

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФ:

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

- ✓ 1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Муравей движется по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0(-1; \sqrt{3})$ и $N_0(2\sqrt{3}; 2)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

- ✓ 2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

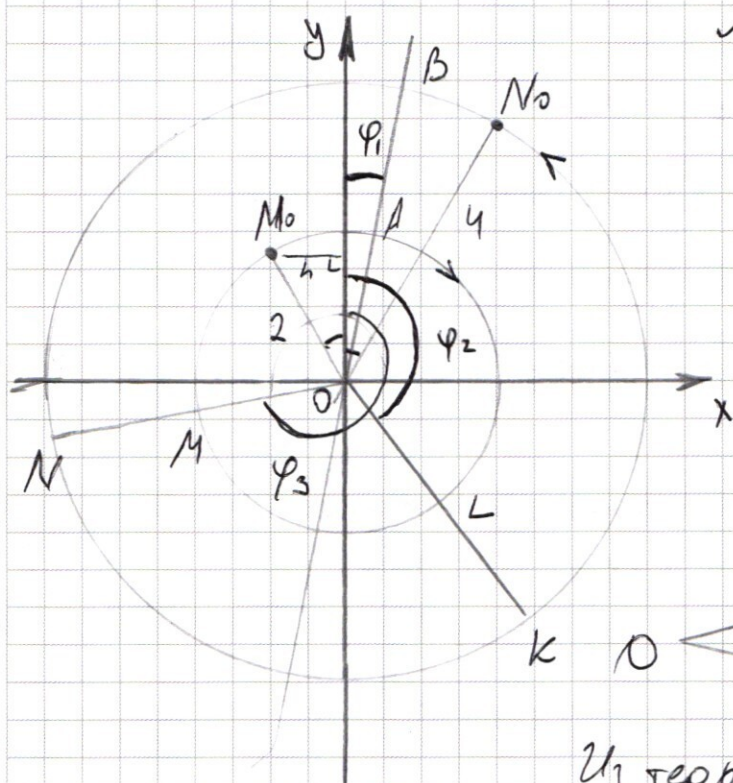
$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a, \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

- ✓ 3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$.
- ✓ 5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
- ✓ 6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- ✓ 7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6, \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



۱۵

Уравнение окружности

$$z^2 = x^2 + y^2 \rightarrow \begin{array}{l} \text{у жука } z=8 \\ \text{у муравьи } z=2 \end{array}$$

Угол φ - угол между
~~муравья~~ радиус вектора
муравья и пика.
м

Из теоремы косинусов N

$$MN = OM^2 + ON^2 - 2 \cos \varphi OM \cdot ON$$

$$MN \rightarrow \min \Rightarrow \gamma \cdot \kappa \partial M^2 + \partial N^2 = \text{const} \Rightarrow$$

$$ON \rightarrow \max \Rightarrow \varphi = 0^\circ$$

$$\omega_{\text{мгн}} = \frac{1}{2} \omega_{\text{ввр}} \quad \text{т.к.} \quad \omega = \frac{v}{R}$$

$$\psi = \frac{\phi}{f}$$

ω - угловая скорость.

$$ON_0 = 2 \quad ON_0 = 4$$

$$\angle M_0ON = 2 \cdot 30^\circ \text{ Т.К } h = 1 \quad OM = 2$$

Тогда первая встреча произойдет на линии АВ, при этом

$$\frac{\angle MOB}{\angle NOB} = \frac{2}{1} = \angle MOB = 40^\circ \Rightarrow$$

$$\angle NOB = 10^\circ$$

Аналогично встреча произойдет на MN и

на KL, так как откосится как 2:1 всего
«встреч» будет 3 (различных)

$$\angle NOK = \angle KOB = \angle NOB = 120^\circ \Rightarrow$$

$\angle \varphi_1 = 10^\circ \Rightarrow$ координаты положительных
мудя будут точки

$$\angle \varphi_2 = 130^\circ$$

$$\angle \varphi_3 = 250^\circ$$

$$(4 \sin 10^\circ; 4 \cos 10^\circ)$$

$$(4 \sin 130^\circ; 4 \cos 130^\circ) =$$

$$= (4 \sin 50^\circ; -4 \cos 50^\circ)$$

$$(4 \sin 250^\circ; 4 \cos 250^\circ) =$$

$$= (-4 \sin 70^\circ; 4 \cos 70^\circ)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a \\ 4bx + (a+b)by = 1/a \end{cases}$$

$$3(a+b)x + 12y = 4abx + (a+b)aby$$

$$x(3a + 3b - 4ab) = y((a+b)ab - 12)$$

$$y = \frac{3a - 4ab + 3b}{(a+b)ab - 12} x$$

$$4b + (a+b)(3a - 4ab + 3b)$$

$$3(a+b)x + \frac{36a - 48ab + 36b}{(a+b)ab - 12} x = a$$

т.к. решений бесконечно много $\Rightarrow$

$$\begin{cases} 3a + 3b - 4ab = 0 \\ (a+b)ab - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a > 0 \quad b > 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$$

у системы одно решение

т.к. коэф. при y равен 12

и не содержит параметра

$$\text{Ответ: } (0; 0)$$

$$(x+3) \sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6 = (x+2)(x+3)$$

$$x^3 - x + 10 =$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -1 & 10 \\ \hline \end{array}$$

$$(x+3)(x+2-\sqrt{x^3-x+10}) = 0$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ x+2 = \sqrt{x^3-x+10} \\ \sqrt{x^3-x+10} \geq 0 \Rightarrow x \neq -3 \quad \text{т.к. } -27+13 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2 = \sqrt{x^3-x+10} \\ x^3-x+10 \geq 0 \end{cases}$$

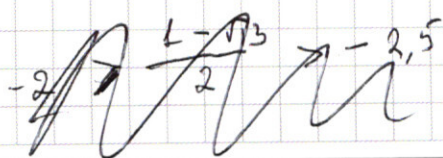
$$\begin{cases} x^2+4x+4 = x^3-x+10 \\ x^3-x+10 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3-x^2-5x+6 = 0 \\ x^3-x+10 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -5 & 6 \\ \hline 2 & 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} (x-2)(x^2+x-3) = 0 \\ x^3-x+10 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \\ x^3-x+10 \geq 0 \end{cases}$$



$$f(x) = x^3 - x + 10, \text{ то}$$

$$\frac{df(x)}{dx} = x^2 - 1$$

т.е. экстремумы
в точках $x = -1 \rightarrow$

на промежутке

$[-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$
функция возрастает.

$x = 2$ - подходит.

$x = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ - подходит.

$$\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^3 - \frac{1+\sqrt{13}}{2} + 10 \geq 0$$

$$\text{т.к. } (-2,5)^3 + 2,5 + 10 \geq 0$$

$$\frac{25}{2} \geq \frac{5^3}{2^3}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$$\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^3 - \frac{1-\sqrt{13}}{2} + 10 > 0$$~~

~~$$-\left(\frac{\sqrt{13}-1}{2}\right)^3 + \frac{\sqrt{13}-1}{2} + 10 > 0$$~~

~~$$\frac{-1-\sqrt{13}}{2} < -2$$~~

$$\frac{-1-\sqrt{13}}{2} - \text{не подходит} \rightarrow$$

$$\text{Ответ: } \frac{-1+\sqrt{13}}{2}, 2$$

54

$$2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2 / x - 1 / + 1 \geq 0$$

$$x \in (-\infty; 1]$$

1

$$x \in (1; +\infty)$$

$$2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

	2	3	-2	-2	1
-1	2	1	-3	1	0
2	2	2	-2	0	

$$(-2x^2 - x + 1)(-x^2 - x + 1) \geq 0$$

$$(2x^2 + x - 1)(x^2 + x - 1) \geq 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 1)\left(x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \geq 0$$

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < 0 \text{ — всегда}$$

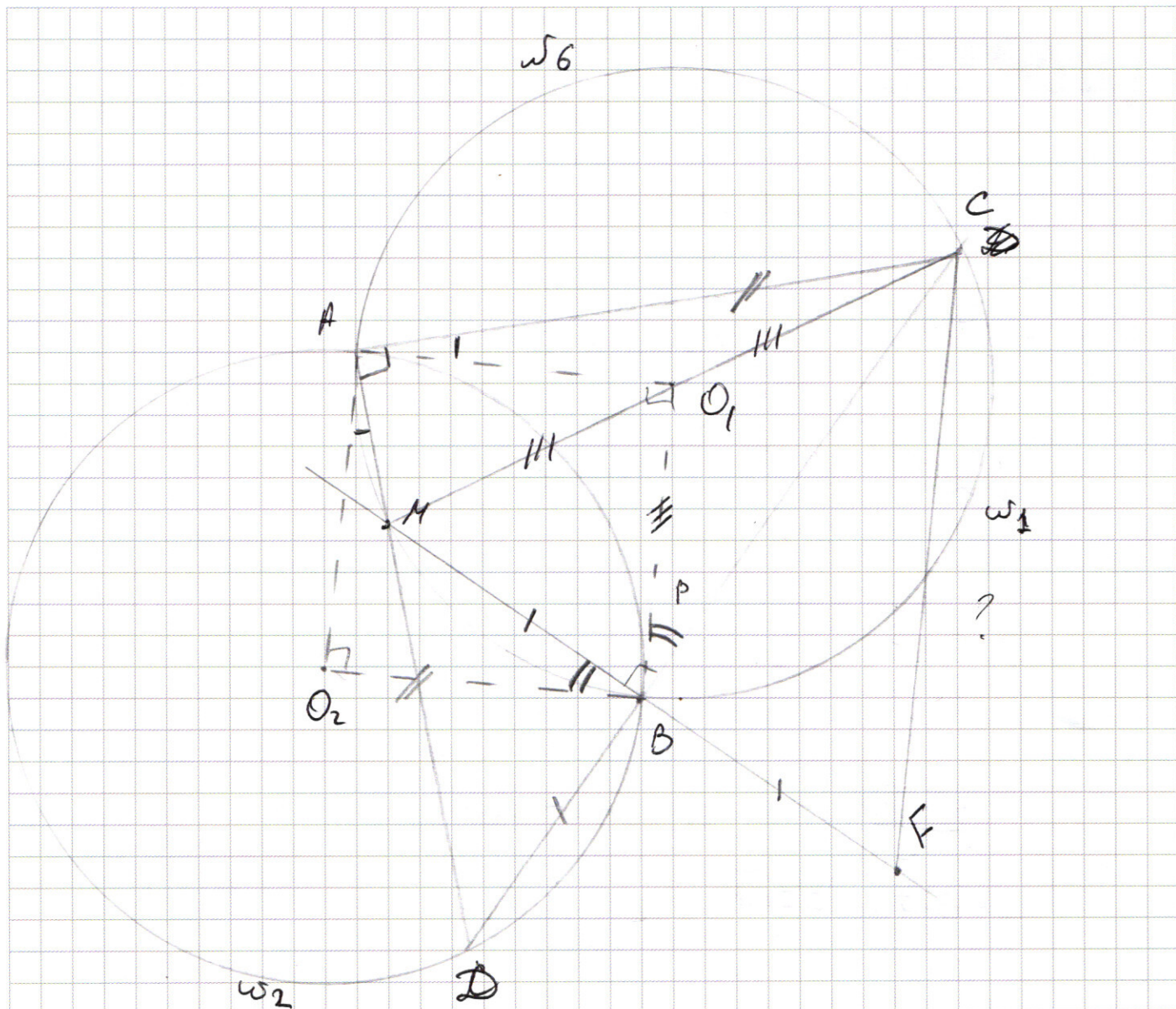
	2	-3	4	-2	1
2	-3	4	-2	1	
2	-3	4	-2	1	

Заметим, что

$$4x^2 \geq 2x \geq 0 \text{ — всегда при всех } x \geq 1$$

$$2x^4 + 1 - 3x^3 \text{ — возраст.}$$

$$\text{при } x=1 \quad 2x^4 - 3x^3 + 1 = 0 \Rightarrow$$



$CB \cdot CD = AC^2$ - следствие точки C от ω_1

Следствие точки D от ω_2

$$DC \cdot DB =$$

$$\angle ADB = \angle ACB \text{ т.к. } \omega_1 = \omega_2 \Rightarrow \overline{AB}_{\omega_1} = \overline{AB}_{\omega_2} \Rightarrow \angle ADC = 45^\circ; \angle ACD = 45^\circ \Rightarrow$$

$$AC = AD \Rightarrow \triangle AO_2D = \triangle AO_1C \Rightarrow$$

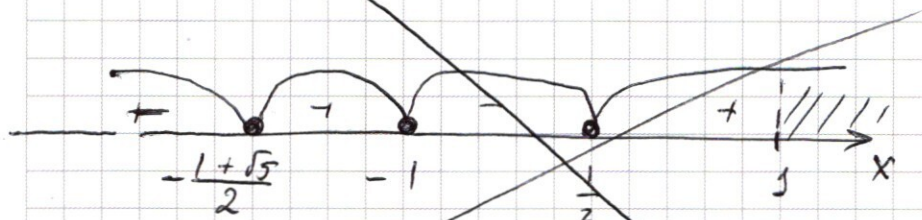
$$\angle O_1AC = \angle O_2AD \Rightarrow \angle O_2AO_1 = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle O_1BO_2 = 90^\circ \quad BM = BF$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$$x \in (-\infty; 1]$$

$$(x - \frac{1}{2})(x + 1)(x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}) \leq 0$$~~



~~$$x \in (-\infty; -\frac{1+\sqrt{5}}{2}] \cup [-1; \frac{1}{2}]$$~~

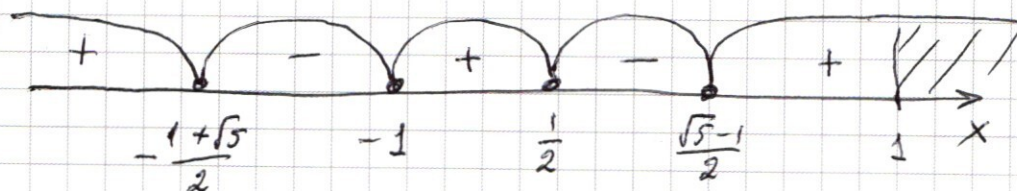
$$x \in (1; +\infty)$$

$$\Rightarrow 2x^4 - 3x + 1 \geq 0 - \text{при любом } x \geq 1 \Rightarrow$$

$$2x^4 - 3x + 4x^2 - 2x + 1 \geq 0 - \text{при } x \geq 1$$

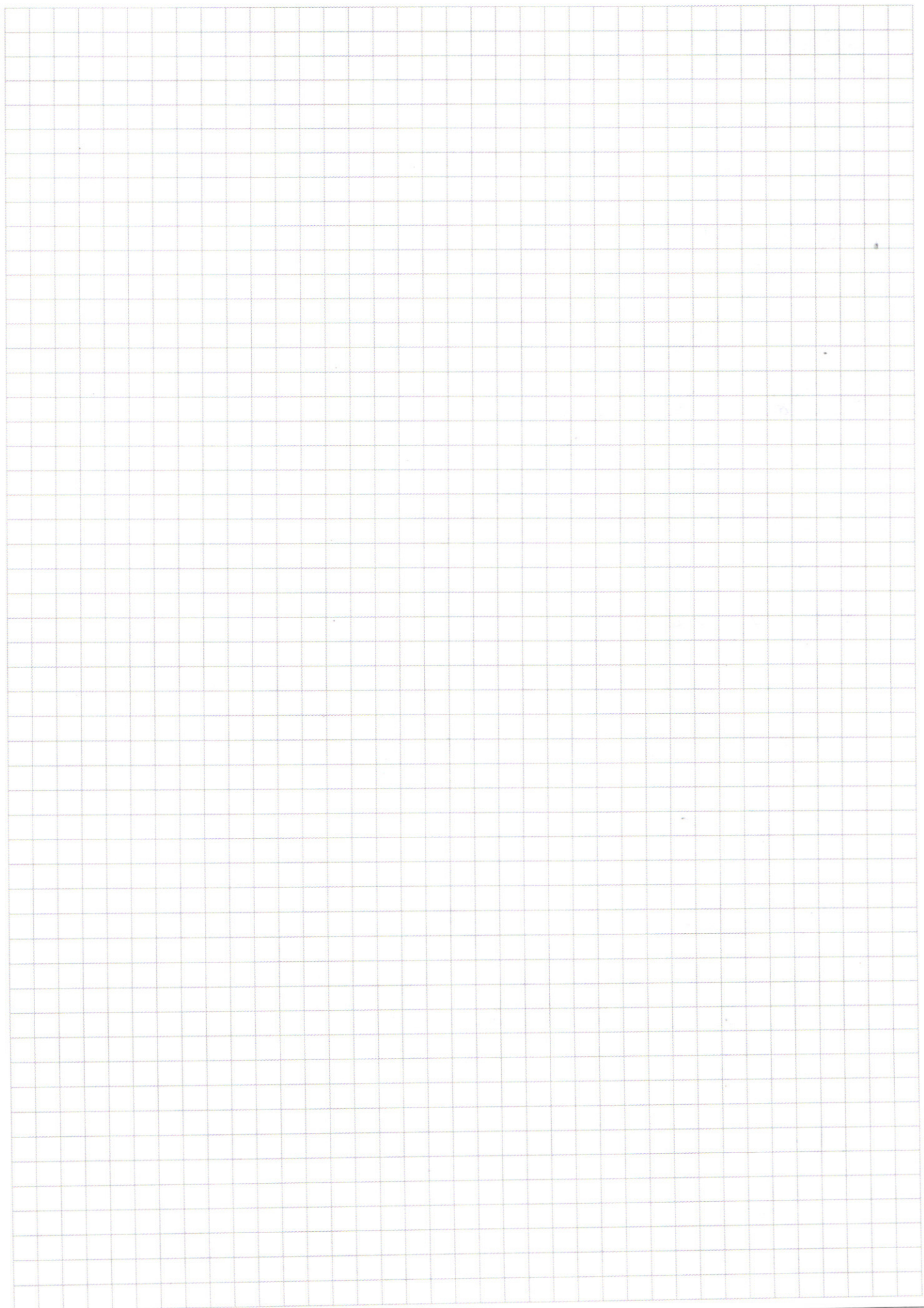
$$x \in (-\infty; 1]$$

$$(x - \frac{1}{2})(x + 1)(x + \frac{1+\sqrt{5}}{2})(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}) \geq 0$$



$$\begin{cases} x \in (-\infty; -\frac{1+\sqrt{5}}{2}] \cup [-1; \frac{1}{2}] \cup [\frac{\sqrt{5}-1}{2}; 1] \\ x \in (1; +\infty) \end{cases} \Rightarrow$$

$$x \in (-\infty; -\frac{1+\sqrt{5}}{2}] \cup [-1; \frac{1}{2}] \cup [\frac{\sqrt{5}-1}{2}; +\infty)$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Проведём O, M и O, C

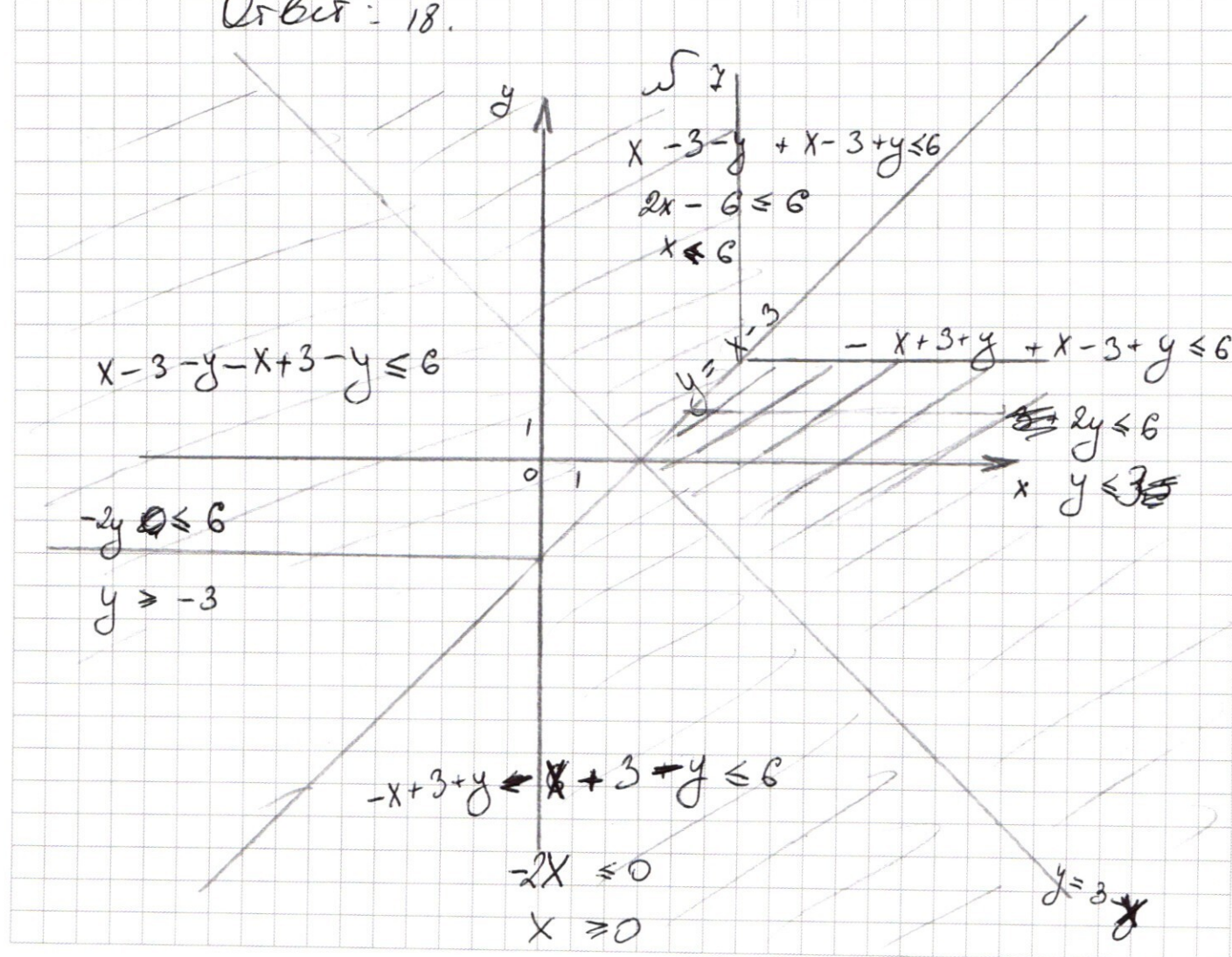
$$\angle MO, B = 180^\circ - 2(90^\circ - \beta) = 2\beta$$

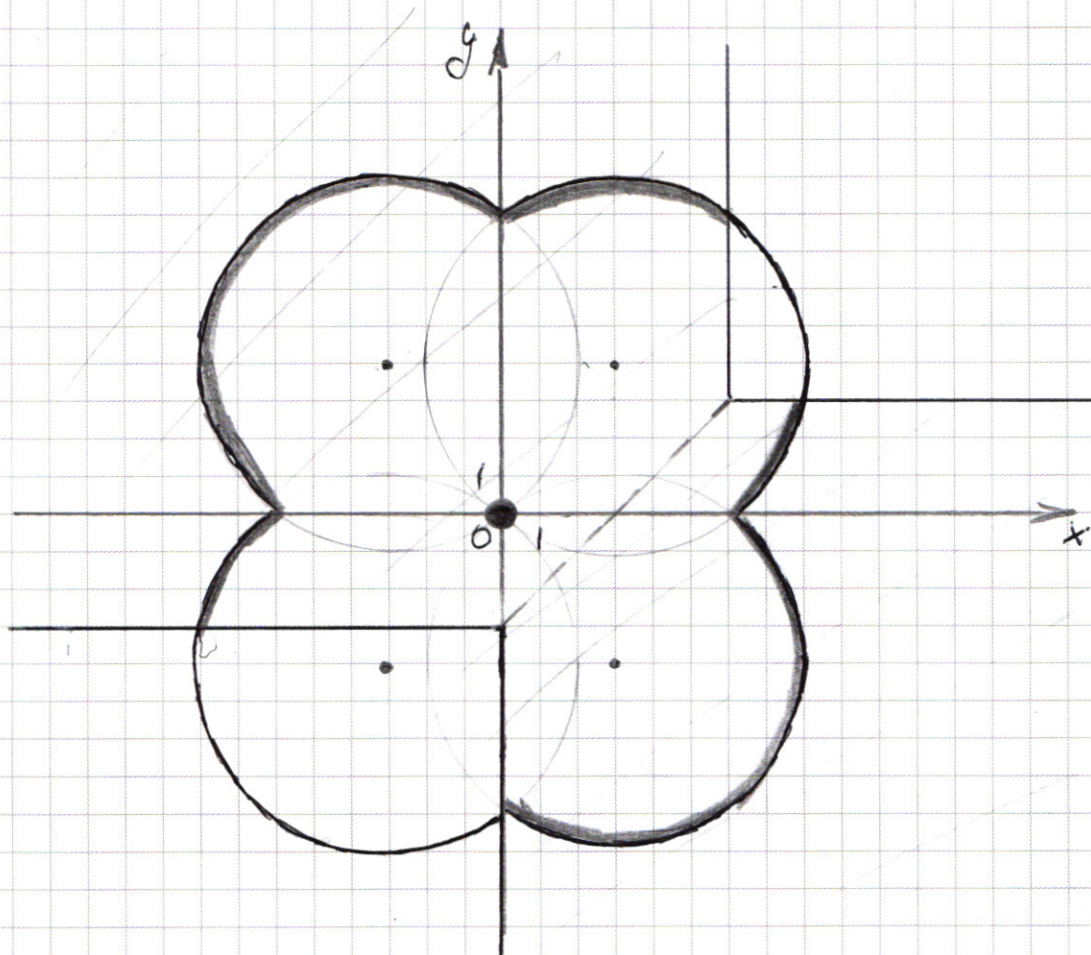
$$\angle MQC = 180^\circ - 2\beta \rightarrow$$

$$\angle MQC = 180^\circ \rightarrow$$

$$Q \in MC \Rightarrow MC = EF = 2R = 18$$

Ответ: 18.





Выделенная карандашом черная линия
— решение системы.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

55

$$1400 = 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$$

Цифры 7 и 5 должны быть в каждом

числе т.к. $7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 > 10$

5 ≤ 10 , где $k \in \mathbb{N}; k \geq 1$

$\Rightarrow$ возможные наборы

$\{2, 4, 5, 5, 7\}$ Набор	$\{1, 5, 5, 7, 8\}$ кол-во вариантов
$1, 1, 1, 2, 4, 5, 5, 7$	$\frac{8!}{3! \cdot 2!}$
$1, 1, 1, 1, 5, 5, 7, 8$	$\frac{8!}{4! \cdot 2!}$
$1, 1, 2, 2, 2, 5, 5, 7$	$\frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 2!}$

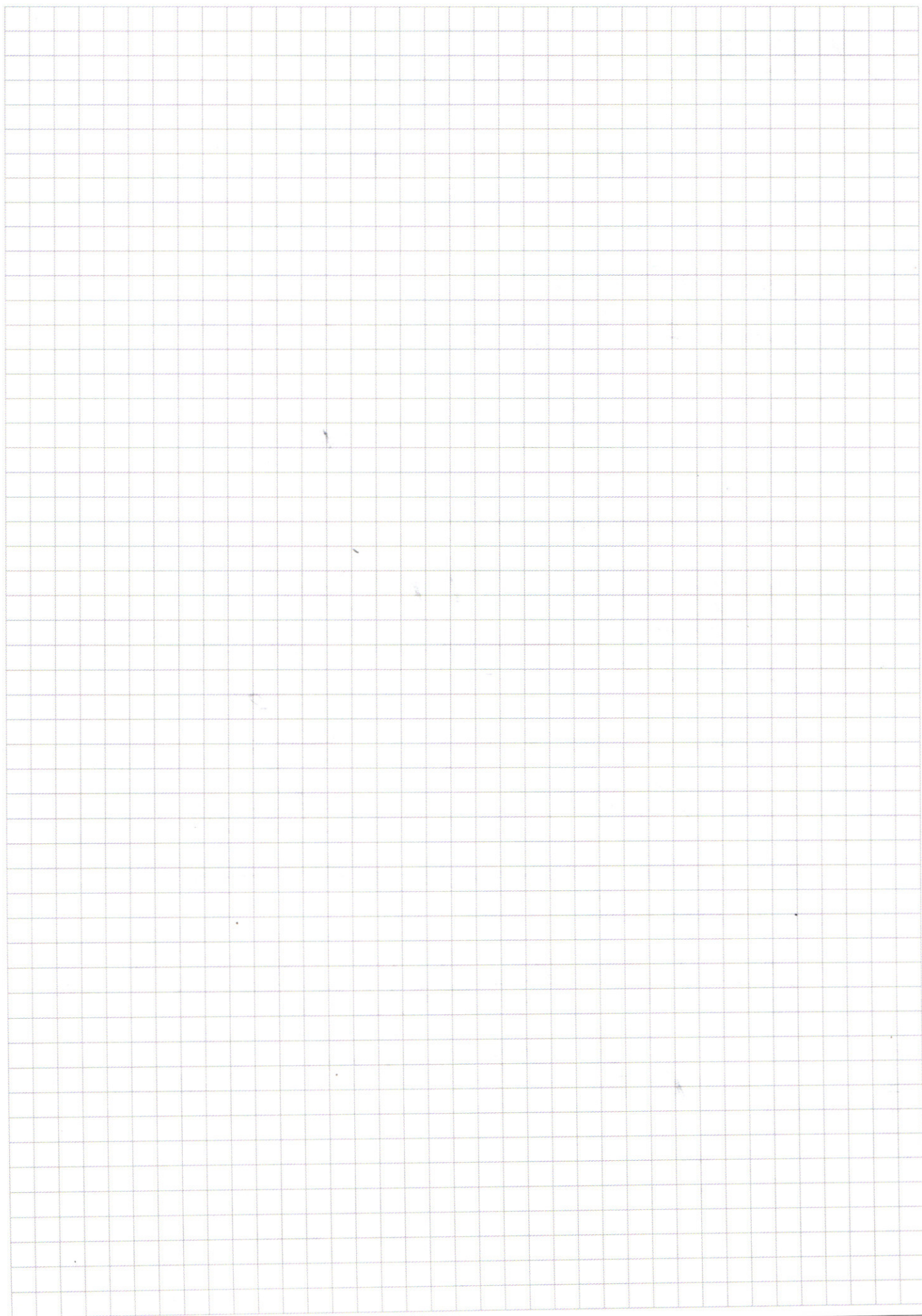
П.к. наборов различны, то общее число вариантов

$$\frac{8!}{2!} \left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{2! \cdot 3!} \right) = \frac{8!}{2! \cdot 3!} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) =$$

$$= \frac{4}{8} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 7^2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$$

$$= 5880$$

Ответ: 5880



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 2x + 1$$

$$(ax^2 + bx + 1)(cx^2 + dx + 1) =$$

$$\begin{matrix} b+d = -2 \\ bd \end{matrix}$$

$$2x^4 - 3x^3 + 1$$

$$2+3-1$$

$$(-2x^2 - x + 1)(-1x^2 - x + 1) =$$

$$= 2x^4 + 2x^3 + x^3 - 2x^2 - x^2 + x^2 =$$

$$= 2\left(x - \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4}\right)^3 \left(x - \frac{-1 - \sqrt{1+8}}{4}\right) \left(x - \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2}\right)$$

$$\left(x - \frac{-1 - \sqrt{1+4}}{2}\right)$$

$$(3x^2 - x + 1)(1x^2 - x + 1)$$

$$x^2$$

$$a+b=3$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)