

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра-
боты без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Вокруг птичьей кормушки в одной плоскости с ней по двум окружностям с одинаковой скоростью летают синица и снегирь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой кормушка (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Синица движется по часовой стрелке, а снегирь – против. В начальный момент времени синица и снегирь находятся в точках $M_0(\sqrt{3}; 3)$ и $N_0(6; -2\sqrt{3})$ соответственно. Определите координаты всех положений снегиря, в которых расстояние между птицами будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a, \\ 3bx + (a-b)by = 1 \end{cases}$$

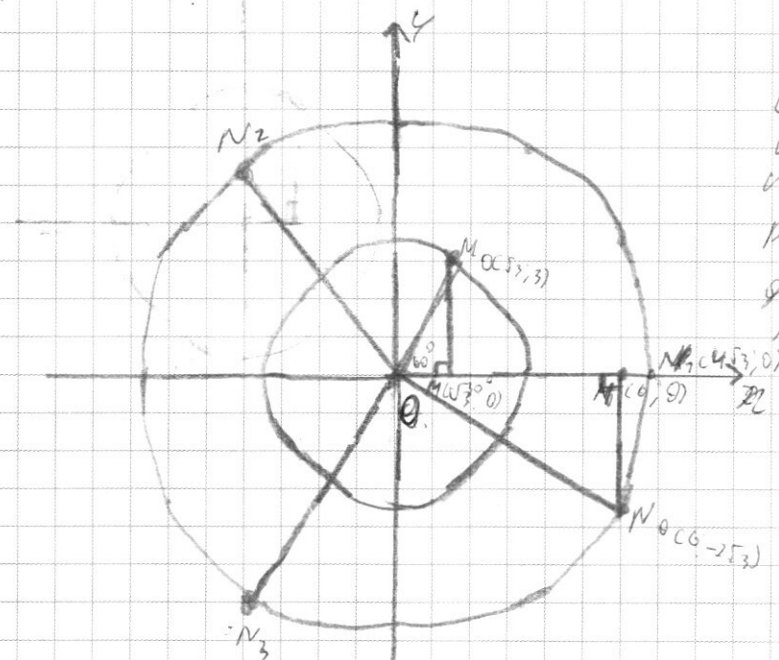
имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2|x+1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 7000. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 7 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10, \\ (|x|-5)^2 + (|y|-12)^2 = 169. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N₁



ω_1 - окружность,
по которой движется
цилиндр,
 ω_2 - окружность, по
которой движется
шарик.

Радиусы второй. ω_2 угловая скорость
шарика по формуле $\frac{2\pi R}{T}$, где T - скорость
движения, R - радиус окружности. Скорость
движения цилиндра, радиус ω_1 , в два
раза меньше радиуса ω_2 , поэтому угловая
скорость цилиндра в два раза больше, чем
скорость шара.

Теперь представим M_0 и N_0 на ось Ox ,
получим $M(\sqrt{3}; 0)$ и $N(6; 0)$. Найдем угол $\angle M_0OM$,

равный углу $\angle M_0ON$, по
формулам, по
которым движется
шарик. Радиус равен
расстоянию от центра
до любой точки на окру-
жности, поэтому радиус

ω_1 равен OM_0 , радиус

ω_2 равен ON_0 .

$$OM_0 = \sqrt{(0-3)^2 + (0-3)^2} =$$

$$= \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$ON_0 = \sqrt{(0-6)^2 + (0-(-3))^2} =$$

$$= \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

Тогда радиус первой

окружности в 1.5 раза меньше

$\angle N_0 O M$. Дополнительно замечаем, что

$$\sin \angle M_0 O M = \frac{M_0 M}{O M_0} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}}; \text{ т.к. } \angle M_0 O M < 90^\circ,$$

то $\angle M_0 O M$ однозначно равно 60° . $\sin \angle N_0 O N =$

$$= \frac{N_0 N}{O N_0} = \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2}, \text{ тогда, так как } \angle N_0 O N < 90^\circ, \text{ то}$$

$\angle N_0 O N = 30^\circ$. Тогда $\angle M_0 O N_0 = 90^\circ$, т.к. от

является суммой этих двух углов.

Возьмем точку N_1^* , когда стержень и шпилька в первый раз были на минимальном расстоянии друг от друга.

Замечим, что тогда угол между стержнем, точкой O и шпилькой равен 0° , т.к.

только тогда расстояние между ними было равно радиусу, иначе оно было бы больше.

Тогда, раз угловая скорость шпильки равна скорости угловой скорости стержня,

то $\angle M_0 O N_1 = \alpha$, $\angle M_0 O N_1 = 2\alpha$, тогда они

лежат на одной прямой. ~~В этот момент~~

~~угол между~~ Поэтому $\angle N_0 O N_1 + \angle M_0 O N_1 =$

$= \angle N_0 O M_0 = 90^\circ$, т.к. они вместе образуют

этот угол в 90° . $2\alpha + \alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ \Rightarrow \angle N_0 O N_1 =$

$= 30^\circ$, N_1 лежит на W_2 , т.к. в ней был стержень.

$\angle N_0 O N_1$. Считаем, против часовой

стрелки от $O N_0$, поэтому N_1 лежит на

луче $O M$, т.к. $\angle N_0 O N = 30^\circ = \angle N_0 O N_1$. Тогда

* N_1 - это точка, в которой будет стержень в момент касания, когда они были максимально близки.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

координата y равна 0, и 30° точки N_1 ,
т.е. ON_1 равно радиусу W_1 , то есть W_1 ,
 $ON_1 = 4\sqrt{3}$. $ON_1 = \sqrt{n^2 + 4^2} = \sqrt{n^2}$, $n \neq 30 \Rightarrow$
 $\Rightarrow ON_1 = n$, тогда $n = 4\sqrt{3}$. Тогда координаты N_1 : $(4\sqrt{3}, 0)$

Теперь рассмотрим, что происходит с лучом
когда он попадает в точку N_1 . Лучи
поверхности дуг, соединяющий O и N_1
до того момента, как они снова встретятся,
если они не встретились. Пусть теперь
пройдем в β , тогда ширина проема
 2β (условно скорость в 2 раза больше)
т.е. O и N_1 встречаются повторно,
но случайно пролетают 7 круг
(ведь она летит в противоположные
стороны), тогда $2\beta + \beta = 360^\circ \Rightarrow \beta = 120^\circ$.
г. Теперь заметим, что после
3-х точек поворотов снова верне-
тся в N_1 ; тогда видно, что точка
3. Попадёт и в N_1 .

N_1 точка, в которую снова
попадёт после 7-ого оборота. $\angle N_1 ON_2 = 120^\circ$

N_1 лежит на Ox , поэтому между N_1 и Ox угол 60° . $N_2 O = 4\sqrt{3}$, т.к. это радиус второй окружности. Найдём координаты N и y . Радиус равен косинусу угла между осью Ox и лучом ON_2 , считая против часовой стрелки, умноженному на расстояние до O , т.е. $\cos 120^\circ \cdot ON_2 = -\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} = -2\sqrt{3}$.

Координата y равна радиусу, т.е. $\sin 120^\circ$.

$$\cdot ON_2 = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6 \quad \text{Тогда } N_2: (-2\sqrt{3}; 6).$$

Теперь найдём координаты третьей точки, или N_3 . Она находится под углом 240° , тогда угол равен уже 240° . Найдём координаты точки N_3 также, как и N_2 . $\cos 240^\circ$.

$$\cdot ON_3 = 4\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{3}; \sin 240^\circ \cdot ON_3 = 4\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -6; \quad N_3: (-2\sqrt{3}; -6).$$

Ответ: $(4\sqrt{3}; 0)$, $(-2\sqrt{3}; 6)$, $(-2\sqrt{3}; -6)$.

N_3

$$\text{т) } n < -5 \Rightarrow n+5 < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} (n+5) \sqrt{n^3 - 76n + 25} \leq 0, \text{ т.к. } \sqrt{} \geq 0.$$

$$n^2 + 3n - 70 = n(n+3) - 70.$$

$$n < -5; n+3 < -2 \Rightarrow n(n+3) > 70 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 + 3n - 70 > 0, \text{ неверно, } n^2 + 3n - 70 =$$

$$= \frac{1}{2} (n+5) \sqrt{n^3 - 76n + 25} \leq 0.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Дано $x^3 - 76x + 25 \geq 0$, н.к. Это неравенство
выражение, корень из 2-ой степени.

2) Дано $x = -5$. $x + 5 = 0$

$$x^3 - 76x + 25 = -125 - 76(-5) + 25 = -125 + 380 + 25 = 280$$

неверно.

Если $x \geq -5$, то $x^2 + 3x - 70 \geq 0$, н.к.

$$x^2 + 3x - 70 = \frac{1}{2} (x+5) \cdot \sqrt{x^3 - 76x + 25} \geq 0$$

$$x^2 + 3x - 70 = (x+5)(x-2)$$

$$(x+5)(x-2) = \frac{1}{2} \sqrt{x^3 - 76x + 25} \cdot (x+5) / : x+5 > 0$$

$$x-2 = \frac{1}{2} \sqrt{x^3 - 76x + 25} \Rightarrow x-2 \geq 0, x \geq 2$$

$$(x-2)^2 = \frac{1}{4} (x^3 - 76x + 25)$$

$$x^2 - 4x + 4 = \frac{x^3 - 76x + 25}{4}$$

$$4x^2 - 16x + 16 = x^3 - 76x + 25$$

$$x^3 - 4x^2 + 9 = 0$$

$$x^3 - 3x^2 + x^2 + 9 = 0$$

$$x^2(x-3) - (x^2-9) = 0$$

$$x^2(x-3) - (x-3)(x+3) = 0$$

$$(x-3)(x^2 - x - 3) = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ или } x^2 - x - 3 = 0$$

$$x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}, x \geq 2 \Rightarrow \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \geq 2, \sqrt{13} \geq 1 \Rightarrow \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \geq 2$$

тогда $x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \geq 2$, все верно, н.к. $\sqrt{13} \geq \sqrt{9} = 3$
 $\frac{1 + \sqrt{13}}{2} \geq \frac{1 + 3}{2} = 2$

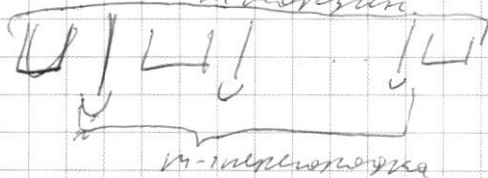
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тогда всего $8 \cdot 7^3 \cdot 6^3 = 8 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 = 280 \cdot 20 = 5600$ вариантов.

Ответ: 5600 чисел.

*

Докажем, что количество способов положить n предметов в m корзины равно C_{n+m-1}^n . Для этого рассмотрим корзину в ряд, заметим, что между $m-1$ пустых клеток, перегородок (как на рисунке ниже). Тогда выделим



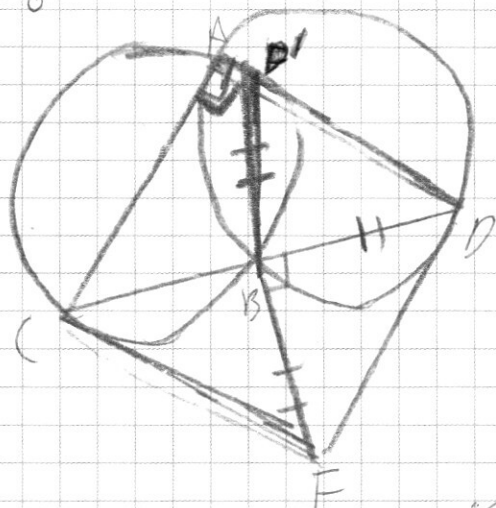
видные перегородки и предметы, получим $n+m-1$ мест, куда можно

или не положить перегородку или предмет, причем каждая из $n+m-1$ позиций соответствует раскладке предметов в корзины. Тогда вариантов равно C_{n+m-1}^n , и.т.д.

Мы кладем m предметов в некоторую из мест из $n+m-1$ мест, остальные

заполняем перегородками. Тогда всего вариантов положить n предметов в m корзины равно C_{n+m-1}^n , что и требовалось.

№6



Заметим, что если две окружности пересекаются ^{в одной} в точке (к примеру, M и N), то точки на одной из ~~этих~~ окружностей являются точками

такой же окружности, переводящей первую окружность во вторую, причем с ^{такой же} скоростью вращения M , причем, соединяющей ~~этой~~ выбранную точку L той, в которую она перейдет при поворотной ~~гомографии~~ гомотетии, будет проходить через N . В такой случае, угол поворотной гомотетии с центром A , переводящей первую окружность во вторую, будет равен 90° . Так поворотная гомотетия с центром A и углом 90° (так как окружности равны, то коэффициент поворотной гомотетии равен 1, тогда эта ^{поворотная} гомотетия является поворотом. T (здесь перейдем во вторую окружность относительно точки B так, чтобы она совпала с первой.

Заметим, что этот поворот совмещает точку C с точкой M и N с точкой L . Тогда угол поворота равен 90° .

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Рассмотрим точку D' — точку, в которую перейдет при данной повороте точка D .
Легко видеть, что $AD' = AD$, $D'B = BD$, $\angle D'BD = 90^\circ$.
Тогда D' и F симметричны относительно CD . Тогда
 $CF = CD'$. D' лежит на AD , $AD \perp AC \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle CAD' = 90^\circ$ или AD' совпадает с
лучом CA или A и C — противоположные
точки на окружности первой окружности.
Тогда CD' — диаметр первой окружности, $CD' = 2 \cdot r =$
 $= 74 \Rightarrow CF = 74$.

Ответ: $CF = 74$.

N2

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 64 = a \Rightarrow 2(a-b)x + 64 - a = 0 \\ 3bx + (a-b) \cdot 64 - a = 0 \Rightarrow 3bx + (a-b) \cdot 64 - a = 0 \end{cases}$$

1) $2(a-b) \neq 0$ или $a \neq b$.

Тогда первое уравнение — уравнение
прямой. Второе уравнение — уравнение
окружности. Следовательно, второе уравнение

$2(a-b)x + 6y - a = 0$ — уравнение прямой, т.к. $6 \neq 0$.

Тогда либо второе уравнение тоже является уравнением прямой, причём совпадающей с первой прямой, либо второе уравнение всегда верно, т.е. координаты равны 0.

1) Второе уравнение — уравнение прямой. Тогда или $3b \neq 0$, или $(a-b)b \neq 0$, тогда $b \neq 0$, иначе $(a-b)b = 0$, $3b = 0$.

$$\frac{2(a-b)}{3b} = \frac{6}{(a-b)b} = \frac{a}{b}, \text{ т.к. эти дроби совпадают.}$$

$$\frac{2(a-b)}{3b} = \frac{6}{(a-b)b} \Rightarrow 2(a-b)^2 = 3 \cdot 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(a-b)^2 = 18 \Rightarrow a-b = \pm 3$$

$$\frac{6}{(a-b)b} = a; \quad b = ab(a-b) \Rightarrow 6 = \pm 3ab \Rightarrow ab = \pm 2$$

~~$$\frac{2(a-b)}{3b} = \frac{a}{b} \Rightarrow 2(a-b) = 3a$$~~

а) $a-b = 3 \Rightarrow ab = 2$. Тогда a и b — решения уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$. т.к. $x^2 - 3x + 2 = 0$
 $D = 3^2 - 4 \cdot 2 = 1 \Rightarrow x = \frac{3 \pm 1}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}; \quad x = 1, 2.$

Тогда a и b — это 1 и 2 или 2 и 1 .

б) $a-b = -3 \Rightarrow ab = -2$. Тогда a и b — решения уравнения $x^2 + 3x - 2 = 0$; $D = 3^2 - 4 \cdot (-2) = 9 + 8 = 17$;
 $x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2} \Rightarrow a$ и b — это $\frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$ и $\frac{-3 - \sqrt{17}}{2}$ или $\frac{-3 - \sqrt{17}}{2}$ и $\frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$.

2) Второе уравнение всегда верно.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Если $3n = 0$, $12 - 4n = 0$, $-7 = 0$, то это невозможно, т.к. $-7 \neq 0$.

Ответ: $4n - 7$ и $2n - 7$; $\frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$ и $\frac{-3 - \sqrt{17}}{2}$ и $\frac{3 - \sqrt{17}}{2}$.

* Уравнение вида $k_1 n + k_2 y + k_3 z = 0$.

Рассмотрим уравнение нулевой, если

$k_1 \neq 0$ или $k_2 \neq 0$, тогда если $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, то оно либо неверно, либо верно (если $k_3 \neq 0$), либо всегда верно ($k_3 = 0$).

N4

$$6n^4 + n^2 + 2n - 5n^2 (n+1) + 17 \geq 0$$

$$1) n \leq -7 \Rightarrow 6n^4 + n^2 + 2n + 5n^3 + 5n^2 + 7 \geq 0$$

$$6n^4 + 5n^3 + 6n^2 + 2n + 7 \geq 0$$

$$6n^4 + 5n^3 + 6n^2 + 2n + 7 > 0, \text{ т.к.}$$

$$n < -7 \Rightarrow n^3 < 0; 6n + 5 < 0, \text{ т.к. } n < -7; 6n < -6 < -5;$$

$$6n + 5 < 0.$$

$$6n^2 + 2n \geq 0, \text{ т.к. } 2n < 0, 6n + 1 < 0, \text{ т.к.}$$

$$3n < -3 < -1; 3n + 1 < 0. \text{ Тогда,}$$

$$6n^4 + 5n^3 + 6n^2 + 2n + 7 > 0 + 0 + 7 = 7 > 0, \text{ все}$$

выполнено.

$$2) \quad n-7 \Rightarrow n+7 > 0$$

$$6n^4 + n^2 + 2n - 5n^3 - 5n^2 + 7 \geq 0$$

$$6n^4 - 5n^3 - 4n^2 + 2n + 7 \geq 0$$

$$6n^4 - 6n^3 + n^3 - n^2 - 3n^2 + 3n - n + 7 \geq 0$$

$$6n^3(n-1) + n^2(n-1) - 3n(n-1) - (n-1) \geq 0$$

$$(n-1)(6n^3 + n^2 - 3n - 1) \geq 0$$

$$a) \quad n \geq 7 \Rightarrow 6n^3 + n^2 - 3n - 7 \geq 0, \text{ т.к.}$$

$$n^2 - 1 \geq 0; \text{ т.к. } n^2 \geq 1^2 = 1; n^2 - 1 \geq 0;$$

$$6n^3 - 3n \geq 0, \text{ т.к. } 2n > 0; 2n - 7 > 0, \text{ т.к.}$$

$$2n > 7, \text{ т.к. } 2n \geq 2 \cdot 7, \text{ следовательно } 6n^3 + n^2 - 3n - 7 \geq 0.$$

$$n - 7 \geq 0; \quad 6n^3 + n^2 - 3n - 7 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n-7)(6n^3 + n^2 - 3n - 7) \geq 0, \text{ что и} \\ \text{нужно.}$$

$$b) \quad n < 7 \Rightarrow 6n^3 + n^2 - 3n - 7 \leq 0 \Rightarrow n - 7 < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6n^3 + n^2 - 3n - 7 \leq 0.$$

$$6n^3 + n^2 - 3n - 7 \leq 0$$

$$6n^3 + n^2 - 3n - 7 \leq 0$$

$$6n^3 + n^2 - 3n - 7 \leq 0$$

~~Реша~~

$$(n-9)$$

$$6n^3$$

$$6n^2(n-9)$$

$$+69n^2 + n^2$$

$$-1 \quad 3 \quad 7$$

$$(69+n)(n-9)$$

$$6n^3 + n^2 - 3n - 7 \leq 0$$

$$6n^3 + n^2 + 39n$$

$$n(6n^2 + n + 39) = 7$$

$$6n^3 - 3n - 7 > 0$$

$$69n^2 - 3n$$

$$9(69^2 - 3) = 7$$

$$(n+5)^2 + (4-n)^2 = 209$$

$$|9+4| + |9-4| \leq 70$$

$$|4+9| + |4-9|$$

$$|0+4| + |6-4| \geq 7$$

$$|9+4| + |9-4| \geq 7$$

и 50; 4 = 27 верно.

$$169 = 13^2$$

$$(5-4) + (3+4)$$

$$(9+4) + (9-4)$$

$$76$$

$$23$$

$$36$$

$$49$$

$$64$$

$$81$$

$$12^2 = 24 + 220$$

$$92 \neq 3^2$$

$$(9+4) + (9-4)$$

$$4 \geq 29 \cdot 24$$

$$-4 \leq 24 \leq 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

