D=25-24=1$$

$$x_{1,2} = \left[-\frac{5}{2} \right]$$

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = \cancel{x^2+5x+6} (x+3)(x+2)$$

$$\begin{cases} x+3=0 & x=-3 - \text{не ур. ОДЗ.} \end{cases}$$

$$\sqrt{x^3-x+10} = x+2$$

$$x^3-x+10 = (x+2)^2$$

$$x^3-x+10 = x^2+4x+4$$

$$x^3-x^2-5x+6=0$$

замечим, что $x=2$ является корнем

$$\begin{array}{r|l} x^3-x^2-5x+6 & x-2 \\ \hline x^3-2x^2 & \\ -x^2-5x & \\ x^2-2x & \\ -3x+6 & \\ -3x+6 & \\ \hline 0 & \end{array} \quad \begin{array}{l} x-2 \\ x^2+x-3 \end{array}$$

$$(x-2)(x^2+x-3)=0$$

$$\begin{cases} x=2 \\ x^2+x-3=0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^2+x-3 &= 0 \\ D &= 1+12=13 \\ x_{1,2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } 2; \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. Разложим 1400 на простые множители:

$$1400 = 100 \cdot 14 = 2 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 25 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7.$$

Теперь рассмотрим все варианты представления
1400 в качестве ~~множества~~ произведений множителей;
меньших 10: $1400 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 4 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 =$
 $= 8 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7.$

Понятно, что все остальные цифры в искоемых числах
будут единицами. Посчитаем для каждого варианта разложения
1400 на множители кол-во искоемых чисел и комбинаций:

вариант разложения	кол-во чисел
2, 2, 2, 5, 5, 7	C_6^6
4, 2, 5, 5, 7	C_5^5
8, 5, 5, 7	C_4^4

Ответ равен: $C_6^6 + C_5^5 + C_4^4 = 56 + 20 + 70 = 152.$

Ответ: 152.

$$\sqrt{7}. \quad \begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6 \\ ((x-3)^2 + (y-4)^2 = 25 \end{cases}$$

пусть $f(x, y) = |x-y| + |x+y|$

Понятно, что первая строка системы есть и то иное, как $f(x-3, y)$, т.е. график. исходной функции получается сдвигом $f(x)$ на 3 вправо.

выглядит $f(x, y)$

рассмотрим 4 случая раскрытия модулей: $\oplus\oplus, \oplus\ominus, \ominus\oplus, \ominus\ominus$.

1. $\oplus\oplus$. $t = x-3$

$$\begin{cases} t-y \geq 0 \\ y \geq t \\ t \leq 3 \end{cases} \quad \begin{aligned} &|t-y| + |t+y| \leq 6 \\ &t-y+t+y \leq 6 \Rightarrow t \leq 3 \end{aligned}$$

2. $\oplus\ominus$.

$$\begin{cases} t-y \geq 0 \\ y \geq -t \\ y \geq -3 \end{cases} \quad \begin{aligned} &|t-y| + |t+y| \leq 6 \\ &t-y-t-y \leq 6 \\ &y \leq -3 \end{aligned}$$

3. ~~$\oplus\oplus$~~ $\ominus\oplus$.

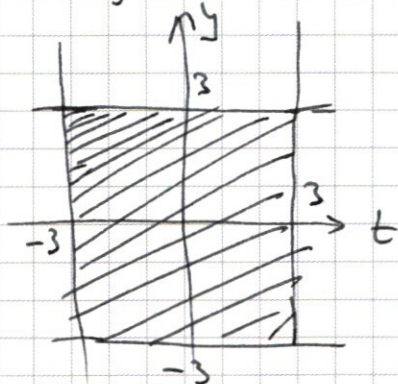
$$\begin{cases} y \leq 3 \\ y \geq t \\ y \geq -t \end{cases} \quad \begin{aligned} &|t-y| + |t+y| \leq 6 \\ &y-t+t+y \leq 6 \\ &y \leq 3 \end{aligned}$$

4. ~~$\oplus\ominus$~~ $\ominus\ominus$

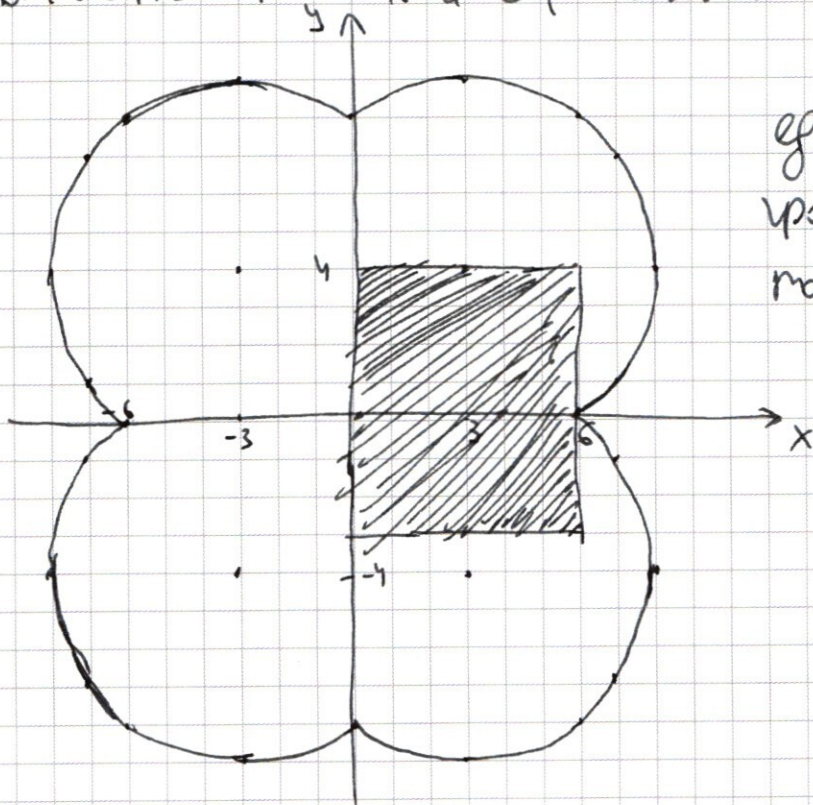
$$\begin{cases} t \geq 3 \\ y \geq t \\ y \geq -t \end{cases} \quad \begin{aligned} &|t-y| + |t+y| \leq 6 \\ &y-t-t-y \leq 6 \\ &t \geq 3 \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

нарисовать все возможные системы в системе $x-y$,
изобразив
получили:

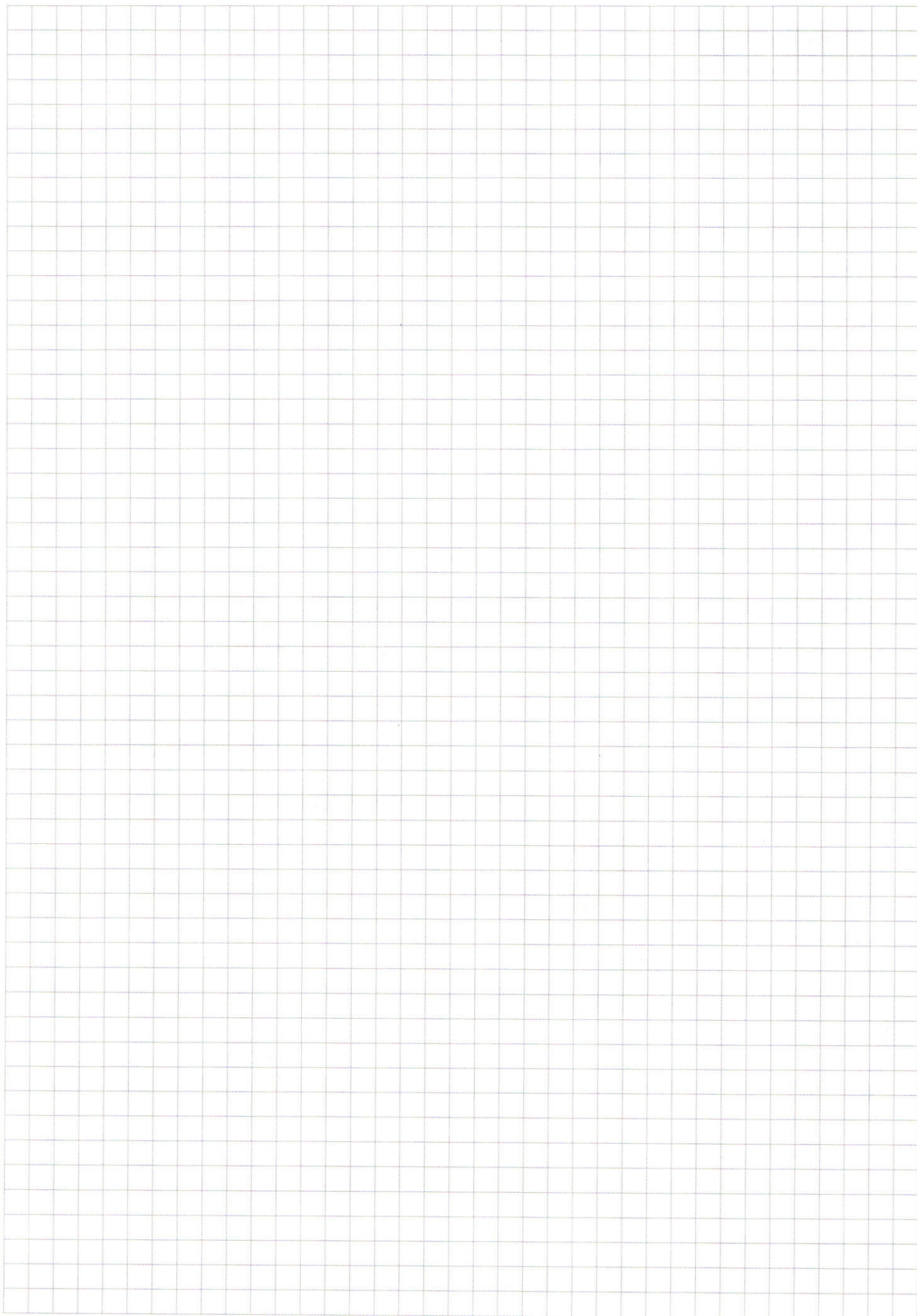


Теперь изобразим всю систему
(график второго уравнения получается симметрией
относительно Ox и Oy любой из ветвей):



единственное пересечение
графиков функций –
точка $(6; 0)$

Ответ: $(6; 0)$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$K+b=\pm 4$$

$$I. K+b=4$$

$$K=4-b, b=4-K$$

$$12=(a+b)bk \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12=(K+4-K)(4-K)K$$

$$12=4(4-K)K$$

$$3=(4-K)K$$

$$3=4K-K^2$$

$$K^2-4K+3=0$$

$$D_1=4-3=1$$

$$a=K_{1,2}=2 \pm 1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$b=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

формат ответа (a, b)

$$(3; 1), (1; 3)$$

$$? a=-b?$$

$$12y=a$$

$$-4x=1, x=-\frac{1}{4}, y=\frac{1}{12}a$$

$$(t; -t), t \in \mathbb{R}$$

Бесконечно много решений

$$\begin{cases} 3ax + 12y = a \\ 4bx = 1 \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{4b}$$

$$b=-3$$

$$\begin{cases} 12y=a \\ -4x=1 \end{cases}$$

$$3. (x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^3+5x+6$$

$$x^3+5x+6=0$$

$$D=25-24=1$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 1}{2} = \begin{cases} -3 \\ -2 \end{cases}$$

$$(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = (x+2)(x+3)$$

$$\begin{cases} x = -3 \end{cases}$$

$$\sqrt{x^3-x+10} = x+2$$

$$x^3-x+10 = x^2+4x+4$$

$$x^2 = \frac{1}{3}$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x^3-x^2-5x+6=0$$

$$\begin{array}{r|l} x^3-x^2-5x+6 & x-2 \\ \hline x^3-2x^2 & \\ \hline x^2-5x & \\ -x^2-2x & \\ \hline -3x+6 & \\ -3x+6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$x^2-5x$$

$$-x^2-2x$$

$$-3x+6$$

$$-3x+6$$

$$(x-2)(x^2+x-3)=0$$

$$x^2+x-3=0$$

$$D=1+12=13$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$-3; 2; \frac{-1+\sqrt{13}}{2}; \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$$

$$-\frac{1+\sqrt{13}}{2} \vee -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$13 \cdot 8 = 80 + 17 = 117$$

$$3+3\sqrt{13} \wedge 2\sqrt{3}$$

$$9+12\sqrt{13}+3 \cdot 13 \wedge 12$$

$$9+12\sqrt{13}+3 \cdot 13 > 12$$

$$\sqrt{9} < \sqrt{13} < \sqrt{16} \quad 3 < \sqrt{13} < 4$$

$$\sqrt{13} \sim 3,2$$

$$\left(\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}\right)^3 = (1,35)^3 < 6$$

$$-\frac{1+\sqrt{13}}{2} < -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\begin{array}{r} 1,35 \\ \times 1,35 \\ \hline 1,35 \\ 10,15 \\ \hline 17,25 \end{array}$$

$$\text{Ответ: } -3, 2, \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$-3 \text{ не } \in \mathbb{Q}$$

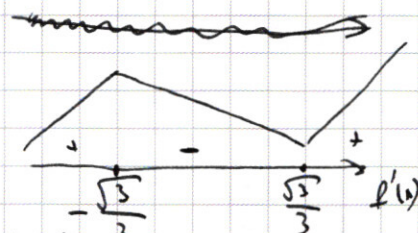
$$0/13: x^3-x+10 \geq 0$$

$$f(x) = x^3 - x + 10$$

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 = 1$$



$$\frac{\sqrt{3}}{3} - \text{точка минимума}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) > 0$$

на $-\infty$ "поднимается" минимум

- проверить на соответствие 0/13

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$f(4; 0) = |4-3| + |4-3| = 2$$

$$f(5; -2) = |5-3| + 2 + |5-3-2| =$$

$$= |4| + 2 = 6$$

$$f(3; 3) = |3-3-3| + |3-3+3| =$$

$$= 3 + 3 = 6$$

$$f(2; 3) = |2-3-3| + |2-3+3| = |-4| + |2| = 6$$

$$f(x; 6) = |x-9| + |x+3|$$

$$f(5; 3) = |5-3-2| + |5-3+2| = |-4| + |4| = 6$$

$$|x-3-y| + |x-3+y| \leq 6$$

$$x-3-y + x-3+y =$$

$$= 2x - 6 \leq 6$$

$$x-3 \leq 3$$

$$x \leq 6$$

$$x-y-3 \geq 0 \quad x-3$$

$$y \leq x-3$$

$$x-y \geq 3$$

$$(0, -3)$$

$$y \geq x-3$$

$$x+y \leq -3$$

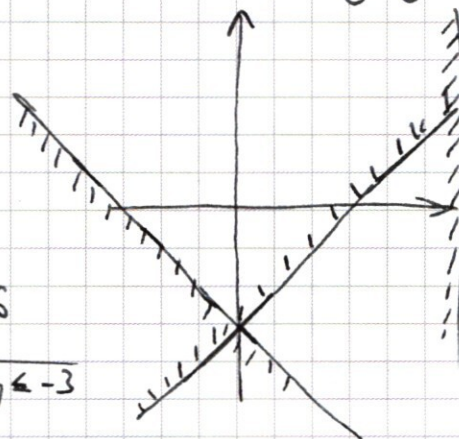
$$y \leq -3-x$$

все плоскости:

$$\begin{cases} y \geq x-3 \\ y \leq -3-x \\ x \leq 6 \end{cases}$$

~~$$f(x, y) = |x-3-y|$$~~

$$f(x, y) = |x-3-y| + |x-3+y|$$



$y = x-3$ $-x+3$
 $|x-3-y| + |x-3+y| \leq 6$
 рассмотрим 4 случая раскрытия модулей: $\oplus\oplus, \oplus\ominus, \ominus\oplus, \ominus\ominus$.

1. $\oplus\oplus$

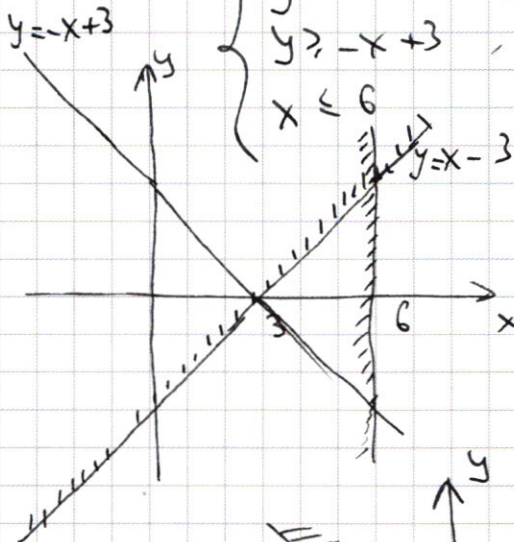
$$\begin{cases} x-y-3 \geq 0 \\ x+y-3 \geq 0 \\ x-3-y + x-3+y \leq 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq x-3 \\ y \geq -x+3 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x-y-3 &\geq 0 \\ -3+x &\geq y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y-3 &\geq 0 \\ x-3 &\geq y \\ -y &\leq x-3 \\ y &\geq -x+3 \end{aligned}$$

$$x-3-y + x-3+y = 2x-6 \leq 6 \\ x \leq 6$$



Секторная функция

2. $\oplus\ominus$

$$\begin{aligned} x-3-y &= 0 \\ x-y &= 3 \\ y &= x-3 \\ x-3+y &= 0 \\ y &= -x+3 \end{aligned}$$

$$x=3$$

$$t = x-3, |t-y| + |t+y| \leq 6$$

$$\begin{aligned} t &\geq y \\ t+y &\geq 0 \\ t &\geq -y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t-y+t+y &\leq 6 \\ 2t &\leq 6 \\ t &\leq 3 \end{aligned}$$

$$|t-y| + |t+y| \leq 6$$

2.

$$\begin{cases} t \geq y \\ y \leq -t \\ y \geq -t-3 \end{cases}$$

$$t-y-t-y \leq 6$$

$$-2t-1y \leq 6$$

$$-(t+y) \leq 3$$

$$t+y \geq -3$$

$$y \geq -t-3$$

справа

3.

$$|t-y| + |t+y| \leq 6$$

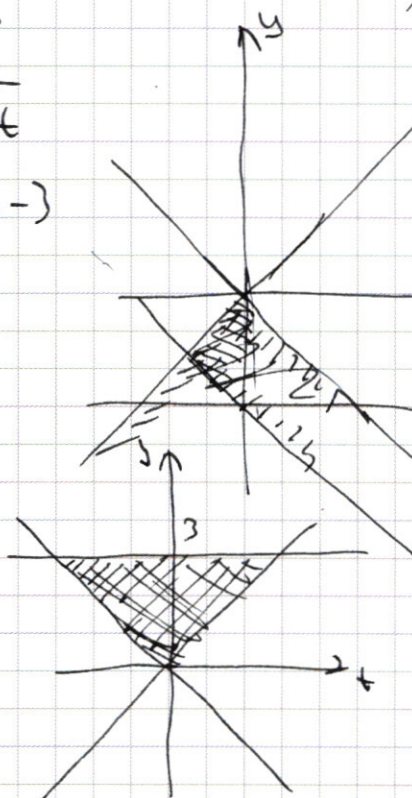
$$y-t+t+y \leq 6$$

$$y \leq 3$$

$$y \geq t$$

$$y \geq -t$$

$$\begin{cases} y \leq 3 \\ y \geq t \\ y \geq -t \end{cases}$$



$$f(x,y) = |x-y| + |x+y| \\ f(x,y) \leq 6$$

$$f(x-3,y) - \text{напрямую 3}$$

напр.

$$4. |t-y| + |t+y| \leq 6$$

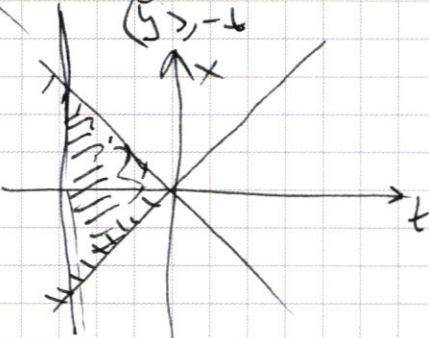
$$y-t-t-y \leq 6$$

$$-2t \leq 6$$

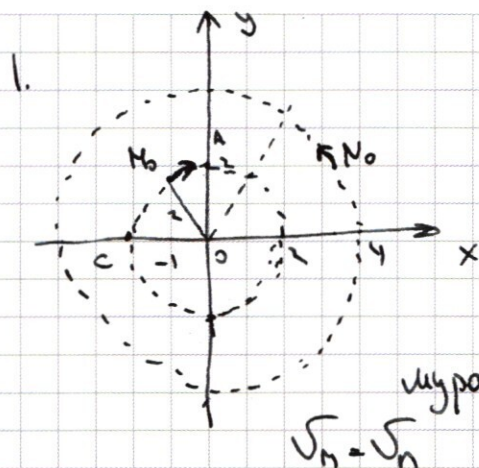
$$t \geq -3$$

$$y \geq t$$

$$y \geq -t$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$M_0(-1; \sqrt{3}), N_0(2\sqrt{3}; 2)$$

$$R_n = \sqrt{1+3} = 2$$

$$R_n = \sqrt{4+12} = 4 \Rightarrow \text{две окружности}$$

с центром $(0;0)$ и радиусами 2 и 4.

муравей движется по часовой стрелке, муха — против.

$$v_n = v_n$$

т.к. радиусы окружностей отличаются в два раза, угловая скорость муравья в два раза больше угловой скорости мухи. Очевидно, что муха и муравей будут находиться на минимальном расстоянии друг от друга, когда муравей, муха и начало координат лежат на одной прямой.

Найдем координаты мухи при первой встрече.

$$\Delta x = 2\sqrt{3} + 1 = 1 + 2\sqrt{3}, \quad \frac{2}{3} \Delta x = \frac{2 + 4\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3} + \frac{4}{\sqrt{3}}$$

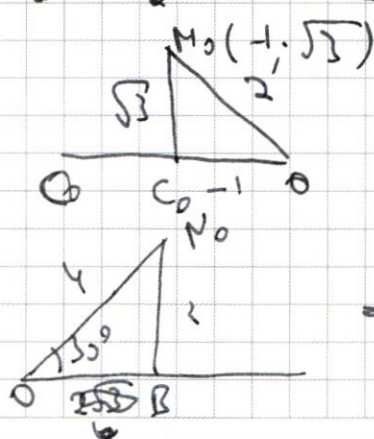
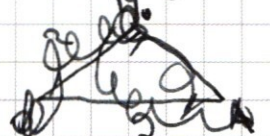
$$x_1 = -1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{3} + \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{-1 + 4\sqrt{3}}{3}, \quad x_1^2 = \frac{1 - 8\sqrt{3} + 48}{9} = \frac{49 - 8\sqrt{3}}{9}$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$M_0(-1; \sqrt{3}), A(0; 2)$$

$$M_0A^2 = 1 + (2 - \sqrt{3})^2 = 1 + 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 8 - 4\sqrt{3} = 4(2 - \sqrt{3})$$

$$M_0A = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$



$$\angle OM_0 = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = 60^\circ$$

Первая встреча: муха и муравей.

M_0 относительно Ox

$$1. (1; \sqrt{3}) \quad 3. (1; -\sqrt{3})$$

$$2. (-2; 0) \quad \text{встреча повторится}$$

2. $a, b \in \mathbb{R}$, бесконечно много решений

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

- выразим y , к-ты равны

$$\begin{cases} 12y = a - 3(a+b)x \\ (a+b)by = 1 - 4bx \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{a}{12} - \frac{(a+b)x}{4} \\ y = \frac{1 - 4bx}{(a+b)b} \end{cases}$$

$$\boxed{? a = -b ?}$$

$$\frac{a - 3(a+b)x}{12} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(a+b)x + \frac{1}{12}a$$

$$\frac{1 - 4bx}{(a+b)b} = -\frac{4bx}{(a+b)b} + \frac{1}{(a+b)b} = \frac{4}{a+b}x + \frac{1}{(a+b)b}$$

т.к. где бесконечно кол-ва решений к-та к-ты должны быть равны, получаем систему уравнений относительно a и b :

$$\begin{cases} -\frac{1}{4}(a+b) = \frac{4}{a+b} \\ \frac{1}{12}a = \frac{1}{(a+b)b} \end{cases} \begin{cases} -\frac{a+b}{4} = \frac{4}{a+b} \\ a = \frac{12}{a+b} \end{cases} \quad (a+b)^2 = -16 \quad ???$$

другим путем: пусть к-т пропорциональны при к-тах равен k :

$$\begin{cases} 3(a+b) = 4kb \\ 12 = (a+b)bk \\ a = k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(k+b) = 4kb \\ 12 = (k+b)bk \\ 3k + 3b = 4kb \\ 12 = bk^2 + b^2k \end{cases}$$

$$\boxed{? k = -b ?} \quad \begin{matrix} \text{пока не} \\ \text{ясно} \end{matrix}$$

$k = 0?$
 $b = 0?$

$$\frac{3(k+b)}{12} = \frac{4bk}{(k+b)bk}$$

$$\frac{k+b}{4} = \frac{4}{k+b}$$

$$\begin{matrix} (k+b)^2 = 16 \\ k+b = \pm 4 \end{matrix}$$

$$\frac{4}{k+b} = \frac{k+b}{4}$$

$$(k+b)^2 = 16$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

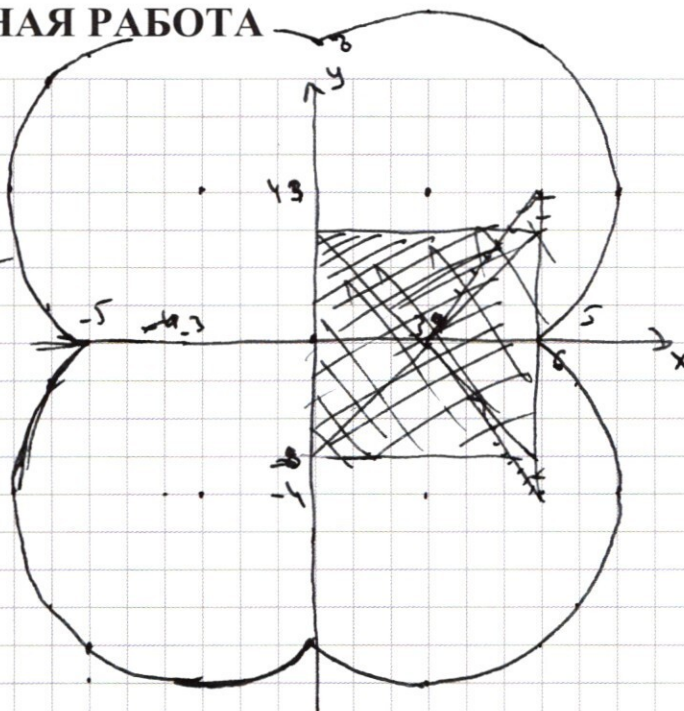
$$\sqrt{7} \cdot \int |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6$$

$$((x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$$

$$g(x, y) = ((x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$$

$$f(x, y) = |x-3-y| + |x-3+y|$$

(6; 0)



$$\sqrt{4} \cdot 2x^4 + x^2 - 2x + 3x^2 |x-1| + 1 \geq 0$$

I. $x \geq 1$

$$2x^4 + x^2 - 2x + 3x^3 - 3x^2 + 1 \geq 0$$

$$2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$x = -1$ - корень

$$2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 =$$

$$= (x+1)(2x^3 + x^2 - 3x + 1) \geq 0$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 & x+1 \\ \hline 2x^4 + 2x^3 & \\ \hline x^3 - 2x^2 & \\ x^3 + x^2 & \\ \hline -3x^2 - 2x & \\ -3x^2 - 3x & \\ \hline x + 1 & \\ x + 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

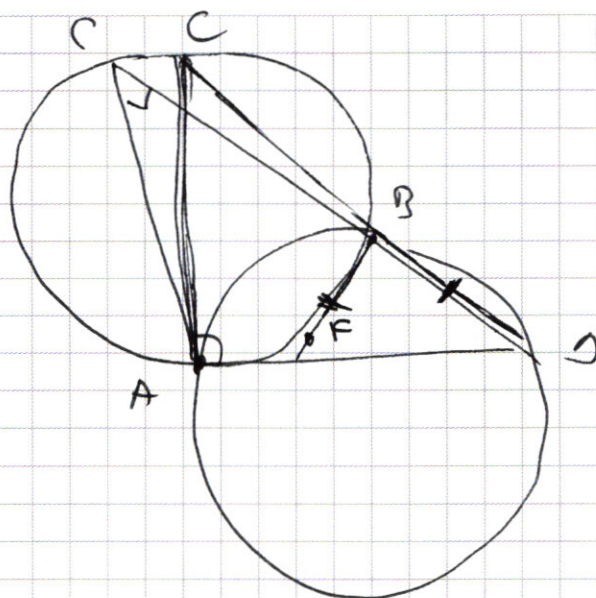
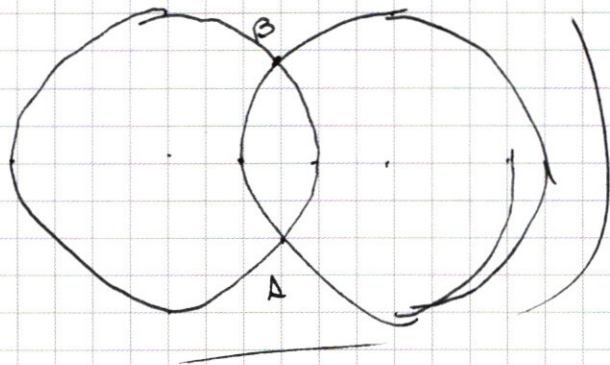
$$2x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$p(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 1$$

$$p'(x) = 6x^2 + 2x - 3$$

$$D = 4 + 36 = 40$$

6.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

а. 5. $1400 = 100 \cdot 14 = 2 \cdot 7 \cdot 100 = 2 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 25 = 8 \cdot 7 \cdot 25 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$

варианта: $\begin{matrix} 2 & 2 & 2 & 5 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & & 5 & 5 & 2 \\ 2 & & & 5 & 5 & 2 \end{matrix}$ $\begin{matrix} C_8^5 \\ + C_8^6 \\ + C_8^1 \end{matrix}$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$C_8^5 = \frac{8!}{5! \cdot 3!}$$

$$C_8^6 = \frac{8!}{6! \cdot 2!}$$

$$C_8^4 = \frac{8!}{4! \cdot 4!}$$

$$\begin{matrix} (I) & (II) & (III) \\ C_8^5 & C_8^6 & C_8^4 \end{matrix} = 8! \left(\frac{1}{5! \cdot 3!} + \frac{1}{6! \cdot 2!} + \frac{1}{4! \cdot 4!} \right)$$

$$(I) \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{2 \cdot \dots \cdot 8}{2 \cdot \dots \cdot 5 \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{6} = 7 \cdot 8 = 56$$

$$(II) \frac{8!}{6! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 8}{2} = 4 \cdot 7 = 28$$

$$(III) \frac{8!}{(4!)^2} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{3} = 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$$

$$C_8^5 + C_8^6 + C_8^4 = 56 + 28 + 70 = 86 + 56 = 142 + 52 = 152$$

Ответ: 152

$$4. 2x^4 + x^2 - 2x - 3x^3 + 1 \geq 0$$

$$I. x > 1 \quad 2x^4 + x^2 - 2x - 3x^3 + 3x^3 + 1 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 1 \geq 0$$

$$II. x < 1 \quad -2x$$

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^3 + 3x^3 + 1 \geq 0$$

$$2x^4 - 2x^3 + 3x^3 - 2x + 1 \geq 0$$

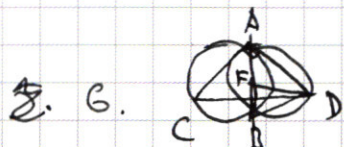
$$f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1$$

$$f'(x) = 8x^3 - 9x^2 + 8x - 2$$

$$f''(x) = 24x^2 - 18x + 8$$

$$f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$f'(x) = 8x^3 - 9x^2 + 8x - 2$$



$$2. \begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6 \\ (|x-3|)^2 + (|y-4|)^2 = 25 \end{cases}$$

$$f(x, y) = |x-3-y| + |x-3+y|$$

$$f(0, 0) = |1-3| + |1-3| = 6$$

$$f(1, 1) = |1-3-1| + |1-3+1| = 3+1=4$$

$$f(3, 0) = |3-3-0| + |3-3+0| = 0$$

$$f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = |1-3| + 1 = 3$$

Значит

$$x, y > 0$$

$$|x-3+y| = \begin{cases} x+y-3, & x+y \geq 3 \\ 3-x-y, & x+y < 3 \end{cases}$$

$$x, y > 0 \quad x > 3-y$$

$$x+y > 3 \quad y > 3-x$$

$$x+y-3 + x-3-y =$$

$$= 2x-6 \leq 6$$

$$x-3 \leq 3$$

$$x \leq 6$$

$$|x-3-y| = \begin{cases} x-3-y, & x-y \geq 3 \\ 3-x+y, & x-y < 3 \end{cases}$$

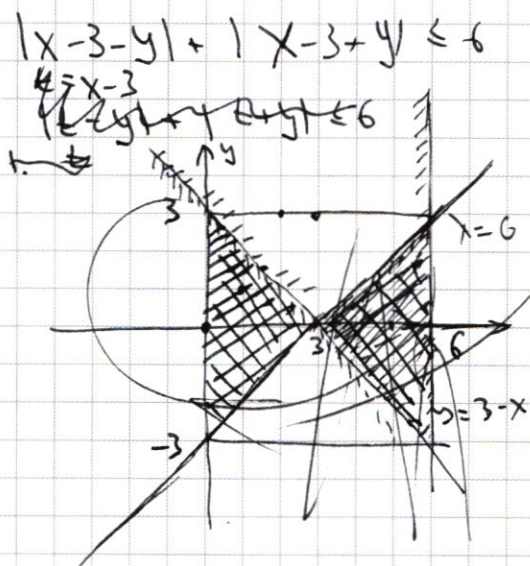
$$x-3-y \geq 0$$

$$y-x \leq -3$$

$$x-y \geq 3$$

$$x \geq 3+y$$

$$y \leq x-3$$



!!! Note that $-2x$

$$f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 1$$

$$f'(x) = 8x^3 - 9x^2 + 8x$$

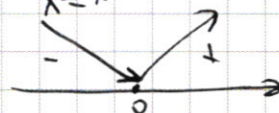
$$f'(x) = 0:$$

$$x(8x^2 - 9x + 8) = 0$$

$$8x^2 - 9x + 8 = 0$$

$$D = 81 - 256 < 0$$

$$x = 0$$



0 - точка минимума

$$f(0) = 1 \Rightarrow f(x) > 0$$